MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

64. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON W. SÜSS

64. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1956

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 64. Bandes

Seite

BAUMANN, V., Eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung der Wärmeübertragung bei Wärmeleitung und -strahlung 353

BEHRENS, E.-A., Zur additiven Idealtheorie in nichtassoziativen Ringen 169

CARLITZ, L., Arithmetic properties of elliptic functions 425

EBEL, I., Analytische Bestimmung der Darstellungsanzahlen natürlicher Zahlen durch spezielle ternäre quadratische Formen mit Kongruenzbedingungen . . . 217

EICHLER, M., Der Hilbertsche Klassenkörper eines imaginärquadratischen Zahlkörpers 229

GAIER, D., Über die Äquivalenz der $|B_k|$-Verfahren 183

GAIER, D., Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete 385

GROOT, J. DE, A System of Continuous, Mutually Non-differentiable Functions . . . 192

GUNDLACH, K.-B., Poincarésche und Eisensteinsche Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe 339

HERRMANN, O., Über den Rang der Schar der Spitzenformen zu Hilbertschen Modulgruppen 457

HSIUNG, CH.-CH., A theorem on surfaces with a closed boundary 41

HUPPERT, B., Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. III 138

JACOBS, K., Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen . . . 298

JURKAT, W., und A. PEYERIMHOFF, Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. II 151

KARZEL, H., Über eine Anordnungsbeziehung am Dreieck 131

KASCH, F., Abschätzung der Dichte von Summenmengen (Zweite Mitteilung) . . . 243

KRULL, W., Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen 10

KUNLE, H., Über T-Figuren in einem quadratischen Komplex 270

LAMPRECHT, E., Zetafunktionen symmetrisch-erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher 47

LAUGWITZ, D., Über einen Abbildungssatz von B. Sz.-Nagy 72

MCMINN, T. J., On figures of equilibrium of rotating liquids 286

NEUMER, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. V 435

PERRON, O., Über Potenzsummen 103

PUTNAM, C. R., A Note on Inverses of Differential Operators 149

Seite

RIBENBOIM, P., Sur une note de Nagata relative à un problème de Krull 159

RINGEL, G., Teilungen der Ebene durch Geraden oder topologische Geraden 79

SINGH, V., Convergence Theorems for a Generalized Laplace Integral 1

WEIER, J., Über Zerlegung eindimensionaler Nullstellengebilde 115

WILANSKY, A., und K. ZELLER, Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit 258

WITT, E., Die Unterringe der freien Lieschen Ringe 195

ZELLER, K., Über den perfekten Teil von Wirkfeldern 123

SINGH, V.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 1—9 (1956)

Convergence Theorems for a Generalized Laplace Integral

By
VIKRAMADITYA SINGH

1. Introduction

Generalizations of the Laplace integral

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(t)\, dt, \tag{1.1}$$

or the Laplace-Stieltjes integral

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha(t), \tag{1.2}$$

have been given by MEIJER [4], BOAS [1], and VARMA [5]. All these generalizations suffered from the drawback that they had lost that simplicity and elegance which had made (1.1) and (1.2) important and amenable to analytic treatment. The two main properties that make the kernel e^{-st} so easy to handle are its reproduction under the operation of differentiation i.e.

$$\frac{d}{dt} e^{-st} = -s\, e^{-st}, \tag{1.3}$$

and the simplicity of the addition formula

$$e^{-(s+s_0)t} = e^{-st} e^{-s_0 t}. \tag{1.4}$$

Whereas many functions can be constructed to have some property resembling (1.3) it is well known that the exponential function is the only function that possesses the property (1.4). Working on these lines VARMA [6] gave another generalization in the form

$$f(s) = \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-st/2} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t), \tag{1.5}$$

where $W_{k,m}(st)$ is the Whittaker function. This transform reduces to (1.2) when $m + k = \frac{1}{2}$. The kernel has a reproduction property analogous to (1.3), i.e.

$$\frac{d}{dt}\left[(st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\right] = -s\left[(st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(st)\right]. \tag{1.6}$$

It is well known that

$$W_{k,m}(z) = O(z^k e^{-z/2}) \qquad (|z| \to \infty,\ |\arg z| < \pi) \tag{1.7}$$

and

$$z^{m+\frac{1}{2}} W_{k,m}(z) = \begin{cases} O(1) & (\operatorname{Re} m > 0,\ |z| \to 0) \\ O(z^{2m}) & (\operatorname{Re} m < 0,\ |z| \to 0). \end{cases} \tag{1.8}$$

Thus the behaviour of the kernel of (1.5) is similar to e^{-st} for large values of the argument st, but for small values of the argument st it is not the same when $\mathrm{Re}\, m < 0$. This difference indicates that in the case of (1.5) there will be two abscissae of convergence, one in the s-plane and the other in the m-plane. Also, it is easily seen from (1.7) and (1.8) that there will be no abscissa of convergence in the k-plane. In the present paper we have given the formulae for the abscissae of convergence and also theorems of Abelian and Tauberian character for the transform (1.5). The inversion and representation theory of this transform will be developed in subsequent papers.

2. Abscissae of convergence

2.1. We prove a theorem which gives the abscissa of convergende σ_{cs} in the s-plane. The formula and proof are analogous to the one given for (1.2) by KNOPP [3].

THEOREM 2.1. *If* $\alpha(t) = O(t^n)$ *as* $t \to 0$ *so that* $\mathrm{Re}(n+1) > 0$ *and* $\mathrm{Re}\,(2m+n+1) > 0$, *then the abscissa of convergence* σ_{cs} *for the integral* (1.5) *is given by the formula*

$$\sigma_{cs} = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \log |\alpha(t') - \alpha(t)|. \tag{2.1}$$

(Throughout this section t' is an integer such that $t > t' > t - 1$.)

Proof. Let us put

$$p = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \log |\alpha(t') - \alpha(t)|, \tag{2.2}$$

and suppose that p is finite. (The proof can equally well be extended to the case when p is infinite.) Then, for any $\delta > 0$,

$$|\alpha(t') - \alpha(t)| < K(\delta)\, e^{\left(p + \frac{\delta}{2}\right)t}, \qquad (t > t' > T) \tag{2.3}$$

where $K(\delta)$ is a number that may depend on δ alone.

It is easy to see that for $s = \sigma + i\tau$ and $t > t' > T(\delta) + 1$

$$\left| \int_{t'}^{t} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t) \right| \leq M(\delta, \sigma, \tau) \exp\left(-\sigma + p + \frac{\delta}{2}\right) t,$$

where $M(\delta, \sigma, \tau)$ is a constant that depends only on δ, σ and τ. Now, for $\sigma \geq p + \delta$ and $T_2 > T_1 > T + 1$, we have, using the above inequality,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{T_1}^{T_2} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t) \right| \\ &\quad \leq \left[\sum_{\nu = T_1' + 1}^{T_2'} \int_{\nu - 1}^{\nu} + \int_{T_2'}^{T} + \int_{T_1'}^{T} \right] |e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{m-\frac{1}{2}} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t)| \\ &\quad \leq M' \exp(-\delta T/2), \end{aligned}$$

where M' is a constant independent of T.

We have thus shown that the integral (1.5) converges for $\sigma \geq p + \delta$. The proof will be complete if we show that it will diverge for $\sigma \leq p - \delta$. Let us

suppose that the integral converges for $\sigma \leq p - \delta$, then it must converge for σ' such that $p - \delta < \sigma' < p$. With the usual procedure we can show that

$$[\alpha(t) - \alpha(t')] = o(e^{\sigma' t}) \qquad (t \to \infty) \tag{2.4}$$

which is contrary to the hypothesis that $p > \sigma'$. This completes the proof.

2.2. We prove the following theorem:

Theorem 2.2. *If* $\alpha(t) = O(e^{\nu t})$ *as* $t \to \infty$ *and* $\operatorname{Re} s > \nu$, *then the integral* (1.5) *has a negative abscissa of convergence* σ_{cm} *in the m-plane given by the formula*

$$\sigma_{cm} = -\frac{1}{2} \overline{\lim_{t \to 0}} \left| \frac{\log |\alpha(t)|}{\log t} \right|. \tag{2.5}$$

Proof. The convergence of the integral for large values of t is already guaranteed by the hypothesis, so we need only investigate the convergence at the origin. Let us put

$$l = -\frac{1}{2} \overline{\lim_{t \to 0}} \left[\frac{\log |\alpha(t)|}{\log t} \right] \qquad (l < 0); \tag{2.6}$$

then for $\delta > 0$

$$|\alpha(t)| < t^{-2l - \delta/2} \qquad (t \to 0). \tag{2.7}$$

We first show that the integral converges for $\operatorname{Re} m \geq l + \delta$. For, integrating by parts we get

$$\int_\varepsilon^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t) = \left[(st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, \alpha(t)\right]_\varepsilon^\infty +$$

$$+ s \int_\varepsilon^\infty (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, \alpha(t)\, dt.$$

It is easy to show that under the hypothesis the integrated term vanishes as $\varepsilon \to 0$. Also, assuming that s is real[1]),

$$\int_\varepsilon^\infty (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, \alpha(t)\, dt$$

$$< M \int_0^\infty (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, e^{\nu t} t^{-2l-\delta/2}\, dt$$

$$= M s^{2l+\frac{\delta}{2}-1} \Gamma\left(2m - 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} 2m - 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}, & 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \\ m - k - 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \gamma \\ s \end{matrix}\right)$$

$$\left[\Gamma\left(-2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \Gamma\left(m - k - 2l - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

where the integral has been evaluated by the GOLDSTEIN method [2]. The series on the right hand side converges for $\sigma < \operatorname{Re} s > \gamma$. So the integral on the left hand side of the inequality converges absolutely and we get

$$\int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, d\alpha(t) = s \int_0^\infty (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, \alpha(t)\, dt.$$

[1]) By analytic continuation we can extend the result to complex values of S.

To show that the integral diverges for $\mathrm{Re}\, m \leq l-\delta$ ($\delta<0$) we suppose that it is not true and then show that it leads to contradiction. If the integral converges for $\mathrm{Re}\, m \leq l-\delta$ then it will converge for some value m' of $\mathrm{Re}\, m$ such that $l-\delta<m'<l$. Let us define

$$\beta(t)=\int_0^t (st)^{m'-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m'}(st)\, d\alpha(t). \tag{2.8}$$

Then $\beta(\infty)$ exists and $\beta(0)=0$. Hence

$$\alpha(t)-\alpha(0)=\int_0^t \frac{d\beta(t)}{(st)^{m'-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m'}(st)},$$

and

$$\lim_{t\to 0}[\alpha(t)-\alpha(0)]\,(st)^{m'-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m'}(st)$$

$$=\lim_{t\to 0}(st)^{m'-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m'}(st)\int_0^t \beta(t)\,\frac{d}{dt}\left\{\frac{e^{\frac{1}{2}st}}{(st)^{m'-\frac{1}{2}} W_{k,m'}(st)}\right\} dt.$$

The integral on the right is always less than an arbitrary positive number because for small values of t, $|\beta(t)|<\varepsilon/2$. Thus

$$\alpha(t)=o(t^{-2m'}),$$

and

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log|\alpha(t)|}{\log t}=-2l>-2m'$$

which is contrary to the hypothesis that $m'<l$. Hence the theorem. The following two corollaries have also been proved in the course of the above two theorems:

Corollary 2.1. *If* $\alpha(t)=O(t^n)$ *as* $t\to 0$ *such that* $\mathrm{Re}(n+1)>0$ *and* $\mathrm{Re}(2m+n+1)>0$ *and the integral* (1.5) *converges for* $\sigma=\sigma'$ *then*

$$[\alpha(t)-\alpha(t')]=o(e^{\sigma' t}) \qquad t\to\infty.$$

Corollary 2.2. *If* $\alpha(t)=O(t^{\nu t})$ *for* $t\to\infty$ *and the integral* (1.5) *converges for* $\mathrm{Re}\, s>\nu$ *and* $\mathrm{Re}\, m<m'<0$, *then*

$$\alpha(t)=o(t^{-2m'}).$$

The following theorem is easy to prove:

Theorem 2.3. *If the integral* (1.5) *converges for* $\mathrm{Re}\, s=\nu$ *and* $\mathrm{Re}\, m=m'<0$ *then*

$$\alpha(t)=o(t^{-2m'}e^{\nu t}).$$

3. Uniform convergence near the axis of convergence

It is a common property of Laplace integrals that they converge uniformly in an angular sector near the abscissa of convergence. We show here that the integral (1.5) has a similar property. The following lemma is immediate:

Lemma 3.1. *If* t *is large and* s *and* s_0 *are non-zero, then*

$$\left|\frac{d}{dt}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)}{e^{-\frac{1}{2}s_0 t} W_{k,m}(s_0 t)}\right\}\right| \leq \left|\frac{s}{s_0}\right|^k |s-s_0|\, e^{-(\sigma-\sigma_0)t}. \tag{3.1}$$

Theorem 3.1. If the integral (1.5) converges for $s=s_0=\sigma_0+it_0$ and if $K>1$ then it converges uniformly in the region Δ defined by the inequalities

$$\left|\frac{s}{s_0}\right|^{m+k-\frac{1}{2}}|s-s_0|\leq 2K(\sigma-\sigma_0)\,e^{H(\sigma-\sigma_0)} \quad (H>0,\ \sigma>\sigma_0). \tag{3.2}$$

Proof. We note that if s lies in Δ then the integral (1.5) converges. Let

$$\beta(t)=\int_0^t (s_0 t)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}s_0 t}\,W_{k,m}(s_0 t)\,d\alpha(t),$$

then $\beta(\infty)$ exists and $|\beta(t)-\beta(t')|<\frac{\varepsilon}{K}$ $(t>t'>R)$. Thus

$$\int_R^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)\,d\alpha(t)=\left(\frac{s}{s_0}\right)^{m-\frac{1}{2}}\int_R^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)}{e^{-\frac{1}{2}s_0 t}\,W_{k,m}(s_0 t)}\,d\left(\beta(t)-\beta(R)\right),$$

and with the help of Lemma 3.1 we finally get

$$\left|\int_R^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)\,d\alpha(t)\right|\leq\left|\frac{s}{s_0}\right|^{m+k-\frac{1}{2}}\frac{\varepsilon}{2K}\,\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\,e^{-\mathrm{Re}\,(\sigma-\sigma_0)}.$$

Hence if s is a point in Δ other than s_0 then

$$\left|\int_R^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)\,d\alpha(t)\right|\leq\varepsilon$$

and in case $s=s_0$

$$\left|\int_R^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k,m}(st)\,d\alpha(t)\right|=|\beta(\infty)-\beta(R)|\leq\varepsilon.$$

This proves the theorem.

4. Abelian Theorems

(In the following s, m, k, are to be taken as real unless otherwise stated.)

Theorem 4.1. *If the integral* (1.5) *converges for* $s>0$ *and* $m>n$, *then for any* $\nu\geq -2n$ *if* $n<0$, *otherwise* $\nu>0$ *and any constant* A

$$\lim_{s\to\infty}|s^\nu f(s)-A|\leq\lim_{t\to 0+}\left|\frac{\alpha(t)\,t^{-\nu}}{\beta(\nu,m,k)}-A\right|,$$

where

$$\beta(\nu,m,k)=\frac{\Gamma(\nu+m-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\nu+2m)}.$$

Proof. Since the integral converges for $s>0$ we get using GOLDSTEIN's integral

$$\begin{aligned}|s^\nu f(s)-A|&\leq\beta(\nu,m,k)\int_0^T\frac{(st)^{m+\nu-1}\,W_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(st)}{\exp(\frac{1}{2}st)}\left|\frac{\alpha(t)\,t^{-\nu}}{\beta(\nu,m,k)}-A\right|d(st)+\\&+s^{\nu+1}\int_T^\infty (st)^{m-1}\,e^{-\frac{1}{2}st}\,W_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(st)\left|\alpha(t)-\frac{A\,\beta(\nu,m,k)}{t^{-\nu}}\right|dt,\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

But

$$I_1 \leq \beta(\nu, m, k) \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right| \int_0^\infty (st)^{m+\nu-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, d(st)$$

$$= \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right|.$$

For I_2, we observe that on account of the convergence of the integral (1.5) for $s > 0$, we have

$$|\alpha(t) - A\, t^{\nu}\, \beta(\nu, m, k)| < M\, e^{\varepsilon t}, \quad t \to \infty, \ \varepsilon > 0.$$

Hence

$$I_2 \leq M\, s^{\nu+1}\, e^{-T\left(\frac{s}{2} - \varepsilon\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} (st + sT)^{m-1} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st + sT)\, e^{\varepsilon t}\, dt$$

$$\leq M_1\, s^{\nu+1}\, e^{-T\left(\frac{s}{2} - \varepsilon\right)},$$

because the integral on the right is convergent for all values of T and s. Thus

$$\lim_{s \to \infty} I_2 = 0;$$

and we finally get

$$\lim_{s \to \infty} |s^{\nu} f(s) - A| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right|.$$

The left hand side being indepedent of T we allow T to approach zero. Thus the theorem is proved.

Theorem 4.2. *If the integral* (1.5) *converge for* $s > \sigma_c$ *and* $m > n$ *then for any* $\nu > -2n$ *if* $n < 0$, *otherwise* $\nu > 0$ *and* $m + k + \frac{1}{2} \geq 0$ *and any constant* A

$$\lim_{s \to \sigma_c +} \left| \frac{s^{\nu+1} f(s)}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2}; & \frac{\sigma_c}{s} \end{matrix}\right\}} - \sigma_c A \right| \leq \sup_{t \to \infty} \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}\, e^{-\sigma_c t}}{\beta(\nu, m, k)} - A \right|.$$

Proof. Proceeding as before

$$\left| \frac{s^{\nu+1} f(s)}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2}; & \frac{\sigma_c}{s} \end{matrix}\right\}} - A\, \sigma_c \right|$$

$$\leq \frac{\sigma_c\, s^{\nu+1}}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2}; & \frac{\sigma_c}{s} \end{matrix}\right\}} \int_0^T (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st) \left| \alpha(t) - \frac{A\, \beta(\nu, m, k)}{t^{-\nu} e^{-\sigma_c t}} \right| dt +$$

$$+ \frac{\beta(\gamma, m, k)}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2}; & \frac{\sigma}{s_c} \end{matrix}\right\}} \int_T^\infty (st)^{m+\gamma-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st) \left| \frac{\alpha(t)\, t^{-\gamma} e^{-\sigma_c t}}{\beta(\gamma, m, k)} - A \right| d(st) +$$

$$+ \left| \frac{s^{\nu+1}(s - \sigma_c)}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix} 2m+\nu, & \nu+1 \\ \nu+m-k+\frac{1}{2}; & \frac{\sigma_c}{s} \end{matrix}\right\}} \int_0^\infty (st)^{m-1} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(st)\, \alpha(t)\, dt \right|$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Since (1.5) converges for $s>\sigma_c$ and $m>n$ we get from Theorem 2.3 that

$$|\alpha(t) - A\, t^{\nu}\, e^{\sigma_c t}\, \beta(\gamma, m, k)| < M\, e^{\sigma_c t}\, t^{-2n}.$$

Hence

$$I_1 \leq \frac{M\, s^{\nu+2n}}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix}2m+\nu,\ \nu+1\\ \nu+m-k+\frac{1}{2}\end{matrix};\ \frac{\sigma_c}{s}\right\}} \int_0^{T/s} t^{m-2n-1}\, e^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sigma_c}{s}\right)t}\, W_{k+\frac{1}{2},\, m-\frac{1}{2}}(t)\, dt.$$

Now the integral on the right is always convergent for $\sigma_c/s<1$ and for $m+k+\frac{1}{2}\geq 0$

$$\lim_{s\to\sigma_c+} {}_2F_1\left\{\begin{matrix}2m+\nu,\ \nu+1\\ \nu+m-k+\frac{1}{2}\end{matrix};\ \frac{\sigma_c}{s}\right\} \to \infty.$$

Thus for $m+k+\frac{1}{2}\geq 0$,

$$\lim_{s\to\sigma_c+0} I_1 = 0.$$

We easily find that

$$I_2 \leq \sup_{T\leq t\leq\infty} \left|\frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}\, e^{-\sigma_c t}}{\beta(\nu, m, k)} - A\right|.$$

Also

$$\lim_{s\to\sigma_c+0} I_3 = 0,$$

because the integral in it exists and for $m+k+\frac{1}{2}\geq 0$ it vanishes in the same way as I_1. Therefore

$$\lim_{s\to\sigma_c+0} \left|\frac{f(s)\, s^{\nu+1}}{{}_2F_1\left\{\begin{matrix}2m+\nu,\ \nu+1\\ m-k+\nu+\frac{1}{2}\end{matrix};\ \frac{\sigma_c}{s}\right\}} - \sigma_c A\right| \leq \sup_{T\leq t\leq\infty} \left|\frac{\alpha(t)\, t^{-\nu}\, e^{-\sigma_c t}}{\beta(\nu, m, k)} - A\right|.$$

Since the left hand side is independent of T we can take T as ∞. This proves the theorem.

5. Tauberian Theorems

We first observe that on account of the different behaviour of the kernel of the integral in (1.5) for positive and negative values of m we will get two classes of Tauberian theorems, one holding for each class. However, for $m<0$ we can write

$$\frac{f(s)}{s^{2m}} = \int_0^{\infty} (st)^{-m-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}st}\, W_{k,m}(st)\, \frac{d\alpha(t)}{t^{-2m}}, \qquad m<0;$$

and changing the sign of m

$$\frac{f(s)}{s^{-2m}} = \int_0^{\infty} (st)^{m-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}st}\, W_{k,m}(st)\, \frac{d\alpha(t)}{t^{2m}}, \qquad m>0,$$

because $W_{k,m}(st) = W_{k,-m}(st)$. Thus the theorems for the case $m<0$ can be deduced from those for $m>0$ if we replace $f(s)$ by $f(s)/s^{-2m}$ and $d\alpha(t)$ by $d\alpha(t)/t^{2m}$.

Lemma 5.1. *For $m \geq 0$ and $x > 0$*

$$\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} - e^{-x/2} x^{m-\frac{1}{2}} W_{k,m}(x) \leq x \frac{\Gamma(2m-1)}{\Gamma(m-k-\frac{1}{2})}.$$

Proof. Let us put

$$f(x) = \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} - e^{-x/2} x^{m-\frac{1}{2}} W_{k,m}(x) - \frac{\Gamma(2m-1)}{\Gamma(m-k-\frac{1}{2})}$$

then for $m > 0$, $f(0) = 0$ and $f'(0) = 0$. Again because $f''(0) < 0$ the maximum of $f(x)$ is at $x = 0$ and since $f(x)$ vanishes at this point the lemma is established. We note that when $m + k = \frac{1}{2}$ this inequality reduces to the well known inequality $1 - e^{-x} \leq x$, $x > 0$.

Theorem 5.1. *If $\alpha(t)$ belongs to L in $(0, R)$ for every R and if the integral*

$$f(s) = \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\, \alpha(t)\, dt, \tag{5.1}$$

converges for $s > 0$ and $m > 0$, then the conditions

$$\text{(i)} \quad \lim_{s \to 0+} f(s) \to A \quad \text{and} \quad \text{(ii)} \quad \alpha(t) = 0\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t \to \infty)$$

imply

$$f(0+) = \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} \int_0^\infty \alpha(t)\, dt = A.$$

Proof. Under the hypothesis (ii)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t u\, \alpha(u)\, du = o(1). \tag{5.2}$$

Now

$$\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} \int_0^t \alpha(u)\, du - \int_0^\infty \alpha(u) \left(\frac{u}{t}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u/t} W_{k,m}\left(\frac{u}{t}\right) du$$

$$= \int_0^t \left[\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} - \left(\frac{u}{t}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u/t} W_{k,m}\left(\frac{u}{t}\right)\right] \alpha(u)\, du -$$

$$- \int_t^\infty \left(\frac{u}{t}\right)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u/t} W_{k,m}\left(\frac{u}{t}\right) du$$

$$= I_1 + I_2.$$

By the Lemma 5.1 and (5.2) $|I_1| \to 0$ as $t \to \infty$ and

$$|I_2| \leq M \sup_{t \leq u < \infty} |u\, \alpha(u)|.$$

Hence taking limit as $t \to \infty$ and using (ii) we get

$$\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} \int_0^t \alpha(u)\, du = \lim_{s \to 0+} \int_0^\infty (su)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}s}\, u\, W_{k,m}(su)\, \alpha(u)\, du$$

$$= f(0+) = A.$$

The following more general theorem can be proved likewise:

Theorem 5.2. *Let the integral* (1.5) *converge for* $s > 0$ *and let*

$$\lim_{t \to 0+} f(s) = A .$$

Then

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = A \tag{5.3}$$

if and only if

$$\beta(t) = \int_0^t u\,\alpha(u) = o(t), \qquad t \to \infty . \tag{5.4}$$

My thanks are due to Dr. R. S. VARMA for his kind interest in the paper.

References

[1] BOAS jr., R. P.: Generalized Laplace Integrals. Bull. Amer. Math. Soc. **48**, 286—294 (1942). — [2] GOLDSTEIN, S.: Operational Representation of Whittakers Confluent Hypergeometric Function and Webers Parabolic Cylinder Function. Proc. London Math. Soc. **34**, 103—125 (1932). — [3] KNOPP, K.: Über die Konvergenzabszisse des Laplace Integrals. Math. Z. **54**, 291—296 (1951). — [4] MEIJER, C. S.: Eine neue Erweiterung der Laplace Transformation I. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **44**, 727—737 (1941). — [5] VARMA, R. S.: A Generalization of Laplace's Transform. Current Sci. (Bangalore, India) **16**, 17—18 (1947). — [6] VARMA, R. S.: On a Generalization of Laplace Integral. Proc. Nat. Acad. Sci. India A **20**, 209—216 (1951). — [7] WIDDER, D. V.: Laplace Transform. Princeton: University Press 1941.

Dept. of Math., Delhi University (India), and
Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh

(Eingegangen am 18. Januar 1955)

KRULL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 10—40 (1956)

Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen

Von
WOLFGANG KRULL

Im folgenden sollen hauptsächlich einige auf den ersten Blick „pathologisch" wirkende Eigenschaften gewisser Abelscher Gruppen betrachtet werden, die durch die Überschreitung der Grenze des Abzählbaren bedingt sind. Gerechtfertigt wird die Untersuchung dadurch, daß die betrachteten Gruppen nicht nur sehr einfach definiert werden können, sondern auch wenigstens in Spezialfällen große praktische Bedeutung besitzen. Es dürfte unter diesen Umständen nicht zulässig sein, ihre „pathologischen" Eigenschaften einfach als Kuriositäten abzutun. Diese zu untersuchenden Gruppen können allgemein so charakterisiert werden: Es sei M eine beliebige Menge, B die BOOLEsche Algebra aller Untermengen von M; unter P möge ein echtes Teilsystem von B verstanden werden, das mit A alle $\mathsf{N} \subseteq A$ und mit A_1, A_2 stets auch $A_1 \cup A_2$ enthält. F sei eine additive Gruppe von reellwertigen, überall auf M definierten Funktionen, und es bedeute $\tilde{F}$ die Gruppe, die aus F entsteht, wenn man $f \in F$, $g \in F$ schon dann als gleich ansieht, falls $f - g$ nur auf einer zu P gehörigen Menge von 0 verschieden ist. — Das bekannteste Beispiel für Gruppen F liefert die LEBESGUEsche Integrationstheorie. Hier ist M ein m-dimensionales Intervall oder auch ein anderes passendes Teilstück eines m-dimensionalen euklidischen Raumes ($m = 1, 2, \ldots$), und es besteht P aus allen den Untermengen von M, die das Maß 0 besitzen. Das einfachste Beispiel dagegen (in Zukunft geradezu unser *Musterbeispiel* $\tilde{G}_0$) erhält man, wenn man für $F = G_0$ die Gruppe aller *ganzzahligen* Funktionen auf einer *abzählbaren* Menge M_0 und für P_0 das System aller *endlichen* Untermengen von M_0 wählt. Die Betrachtung des Musterbeispiels wird vor allem durch die Zahlentheorie nahegelegt. Ist nämlich M_0 die Menge aller additiv geschriebenen π-adischen Bewertungen eines endlich-algebraischen Zahlkörpers, so wird $\tilde{G}_0 = G_0/D_0$ die Faktorgruppe von G_0 nach der aus allen fast überall auf M_0 verschwindenden, ganzzahligen Funktionen bestehenden Divisorengruppe D_0, und da nicht nur D_0 sondern auch G_0 in der Arithmetik eine wichtige Rolle spielt, erscheint es nicht abwegig, auch einmal $\tilde{G}_0$ näher zu untersuchen.

Jede Gruppe von $\tilde{F}$ besitzt eine *natürliche Ordnung* $\tilde{\mathfrak{O}}$ entsprechend der Tatsache, daß an jeder einzelnen Stelle $\mu \in \mathsf{M}$ der Unterschied zwischen positiven und negativen Funktionswerten von vornherein gegeben ist. Nach einem bekannten, allgemeinen *Konjunktionssatz* läßt sich die Ordnung $\tilde{\mathfrak{O}}$ stets als Konjunktion von totalen Ordnungen $\tilde{\mathfrak{T}}_\tau$ von $\tilde{F}$ darstellen (vgl. § 1, wo die benutzten Bezeichnungen näher erläutert sind). Da es grundsätzlich wünschenswert ist, die praktische Bedeutung des Konjunktionssatzes an

möglichst vielen einfachen, aber nicht trivialen Beispielen nachzuprüfen, stellen wir uns die *Hauptaufgabe, bei den Gruppen $\tilde{F}$ eine Konjunktionsdarstellung explizit anzugeben und die dabei auftretenden totalen Ordnungen näher zu untersuchen.* Es ist leicht zu sehen, daß *ein* Weg sicher zur Lösung des Problems führt, der gleichzeitig der einzig mögliche sein dürfte, wenn man keine einschränkenden Voraussetzungen über M, F und P machen will: Man hat in der BOOLEschen Algebra B in üblicher Weise den Begriff des Ultrafilters Φ einzuführen. Dann zeigt sich zunächst, daß jedem Φ eine totale Ordnung $\mathfrak{T}_\Phi$ von F entspricht. Die $\tilde{\mathfrak{T}}_\Phi$ wiederum liefern ein System von totalen Ordnungen $\tilde{\mathfrak{T}}_\Phi$ von $\tilde{F}$, dessen Konjunktion gerade $\tilde{\mathfrak{O}}$ ist (§ 3). Damit ist jedenfalls eine wichtigere Reduktion gewonnen. Man ist gewissermaßen von $\tilde{F}$ auf M zurückgekommen. Aber gleichzeitig erhebt sich sofort eine weitere Frage, nämlich die nach einer genaueren Beschreibung der Ultrafilter Φ, die die Grundlage für die Lösung des Konjunktionsproblems bilden. Eine eingehende Diskussion des Sinnes dieser Frage, die in § 2 vorweggenommen wird, führt im Falle einer abzählbaren Menge M_0 auf die *Vermutung der Äquivalenz aller nichttrivialen Ultrafilter*, die allerdings nur plausibel gemacht werden kann[1]). Denn ein strenger Beweis müßte voraussichtlich eine *explizite Darstellung* der Ultrafilter benützen, und eine genauere Überlegung zeigt, daß eine solche Darstellung zwar nicht geradezu als unmöglich anzusehen ist, daß aber ihre Konstruktion ungewöhnliche Schwierigkeiten machen dürfte, da kein nichttrivialer Ultrafilter eine abzählbare Basis besitzt. — Glücklicherweise ist auch ohne eine explizite Darstellung der Ultrafilter Φ eine genauere Untersuchung der durch sie definierten totalen Ordnungen $\mathfrak{T}_\Phi$ in weitem Umfange möglich (§ 4). Es zeigt sich, daß im allgemeinen für die zu einer $\mathfrak{T}_\Phi$ gehörigen natürlichen Topologie keinerlei Abzählbarkeitsaxiom gilt. — In § 5 wird an drei einfachen Beispielen kurz eine naheliegende und vor allem durch den Zusammenhang mit der Integrationstheorie bemerkenswerte Methode erläutert, mit deren Hilfe bei vielen speziellen Gruppen $\tilde{F}$ das Konjunktionsproblem ohne Rückgriff auf die Ultrafilter gelöst werden kann. In § 6 wird unter Beschränkung auf das Musterbeispiel $F = G_0$ gezeigt, daß aus einer einzigen totalen, einer trivialen Bedingung genügenden Ordnung $\tilde{\mathfrak{T}}_0$ von $\tilde{F}$ stets ein System von totalen Ordnungen $\tilde{\mathfrak{T}}_\varrho$ „gleichen Typs" abgeleitet werden kann, dessen Konjunktion gerade die natürliche Ordnung $\tilde{\mathfrak{O}}$ wird, sofern nur die $\tilde{F}$ definierende Menge P eine abzählbare Basis besitzt. — In § 7 handelt es sich nicht mehr um das Konjunktionsproblem. Es wird untersucht, wann in einer Gruppe $\tilde{F}$ jede nach unten beschränkte Folge $\tilde{f}_i$ eine untere Grenze hat. § 8 verallgemeinert den bekannten Satz, daß die Gruppe G_0 des Musterbeispiels kein freier $\mathfrak{Z}$-Modul ist. Es wird dabei an Stelle von G_0 die als $\mathfrak{Z}$-Modul aufgefaßte Gruppe M aller Funktionen auf einer beliebigen unendlichen Menge M betrachtet, bei denen die Funktionswerte einem beliebigen echten Integritätsbereich $\mathfrak{Z}$ entnommen sind.

[1]) In der Tat ist die Äquivalenzvermutung falsch, vgl. den Zusatz bei der Korrektur am Schlusse der Arbeit.

§ 1. Bezeichnungen[2])

Es werden additiv geschriebene Abelsche Gruppen $G, H, \ldots$ mit Elementen $f, g, \ldots$ und den Einheitselementen o betrachtet. Unter einer *Unterhalbgruppe* O von G verstehen wir eine von G selbst verschiedene, additiv abgeschlossene o enthaltende Untermenge. Die Unterhalbgruppe $O = T$ heißt *T-Halbgruppe*, wenn von zwei Elementen $f, -f$ aus G stets mindestens eines zu T gehört. Von einer *Ordnung* $\mathfrak{O}$ von G wird gesprochen, wenn für gewisse (aber nicht für alle) Elementepaare f, g eine transitive Beziehung $f > g$ definiert ist, derart daß stets $f > f$, und daß aus $f > g$ immer $x + f > x + g$ für alle $x \in G$ folgt. Ist gleichzeitig $f > g$, $g > f$, so nennen wir f und g *ordnungsgleich* (hinsichtlich $\mathfrak{O}$). Die Ordnung $\mathfrak{O}$ heißt *streng*, wenn zwei verschiedene Elemente aus G niemals ordnungsgleich sind, sie heißt *total*, wenn für jedes Elementepaar f, g aus G immer mindestens eine der beiden Relationen $f > g$, $g > f$ gilt. *Positiv* in $\mathfrak{O}$ wird f genannt, wenn $f > 0$; ein *echt* positives Element ist ein positives, zu o nicht ordnungsgleiches Element. — Die Menge aller positiven Elemente bildet eine Unterhalbgruppe O von G, „*die* zu $\mathfrak{O}$ gehörige Halbgruppe"; ist umgekehrt $\mathfrak{O}$ eine beliebige Unterhalbgruppe von G und setzt man fest, daß dann und nur dann $f > g$ sein soll, wenn $f - g \in O$, so erhält man eine Ordnung $\mathfrak{O}$ von G, die gerade O als zugehörige Halbgruppe besitzt. Ordnungen und Unterhalbgruppen von G entsprechen also einander umkehrbar eindeutig. In der zu $\mathfrak{O}$ gehörigen Halbgruppe O bildet die Menge aller zu o ordnungsgleichen Elemente die größte Untergruppe H_O. In der Restklassengruppe G/H_O definiert die Unterhalbgruppe O/H_O eine *strenge* Ordnung, die mit $\mathfrak{O}/H_O$ bezeichnet wird. Die Gruppe G ist dann und nur dann die kleinste O umfassende Gruppe [also gleich der Menge aller Differenzen $f - g$ $(f \in O, g \in O)$], wenn zu jedem $h \in G$ ein $f \in O$ existiert, derart daß $f > h$ in der durch O bestimmten Ordnung $\mathfrak{O}$. Im folgenden nehmen wir stillschweigend an, daß diese Bedingung stets erfüllt ist. — Die Ordnung $\mathfrak{O}$ ist dann und nur dann total, wenn die zugehörige Halbgruppe $O = T$ eine T-Halbgruppe darstellt. Gibt es für eine Halbgruppe O in G endlich oder unendlich viele T-Oberhalbgruppen T_τ, derart daß $O = \bigcap_\tau T_\tau$ wird, so nennt man die durch O definierte Ordnung $\mathfrak{O}$ die *Konjunktion* der durch die T_τ bestimmten totalen Ordnungen $\mathfrak{T}_\tau$. Es gilt der wohlbekannte Satz: $\mathfrak{O}$ *ist dann und nur dann Konjunktion von totalen Ordnungen* $\mathfrak{T}_\tau$, *wenn ein*

[2]) Analog wie BOURBAKI [1], aber im Gegensatz zu BIRKHOFF [1] reden wir schon dann von einer *geordneten* (und nicht nur einer halbgeordneten) Gruppe, wenn zwar für gewisse Elementepaare f, g eine Beziehung $f > g$ definiert ist, wenn es aber Paare f, g gibt, bei denen weder $f > g$ noch $g > f$. Auch sonst schließen wir uns terminologisch möglichst an BOURBAKI an. Man beachte aber folgende wichtige Unterschiede: a) Wir lassen die Möglichkeit zu, daß für gewisse Elementepaare $f, g \neq f$ sowohl $f > g$ als auch $g > f$. Eine Ordnung im Sinne des Textes ist also im Sinne von BOURBAKI unter Umständen nur eine „Vorordnung" (préordre). — b) Wir sprechen z. B. von „reellwertigen Funktionen auf M" und nicht von „Abbildungen von M in die Additionsgruppe der reellen Zahlen". (Dabei bezeichnen wir allerdings eine Funktion an sich immer nur durch einen einzelnen Buchstaben $f, g, \ldots$ ohne beigefügtes Argument. $f(\mu), g(\lambda), \ldots$ wird nur geschrieben, wenn der Funktionswert an der festen Stelle $\mu, \lambda, \ldots$ gemeint ist.)

Element $f \in G$ stets positiv ist, falls $n \cdot f > 0$ für hinreichend großes ganz positives n [3]).

Es sei jetzt M eine beliebige Menge von „Argumentwerten" oder „Indizes" μ und es bedeute R bzw. G die additive Gruppe aller überall auf M eindeutig definierten *reellwertigen* bzw. *ganzzahligen* Funktionen; mit F bezeichnen wir eine nicht weiter festgelegte Untergruppe von R oder G. — Ist f eine beliebige Funktion aus F, so bedeute $\Lambda(f)$ bzw. $\Lambda^-(f)$ bzw. $\Lambda(f \neq 0)$ die Menge aller der $\mu \in \mathsf{M}$, für die $f(\mu) \geq 0$ bzw. $f(\mu) < 0$ bzw. $f(\mu) \neq 0$. In entsprechendem Sinne sind Bezeichnungen wie $\Lambda(f > n)$, $\Lambda(f > g)$, ... aufzufassen. Unter O verstehen wir stets diejenige Unterhalbgruppe von F, die aus allen Funktionen f mit $\Lambda(f) = \mathsf{M}$, $\Lambda^-(f) = \emptyset$ [4]) besteht. Die durch O bestimmte, natürliche Ordnung $\mathfrak{O}$ kann offenbar auch so eingeführt werden: „$f > g$ dann und nur dann, wenn $f(\mu) \geq g(\mu)$ für alle $\mu \in \mathsf{M}$." Man sieht sofort, daß $\mathfrak{O}$ die Bedingung „$n \cdot f > 0 \rightarrow f > 0$" erfüllt, daß also $\mathfrak{O}$ als Konjunktion von totalen Ordnungen und dementsprechend O als Durchschnitt von T-Halbgruppen dargestellt werden kann. Die explizite Angabe von solchen Darstellungen ist das Hauptproblem der nächsten Paragraphen.

§ 2. Filter und Antifilter [5])

Es sei M eine beliebige unendliche Menge, B das System aller Untermengen von M. Ein Teilsystem Ψ von B soll wie üblich *Filter* genannt werden, wenn mit Λ_1, Λ_2 stets auch $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ und jede Obermenge von $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ zu Ψ gehört, wenn aber $\emptyset \notin \Psi$. *Ultrafilter* soll $\Psi = \Phi$ heißen, wenn zusätzlich folgende Bedingung erfüllt ist: Aus $\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2$, $\mathsf{M}_1 \notin \Phi$ folgt stets $\mathsf{M}_2 \in \Phi$. — Dual dazu bezeichnen wir ein M selbst nicht enthaltendes Teilsystem P von B als *Antifilter*, wenn mit Λ_1, Λ_2 immer auch $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ und jede Untermenge von $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ in P liegt. $\mathsf{P} = \Pi$ wird *Antiultrafilter* genannt, wenn aus $\emptyset = \mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2$, $\mathsf{M}_2 \notin \Pi$ immer $\mathsf{M}_1 \in \Pi$ folgt.

Es gelten dann die im wesentlichen bekannten und im übrigen mühelos zu verifizierenden Sätze: *Ist Ψ ein Filter, so ist das komplementäre System aller Mengen $\mathsf{M} - \Lambda$ ($\Lambda \in \Psi$) ein Antifilter P und umgekehrt. Dabei ist dann und nur dann $\Psi = \Phi$ ein Ultrafilter, wenn $\mathsf{P} = \Pi$ einen Antiultrafilter darstellt.* $\Psi = \Phi$ ist dann und nur dann ein Ultrafilter, wenn der komplementäre Antifilter $\mathsf{P} = \Pi$ aus *allen* nicht in Ψ liegenden Untermengen von M besteht, $\mathsf{P} = \mathsf{B} - \Psi$; entsprechend umgekehrt. — Treten im folgenden Ψ und P bzw.

[3]) Zum Beweis des Konjunktionssatzes vgl. LORENZEN [1], § 4.

[4]) $\emptyset$ bedeutet stets die leere Menge.

[5]) Bei der Einführung von Filtern und Ultrafiltern schließen wir uns im wesentlichen an BOURBAKI [3] an. Auch unsere „Antifilter" können als Filter im Sinne BOURBAKIS gedeutet werden. Die an sich vielleicht näher liegende Bezeichnung „Dualfilter" wurde vermieden, um sachlich nicht gerechtfertigte Assoziationen mit dem „Moduldual" auszuschließen. Bei Satz 1 von § 2 und den anschließenden Betrachtungen haben wir uns sehr kurz gefaßt, da es sich im wesentlichen um bekannte Dinge handelt, — zur BOOLEschen Algebra vgl. etwa BIRKHOFF [1] —, die also des Zusammenhangs wegen nicht ausgelassen werden konnten. Ebenso wurde die Klassifikation der Filter mit abzählbarer Basis möglichst knapp behandelt. Denn sie war nur nötig, um die Bedeutung des Problems der Ultrafilternormalform schärfer herauszuarbeiten.

Φ und Π gekoppelt auf, so bedeutet stets $\mathfrak{P}$ bzw. Π den zu dem Filter bzw. Ultrafilter Ψ bzw. Φ komplementäre Antifilter bzw. Antiultrafilter.

Satz 1. *Es sei* $\mathfrak{P}$ *ein Antifilter aus* $\mathfrak{B}$ *und* Ψ' *irgendein zu* $\mathfrak{P}$ *elementefremder Filter. Dann gibt es stets ein komplementäres Paar* Π, Φ *derart, daß der Antiultrafilter* Π *bzw. der Ultrafilter* Φ *einerseits* $\mathfrak{P}$ *bzw.* Ψ' *umfaßt und andererseits zu* Ψ' *bzw.* $\mathfrak{P}$ *elementefremd ist. (Grenzfälle* $\mathfrak{P}=\{\emptyset\}$ *bzw.* $\Psi=\{\mathfrak{M}\}$ *eingeschlossen.)*

Will man den Beweis von Satz 1 nicht direkt führen, sondern aus der Idealtheorie ableiten, so hat man nur zu beachten: Es sei B die zu $\mathfrak{M}$ gehörige BOOLE*sche Algebra*, d.h. der Ring aller Funktionen $a, b, \ldots$ auf $\mathfrak{M}$ mit Werten aus dem Primkörper K_2 der Charakteristik 2. Ordnet man jedem $\mathfrak{N}\in\mathfrak{B}$ die durch $a(\mu)=1$ $(\mu\in\mathfrak{N})$; $a(\mu)=0$ $(\mu\notin\mathfrak{N})$ definierte Funktion $a\in B$ zu, so entsteht eine kanonische Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf B und es gilt, falls $\mathfrak{N}_i\leftrightarrow a_i$ $(i=1,2)$:

$$(1)\qquad \mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2\leftrightarrow a_1\cdot a_2;\qquad (\mathfrak{N}_1\cup\mathfrak{N}_2)-(\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2)\leftrightarrow a_1+a_2.$$

Aus (1) folgt mühelos: Ein Teilsystem $\mathfrak{J}\neq B$ von B ist dann und nur dann ein Ideal, wenn das Bild $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{J}$ ein Antifilter ist. $\mathfrak{J}=\mathfrak{P}$ ist dann und nur dann ein Primideal, wenn $\mathfrak{P}=\Pi$ einen Antiultrafilter darstellt. Beim Übergang von $\mathfrak{B}$ zu B erscheint Satz 1 als ein Spezialfall des folgenden allgemeinen Theorems der Idealtheorie: Ist $\mathfrak{J}$ ein Ideal, M ein zu $\mathfrak{J}$ elementefremdes, multiplikativ abgeschlossenes System, so gibt es immer ein zu M elementefremdes Primoberideal von $\mathfrak{J}$.

Bei den weiteren Betrachtungen bevorzugen wir die Filter und Ultrafilter. Die Übertragung der Ergebnisse auf Antifilter und Antiultrafilter erfordert nur eine triviale Dualisierung. Eine eindeutig umkehrbare Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf sich selbst, soll kurz *Permutation* genannt werden. Zwei Filter Ψ_1 und Ψ_2 sollen *äquivalent* heißen, wenn eine Permutation von $\mathfrak{M}$ existiert, die Ψ_1 in Ψ_2 überführt. Wir sagen, eine Untermenge $\{\ldots,\mathfrak{N}_\tau,\ldots\}$ von $\mathfrak{B}$ bilde eine *Basis* von Ψ und schreiben $\Psi=(\ldots,\mathfrak{N}_\tau,\ldots)$, wenn Ψ aus den $\mathfrak{N}_\tau$ und ihren sämtlichen Obermengen besteht. Besitzt Ψ eine endliche bzw. abzählbare Basis, so nennen wir Ψ selbst *endlich* bzw. *abzählbar*. Für endliche Filter erhält man mühelos die Sätze:

1. Ψ ist dann und nur dann *endlich*, wenn $\Psi=(\mathfrak{N})$ eine *eingliedrige Basis* hat.

2. $\Psi=(\mathfrak{N})$ ist dann und nur dann ein *Ultrafilter* $\Psi=\Phi$, wenn $\mathfrak{N}=\{\mu\}$ nur aus einem einzigen Element μ besteht.

3. Zwei endliche Filter $\Psi_1=(\mathfrak{N}_1)$, $\Psi_2=(\mathfrak{N}_2)$ sind dann und nur dann *äquivalent*, wenn nicht nur $\mathfrak{N}_1$ *und* $\mathfrak{N}_2$ sondern auch $\mathfrak{M}-\mathfrak{N}_1$ *und* $\mathfrak{M}-\mathfrak{N}_2$ die *gleiche Mächtigkeit* besitzen.

Zu 1. beachte man: Ist $\Psi=(\mathfrak{N}_1,\ldots,\mathfrak{N}_n)$, so muß nach Definition des Filters $\mathfrak{N}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{N}_n$ gleich einer der Mengen $\mathfrak{N}_i$ sein. Dann wird aber schon $\Psi=(\mathfrak{N}_i)$. — Bei 2. ist das „dann" trivial. Für das „nur dann" ist zu überlegen: Ist $\mathfrak{N}$ Vereinigungsmenge der elementefremden Untermengen $\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2$, so muß in einem $\mathfrak{N}$ enthaltenden Ultrafilter Φ wegen $\mathfrak{M}=((\mathfrak{M}-\mathfrak{N})\cup\mathfrak{N}_1)\cup\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1=((\mathfrak{M}-\mathfrak{N})\cup\mathfrak{N}_1)\cap\mathfrak{N}$ immer auch eine der Mengen $\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2$ auftreten. —

3. Folgt einfach aus der Bemerkung, daß N_1 dann und nur dann durch eine Permutation von M in N_2 übergeführt wird, wenn die Bedingung von 3. erfüllt ist. Die (nach 3. sämtlich äquivalenten) Ultrafilter $\Phi=(\{\mu\})$ sollen als *triviale Ultrafilter* bezeichnet werden. Aus den beim Beweise von 2. benutzten Überlegungen folgt leicht das wichtige *Kriterium für triviale Ultrafilter:*

Jeder Ultrafilter, der eine endliche Menge enthält, ist trivial.

Als Vorbereitung für das Studium der nichttrivialen Ultrafilter untersuchen wir die abzählbaren (aber nicht endlichen) Filter, obwohl, wie sich zeigen wird, kein Ultrafilter zu dieser Klasse gehört. Es sei $\Psi=(\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots)$ und es bedeute Δ den wegen $\Psi \neq (\Delta)$ sicher nicht zu Ψ gehörigen Durchschnitt aller N_i; mit B_Δ möge die Menge aller Untermengen von $\mathsf{M}-\Delta$ bezeichnet werden. Dann bildet das System aller Mengen $\mathsf{N}-\Delta$ $(\mathsf{N}\in\Psi)$ einen Filter Ψ_Δ in B_Δ mit der Basis $(\mathsf{N}_1-\Delta, \mathsf{N}_2-\Delta, \ldots)$, und man überlegt sich ohne Schwierigkeit den *Hilfssatz:*

Die abzählbaren Filter $\Psi_i=(\mathsf{N}_{i1}, \mathsf{N}_{i2}, \ldots)$ $(i=1, 2)$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn für $\Delta_i=\bigcap_k \mathsf{N}_{ik}$ sowohl Δ_1 und Δ_2 als auch $\mathsf{M}-\Delta_1$ und $\mathsf{M}-\Delta_2$ gleiche Mächtigkeit haben und wenn gleichzeitig eine (und damit jede) Permutation von M, die Δ_1 in Δ_2 überführt, den Filter Ψ_{Δ_1} aus B_{Δ_1} auf einen zu Ψ_{Δ_2} äquivalenten Filter Ψ'_{Δ_2} aus B_{Δ_2} abbildet.

Auf Grund des Hilfssatzes braucht man im wesentlichen nur solche abzählbaren Filter $\Psi=(\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots)$ zu betrachten, bei denen $\bigcap_k \mathsf{N}_k=\emptyset$. Man könnte meinen, daß diese Filter zum mindesten bei abzählbaren M alle äquivalent sind. In der Tat aber gilt:

Satz 2. *Es gibt im Falle einer abzählbaren Menge* $\mathsf{M}=\mathsf{M}_0=\{1, 2, 3, \ldots\}$ *drei verschiedene Klassen äquivalenter Filter* $\Psi=(\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots)$ *mit* $\bigcap_k \mathsf{N}_k=\emptyset$. *Normalformen für die drei Klassen ergeben sich bei folgender Wahl der* N_k:

1. $\mathsf{N}_k=\{2^{k-1}\cdot 1,\ 2^{k-1}\cdot 2,\ 2^{k-1}\cdot 3, \ldots\}$ $\quad (k=1, 2, \ldots)$;
2. $\mathsf{N}_k=\{k,\ k+1,\ k+2, \ldots\}$ $\quad (k=1, 2, \ldots)$;
3. $\mathsf{N}_1=\mathsf{M}, \mathsf{N}_k=\{2\cdot(k-1),\ 2\cdot k,\ 2\cdot(k+1), \ldots\}$ $\quad (k=2, 3, \ldots)$.

Man setze $\Lambda_k=\mathsf{N}_1\cap\cdots\cap\mathsf{N}_k$. Dann wird $\Psi=(\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots)=(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$, $\Lambda_k\geqq\Lambda_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots)$; außerdem müssen unendlich viele Λ_k verschieden sein, da Ψ nicht endlich. Man darf also von vornherein $\Lambda_k\supset\Lambda_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots)$ annehmen; ferner darf und soll $\Lambda_1=\mathsf{M}$ vorausgesetzt werden. Wir unterscheiden drei Fälle: 1. Unendlich viele Differenzmengen $\Lambda_k-\Lambda_{k+1}$ sind unendlich. Hier gewinnt man durch Weglassen passender Λ_k eine Basis $\mathsf{M}=(\Lambda'_1, \Lambda'_2, \ldots)$, bei der alle Differenzmengen $\Lambda'_k-\Lambda'_{k+1}$ unendlich sind. 2. Alle Mengen $\Lambda_k-\Lambda_{k+1}$ sind endlich. Hier kommt man durch Einführung von Zwischengliedern zu einer Basis $\mathsf{M}=(\Lambda'_1, \Lambda'_2, \ldots)$, bei der $\Lambda'_k-\Lambda'_{k+1}$ stets aus genau einem Element besteht. 3. Endlich viele Differenzmengen $\Lambda_k-\Lambda_{k+1}$ sind unendlich. Hier ergibt sich durch Weglassung und Einschaltung von Gliedern eine Basis $\mathsf{M}=(\Lambda'_1, \Lambda'_2, \ldots)$, bei der $\Lambda'_1-\Lambda'_2$ unendlich, während $\Lambda_k-\Lambda_{k+1}$, für $k\geqq 2$ immer aus genau einem Element besteht. —

Daß alle Filter des Typus 1. bzw. 2. bzw. 3. zu der in Satz 2 angegebenen Normalform 1. bzw. 2. bzw. 3. äquivalent sind, ist mühelos zu verifizieren. Um einzusehen, daß die Äquivalenzklassen 1., 2., 3. verschieden sind, beachte man: Im Falle 2. ist $\mathfrak{M}-\mathfrak{N}$ endlich für alle $\mathfrak{N}\in\Psi$. Diese Bedingung ist weder bei 1. noch bei 3. erfüllt. Im Falle 3. existiert ein $\mathfrak{N}^*\in\Psi$, derart daß $\mathfrak{N}^*-(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}^*)$ endlich für alle $\mathfrak{N}\in\Psi$; im Falle 1. gibt es kein solches $\mathfrak{N}^*$.

Wir wenden uns jetzt zu den nichttrivialen Ultrafiltern. Bei einem nichttrivialen Ultrafilter Φ ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{N}\in\Phi$ stets leer. Denn es kann ja Φ nicht Teilsystem eines nichttrivialen Ultrafilters sein. Wir zeigen weiter:

Kein nichttrivialer Ultrafilter ist abzählbar. Die Menge aller nichttrivialen Ultrafilter ist überabzählbar.

Wäre Φ abzählbar, so existierte nach den bei Satz 2 angestellten Überlegungen eine Basis $(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$ mit $\Lambda_k > \Lambda_{k+1}$, und wir hätten dabei $\bigcap_k \Lambda_k = \emptyset$. Setzen wir weiter $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{M} - \Lambda_1$, $\mathfrak{N}_k = \Lambda_k - \Lambda_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \cup \mathfrak{N}_2 \cup \mathfrak{N}_4 \cup \cdots$, $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_3 \cup \mathfrak{N}_5 \cup \cdots$, so ergibt sich aus $\bigcap_k \Lambda_k = \emptyset$ leicht $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cup \overline{\mathfrak{N}}$. Es muß also entweder $\mathfrak{N}$ oder $\overline{\mathfrak{N}}$ zu Φ gehören, obwohl keine dieser beiden Mengen ein Λ_k enthält. Das heißt $\Phi \neq (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$. — Die Existenz von überabzählbar vielen nichttrivialen Ultrafiltern folgt leicht aus der Bemerkung: Ist $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ eine beliebige Mengenfolge mit $\Lambda_k > \Lambda_{k+1}$, $\bigcap_k \Lambda_k = \emptyset$, so gibt es nach Satz 1 stets einen $(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$ umfassenden, wegen $\bigcap_k \Lambda_k = \emptyset$ nichttrivialen Ultrafilter[6]). — Um zu einer ersten, groben Einteilung der nichttrivialen Ultrafilter zu kommen, definieren wir: Dem Ultrafilter Φ soll die *Minimalmächtigkeit* $\aleph$ zugeschrieben werden, wenn Φ zwar Mengen der Mächtigkeit $\aleph$ aber keine Mengen einer kleineren Mächtigkeit als $\aleph$ enthält. Es ist dann selbstverständlich, daß Ultrafilter verschiedener Minimalmächtigkeit niemals äquivalent sind. Weiter gilt:

Satz 3. *Ist $\aleph^*$ die Mächtigkeit von $\mathfrak{M}$, so gibt es für jedes zwischen $\aleph_0$ und $\aleph^*$ liegende $\aleph$ nichttriviale Ultrafilter der Minimalmächtigkeit $\aleph$. (Grenzen $\aleph_0$ und $\aleph^*$ eingeschlossen.)*

Der Beweis folgt leicht aus Satz 1. Man wähle dort für $\mathfrak{P}$ den Antifilter aller der Untermengen $\mathfrak{M}$, die eine kleinere Mächtigkeit als $\aleph$ besitzen. Für Ψ' wähle man eine geeignete Menge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ und alle ihre Obermengen. — Nach Satz 3 gibt es bei überabzählbarem $\mathfrak{M}$ also für $\aleph^* > \aleph_0$ immer nicht äquivalente, nichttriviale Ultrafilter. Wir wenden uns jetzt speziell zu dem abzählbaren Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 = \{1, 2, \ldots\}$. Hier kann man zwei nichttriviale Ultrafilter sicher nicht mehr nach dem Typus der in ihnen auftretenden *Mengen* unterscheiden. Denn jede in einem nichttrivialen Ultrafilter vorkommende Menge hat ja die Mächtigkeit $\aleph_0$. Man könnte aber daran denken,

[6]) Genauer: Man kann zu $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ stets eine Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $\emptyset = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ finden, derart daß alle Durchschnitte $\Lambda_{ik} = \Lambda_i \cap \mathfrak{M}_k$ $(i = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2)$ unendlich. Dann aber bilden $\Lambda_{1k}, \Lambda_{2k}, \ldots$ zusammen mit allen Obermengen einen Filter Ψ_k $(k = 1, 2)$ und es gibt nach Satz 1 je einen Ψ_k umfassenden Ultrafilter Φ_k $(k = 1, 2)$. Dabei hat man $\Phi_1 \neq \Phi_2$ wegen $\mathfrak{M}_1 \in \Phi_1$, $\mathfrak{M}_2 \notin \Phi_1$; $\mathfrak{M}_1 \notin \Phi_2$, $\mathfrak{M}_2 \in \Phi_2$.

die *abzählbaren Filter*, deren Struktur wir bereits beherrschen, zur Klassifikation der nichttrivialen Ultrafilter heranzuziehen. Daß auch dieser Versuch scheitern muß, zeigt:

Satz 4. *In jedem nichttrivialen Ultrafilter Φ sind unendlich viele abzählbare Filter Ψ enthalten, die einer beliebig vorgeschriebenen Äquivalenzklasse angehören.*

Wir bemerken zunächst: Es sei Δ eine beliebige nicht zu Φ gehörige Untermenge von M mit unendlichem Komplement $\mathsf{M}-\Delta$, und es bedeute Ψ den Filter aller der zu Φ gehörigen Obermengen von Δ. Dann bildet, wie leicht zu sehen, der oben bei der Formulierung des Hilfssatzes eingeführte Filter Ψ_Δ einen *nichttrivialen Ultrafilter* in B_Δ. Unter diesen Umständen genügt es beim Beweise von Satz 4 offenbar, abzählbare Filter $(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$ mit $\bigcap_k \Lambda_k = \emptyset$ zu betrachten, d.h. es ist nur zu zeigen, daß Φ unendlich viele Filter der Typen 1., 2., 3. von Satz 2 enthält. — Aus der Ultrafiltereigenschaft von Φ schließt man nun z.B. mühelos: Es gibt in Φ einen abzählbaren Filter $(\Lambda'_1, \Lambda'_2, \ldots)$, bei dem durchweg $\Lambda'_k \supset \Lambda'_{k+1}$ mit $\Lambda'_k - \Lambda'_{k+1}$ unendlich. Ist ferner $\bigcap_k \Lambda'_k = \{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$, so gehören, da Φ keine endliche Menge enthält, zu Φ auch die Mengen $\Lambda_1 = \Lambda'_1 = \mathsf{M}$, $\Lambda_k = \Lambda'_k - \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-1}\}$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Es enthält also Φ in Gestalt von $(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$ einen abzählbaren Filter des Typus 1. im Sinne von Satz 2. Ebenso leicht zeigt man, daß in Φ abzählbare Filter der Typen 2. und 3. vorkommen müssen. Auch daß unendlich viele Filter der drei Typen in Φ auftreten, ergibt sich sofort aus der Art der Konstruktion.

Satz 4 läßt sich anschaulich geometrisch deuten. Sei $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{A}$ die Menge aller nichttrivialen Ultrafilter bzw. aller abzählbaren Filter. Ist Φ beliebig aus $\mathfrak{R}$, so ordnen wir jedem in Φ enthaltenen Filter Ψ aus $\mathfrak{A}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$ zu durch die Festsetzung: $\Phi_1 \in \mathfrak{R}$ gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$, wenn Ψ Teilsystem von Φ_1 ist. Man sieht dann sofort, daß $\mathfrak{R}$ so zu einem HAUSDORFF*schen Raum* wird, in dem die vier grundlegenden Axiome (einschließlich des Trennungsaxioms) erfüllt sind, und daß darüber hinaus der *a-Durchschnittssatz* gilt: Der Durchschnitt abzählbar vieler Umgebungen $\mathfrak{U}_{\Psi_k}(\Phi)$ eines festen Punktes Φ ist stets selbst wieder eine Umgebung $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$. (Man beachte, daß der kleinste gemeinsame Oberfilter abzählbar vieler Ψ_k aus $\mathfrak{A}$ stets selbst wieder zu $\mathfrak{A}$ gehört.) Satz 4 läßt sich nun offenbar in topologischer Fassung so ausdrücken:

Satz 4*. *Bei jedem Ultrafilter Φ aus $\mathfrak{R}$ gibt es in jeder Umgebung $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$ einen Ultrafilter Φ'_1, der zu einem beliebig vorgegebenen Ultrafilter Φ_1 aus $\mathfrak{R}$ äquivalent ist.*

[Um bei fester Umgebung $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$ einen Φ'_1 der gewünschten Art zu gewinnen, gehe man aus von einem nach Satz 4 in Φ_1 enthaltenen zu Ψ äquivalenten Filter Ψ_1. Jede Permutation von M, die Ψ_1 in Ψ überführt, bildet Φ_1 auf einen Φ'_1 ab.] — Satz 4 führt, vor allem in der anschaulichen Fassung 4*, zwanglos auf die folgende *Äquivalenzvermutung:*

Bei abzählbarem M sind alle nichttrivialen Ultrafilter äquivalent[1]).

Allerdings muß man sich klar sein, daß die Überlegungen, die zur Aufstellung der Äquivalenzvermutung führten, für ihren *Beweis* noch keineswegs eine ausreichende Grundlage bilden. Auch der für $\mathfrak{R}$ gültige a-Durchschnittssatz hilft nichts. Denn da kein Ultrafilter abzählbar ist, gilt in $\mathfrak{R}$ bei unserer Topologisierung auch das schwächere HAUSDORFFsche Abzählbarkeitsaxiom nicht[7]). — Was man zu einem strengen Beweis der Äquivalenzvermutung wahrscheinlich brauchen wird, ist (immer für *abzählbares* M) eine *Ultrafilternormalform*. Dabei wäre folgende Definition zugrunde zu legen: Eine Ultrafilternormalform ist eine wohlbestimmte, eindeutige Abbildung einer passenden Indexmenge I in B derart, daß die Bilder N_ι aller $\iota \in I$ entweder in ihrer Gesamtheit gerade einen Ultrafilter konstituieren (Normalform in schärferem Sinne) oder zusammen mit ihren sämtlichen Obermengen einen Ultrafilter bilden (Normalform in weiterem Sinne). Die Indexmenge I kann dabei jedenfalls nicht wohlgeordnet sein. Denn ein Ultrafilter hat ja keine abzählbare Basis und von den Ordnungszahlen beherrscht man nicht einmal die volle zweite Zahlklasse. Den richtigen Fingerzeig liefert wohl die Bemerkung, daß ein Ultrafilter Φ und B selbst offenbar als Systeme von Untermengen von M die gleiche Mächtigkeit besitzen. Man wird dementsprechend B als Indexmenge wählen oder noch zweckmäßiger B, da ja die Elemente von B (als Funktionen auf M mit Werten aus K_2 oder auch als dyadische Brüche) eine unmittelbar anschauliche Darstellung besitzen. Damit kommt man bei Benutzung des schärferen Normalformbegriffs zu dem folgenden präzisen *Normalformproblem:*

Es soll (bei abzählbarem M*) eine Abbildung von* B *in* B *gefunden werden, die die Eigenschaft besitzt, daß die Bildmenge in* B *gerade einen nichttrivialen Ultrafilter darstellt.*

Allerdings dürfte das Normalformenproblem alles andere als einfach sein, und ein Weg zu seiner Lösung ist vorerst nicht zu sehen. Aber man kann wohl kaum bestreiten, daß seine Formulierung äußerst naheliegt, sobald man gezwungen wird, systematisch mit nichttrivialen Ultrafiltern zu arbeiten.

§ 3. Die Gruppen $\tilde{F}_P$ und ihr Konjunktionsproblem

Es sei M eine beliebige Argumentmenge. F sei eine auf M definierte Funktionenmenge im Sinne von § 1. Um gewisse Beschränkungen, die wir F gelegentlich auferlegen müssen, bequem formulieren zu können, setzen wir fest: Ist N irgendeine Untermenge von M, so bedeute $H(\mathsf{N})$ die Menge aller der $f \in F$, für die $f(\mu) = 0$ $(\mu \in \mathsf{M} - \mathsf{N})$. Ferner werde für jedes $f \in F$ durch $\tilde{f}(\mu) = f(\mu)$ $(\mu \in \mathsf{N})$ eine Funktion $\tilde{f}$ auf der Argumentmenge N erklärt. Die

[7]) Es seien nämlich $\mathfrak{U}_{\Psi_i}(\Phi)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ abzählbar viele Umgebungen von Φ. Dann ist der kleinste gemeinschaftliche Oberfilter Ψ aller Ψ_i ebenso wie die Ψ_i selbst abzählbar und $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi) = \cap_i \mathfrak{U}_{\Psi_i}(\Phi)$. Da Ψ eine Basis $A_1 > A_2 > \cdots$ besitzt, wobei alle A_i unendlich wegen $\Psi < \Phi$, kann man [wie leicht zu sehen auch für $\cap_i A_i \neq \emptyset$] nach der Methode von [5]) zwei Ψ umfassende abzählbare Filter Ψ', Ψ'' konstruieren, derart daß $\Psi' < \Phi$, $\Psi'' \not< \Phi$. Dann aber liegt jeder Ultrafilter $\Phi'' > \Psi''$ zwar in $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$ aber nicht in $\mathfrak{U}_{\Psi''}(\Phi)$, es ist also $\mathfrak{U}_{\Psi''}(\Phi)$ echte Untermenge von $\mathfrak{U}_\Psi(\Phi)$.

Zuordnung $f \to \tilde{f}$ definiert dann einen kanonischen Homomorphismus von F auf eine gewisse Funktionengruppe $\tilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ mit der Argumentmenge N, die als die *Restriktion von F auf* N bezeichnet werden soll. Bei dem Homomorphismus $F \to \tilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ wird $H(\mathsf{N})$ im allgemeinen nur *in* $\tilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ abgebildet; wir wollen nun F *r-zerlegbar* (restriktionszerlegbar) nennen, wenn für jedes N stets $F \to \tilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ die Gruppe $H(\mathsf{N})$ *auf* $\tilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ abbildet. Offenbar gilt: F ist dann und nur dann r-zerlegbar, wenn F für jede Untermenge N von M gleichzeitig mit einer beliebigen Funktion f stets auch die durch $f_{\mathsf{N}}(\mu) = f(\mu)$ $(\mu \in \mathsf{N})$, $f_{\mathsf{N}}(\mu) = 0$ $(\mu \in \mathsf{M}-\mathsf{N})$ erklärte Funktion f_{N} enthält. — Daraus folgt weiter: Ist $\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2$, $\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2 = \emptyset$, so läßt sich die r-zerlegbare Gruppe F stets in kanonischer Weise isomorph auf die direkte Summe $\tilde{F}_{\mathsf{M}_1} \oplus \tilde{F}_{\mathsf{M}_2}$ abbilden. Die Zerlegung von M in zwei paarweise elementefremde Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$ liefert also mit Hilfe des Restriktionsprozesses eine direkte Zerlegung von F, — daher die Bezeichnung r-zerlegbar. — Als *endlich überdeckend* möge F bezeichnet werden, wenn sich in F endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ so bestimmen lassen, daß die Mengen $\Lambda^-(f_i)$ ganz M überdecken, $\mathsf{M} = \Lambda^-(f_1) \cup \cdots \cup \Lambda^-(f_n)$. Man beachte, daß die für uns besonders wichtigen Gruppen G und R (vgl. § 1) sowohl r-zerlegbar als auch endlich überdeckend sind.

Ist Ψ, P ein zusammengehöriges Filter-Antifilter-Paar aus B im Sinne von § 2, so bedeutet $F(\mathsf{P})$ bzw. O_Ψ die Gruppe aller $f \in F$ mit $\Lambda(f \neq 0) \in P$, $\Lambda(f = 0) \in \Psi$ bzw. die Halbgruppe aller $f \in F$ mit $\Lambda^-(f) \in \mathsf{P}$, $\Lambda(f) \in \Psi$ [8]). Ferner werde $\tilde{F}_{\mathsf{P}} = F/F(\mathsf{P})$ gesetzt. — Offenbar ist stets $F(\mathsf{P})$ die größte in $\tilde{O}_\Psi$ enthaltene Gruppe. Ist also $F(\mathsf{P}) \neq F$, so besteht $F(\mathsf{P})$ gerade aus allen und nur den Funktionen, die hinsichtlich der durch O_Ψ festgelegten Ordnung $\mathfrak{O}_\Psi$ dem Nullelement ordnungsgleich sind [9]). Was die Frage nach einer eventuellen Gleichung $F(\mathsf{P}) = F$ angeht, so überlegt man sich leicht:

Satz 5. *Es ist dann und nur dann $F(\mathsf{P})$ echte Untergruppe von F für alle P, wenn F endlich überdeckend ist.*

Wird nämlich $\mathsf{M} = \Lambda^-(f_1) \cup \cdots \cup \Lambda^-(f_n)$ für passende f_i, so enthält kein P alle $\Lambda^-(f_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, und es muß daher für jedes P mindestens ein f_i in $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ eine Restklasse $\tilde{f}_i \neq \tilde{o}$ erzeugen. — Ist andererseits F nicht endlich überdeckend, so bilden die sämtlichen Vereinigungsmengen $\Lambda^-(f_1) \cup \cdots \cup \Lambda^-(f_n)$ $(f_i \in F;\ n = 1, 2, \ldots)$ zusammen mit ihren Untermengen einen Antifilter P^*, und es wird $F = F(\mathsf{P}^*)$, weil P^* wegen $\Lambda(f \neq 0) = \Lambda^-(f) \cup \Lambda^-(-f)$ für jedes $f \in F$ die Menge $\Lambda(f \neq 0)$ enthält.

Sind Ψ und P trivial, besteht also Ψ aus einer Menge N und ihren Obermengen, P aus $\mathsf{M}-\mathsf{N}$ und den Untermengen von $\mathsf{M}-\mathsf{N}$, so sieht man sofort:

[8]) Daß wir $F(\mathsf{P})$ mit Hilfe des Antifilters P und O_Ψ mit Hilfe des komplementären Filters Ψ charakterisieren, könnte inkonsequent scheinen. Indessen beachte man: a) Bei einer Funktion f aus einer Untergruppe von F interessiert naturgemäß $\Lambda(f \neq 0)$ mehr als $\Lambda(f = 0)$. $\Lambda(f \neq 0)$ aber liegt bei $F(\mathsf{P})$ in P. — b) Bei einer hinsichtlich einer bestimmten Ordnung positiven Funktion f fragt man automatisch zuerst: Wo ist f *positiv* (bzw. nicht negativ)? Bei der zu O_Ψ gehörigen Ordnung $\mathfrak{O}_\Psi$ sind aber die positiven Funktionen f durch $\Lambda(f) \in \Psi$ und *nicht* durch $\Lambda(f) \in \mathsf{P}$ gekennzeichnet.

[9]) Zur Definition der Ordnungsgleichheit vgl. § 1.

$F(P)$ umfaßt alle und nur die Funktionen, die überall auf N verschwinden. $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ kann mit der oben mit $\tilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ bezeichneten Restriktionsgruppe von F auf N identifiziert werden. $\tilde{O}_\Psi = O_\Psi/F(\mathsf{P})$ ist diejenige Halbgruppe, die im Sinne von § 1 die natürliche Ordnung der Funktionengruppe $\tilde{F}_{\mathsf{P}} = \tilde{F}_{\mathsf{M}-\mathsf{N}}$ festlegt. — Diese Bemerkung zeigt einerseits, daß sich die Bildung der Restriktionsgruppen als ein Spezialfall der Bildung von Restklassengruppen mit Hilfe von Antifiltern P auffassen läßt. Andererseits läßt sie es als berechtigt erscheinen, wenn wir grundsätzlich in einer beliebigen Gruppe $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ die *natürliche Ordnung* $\tilde{\mathfrak{O}}_\Psi$ mit Hilfe der Halbgruppe $\tilde{O}_\Psi = O_\Psi/F(\mathsf{P})$ definieren. Ziehen wir es vor, statt von Restklassenbildung von der Einführung eines neuen Gleichheitsbegriffes zu reden, so kommt offenbar der Übergang von F und $\mathfrak{O}$ zu $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ und $\tilde{\mathfrak{O}}_\Psi$ auf die folgende Festsetzung hinaus: Zwei Funktionen f und g sollen dann und nur dann als gleich angesehen werden, wenn sie sich höchstens auf einer zu P gehörigen Menge unterscheiden. Die Funktion f soll als positiv gelten, wenn sie auf mindestens einer zu Ψ gehörigen Menge positiv ist. — Die Untersuchung der Ordnungen $\tilde{\mathfrak{O}}_\Psi$ der Gruppen $\tilde{F}_{\mathsf{P}}$ ist das Hauptziel dieses Paragraphen, wobei uns in erster Linie die nichttrivialen Antifilter interessieren, die den Antifilter E aller endlichen Untermengen von M enthalten. Zunächst arbeiten wir dabei in F selbst.

Satz 6. a) *Ist $\Psi = \Phi$ ein Ultrafilter, also $\mathsf{P} = \Pi$ ein Antiultrafilter, so ist O_Φ, falls $F(\Pi) \neq F$, stets eine T-Halbgruppe.* b) *Ist F r-zerlegbar und endlich überdeckend, so ist stets $F(\Pi) \neq F$ und O_Ψ niemals eine T-Halbgruppe, falls Ψ kein Ultrafilter.* c) *Für jeden Filter Ψ ist O_Ψ gleich dem Durchschnitt aller T-Halbgruppen $O_\Phi = T_\Phi$, deren definierende Ultrafilter Φ den Filter Ψ umfassen.*

Beweis. a) Wegen $\Lambda(f) \cup \Lambda^-(f) = \mathsf{M}$ liegt für jedes $f \in F$ entweder $\Lambda(f)$ oder $\Lambda^-(f)$ in Φ; wegen $\Lambda(f) \supseteq \Lambda^-(-f)$ muß daher immer mindestens eine der beiden Funktionen f, $-f$ zu O_Φ gehören. b) Wegen $F(\Pi) \neq F$ vgl. Satz 5. Ist Ψ kein Ultrafilter, so gibt es zwei Mengen Λ_1, Λ_2 mit $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \mathsf{M}$, $\Lambda_i \notin \Psi$ $(i = 1, 2)$. Unter den Voraussetzungen von b) gilt dann, wie leicht zu sehen: Es gibt Funktionen $f_1, \ldots, f_l$; $g_1, \ldots, g_m$ in F, derart daß $\Lambda_1 = \Lambda^-(f_1) \cup \cdots \cup \Lambda^-(f_l)$; $\Lambda_2 = \Lambda^-(g_1) \cup \cdots \cup \Lambda^-(g_m)$; $f_i(\mu) = 0$ $(\mu \in \Lambda_2)$, $g_k(\mu) = 0$ $(\mu \in \Lambda_1)$. Setzt man nun $f = f_1 + \cdots + f_l - g_1 - \cdots - g_m$, so kann weder f noch $-f$ zu O_Ψ gehören. — c) Es sei $f \notin O_\Psi$, also $\Lambda(f) \notin \Psi$. Dann ist der triviale, aus $\Lambda(f)$ und allen Untermengen $\Lambda(f)$ bestehende Antifilter P' zu Ψ elementefremd und nach Satz 1 existiert ein Ψ umfassender, zu P' elementefremder Ultrafilter Φ. O_Φ enthält f nicht wegen $\Lambda(f) \notin \Phi$. Andererseits folgt aus $f \in O_\Psi$, $\Lambda(f) \in \Psi$ sofort $\Lambda(f) \in \Phi$, $f \in O_\Phi$ für jeden Ψ umfassenden Ultrafilter Φ.

Umfaßt der zu Π komplementäre Ultrafilter Φ den zu P komplementären Filter Ψ, so enthält $O_\Phi = T_\Phi$ die Gruppe $F(\mathsf{P})$. Es wird daher $\tilde{T}_{\Phi\Psi} = T_\Phi/F(\mathsf{P})$ eine $\tilde{O}_\Psi$ umfassende T-Halbgruppe aus $\tilde{F} = F/F(\mathsf{P})$ und aus Satz 6c) ergibt sich:

Korollar zu Satz 6. *Für jeden Filter Ψ wird $\tilde{O}_\Psi$ gleich dem Durchschnitt aller T-Halbgruppen $\tilde{T}_{\Phi\Psi}$, die mit Hilfe der Ψ enthaltenden Ultrafilter Φ gebildet werden können.*

Dann ist das Konjunktionsproblem für natürliche Ordnungen aller Gruppen $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ gelöst. Das Korollar gilt natürlich auch für O selbst, denn es ist ja $O=\widetilde{O}_{\Psi_\infty}$, falls wir unter Ψ_∞ den nur aus M bestehenden Filter verstehen. Aber in diesem Falle wäre der Weg über Satz 6 bei der Behandlung des Konjunktionsproblems ein völlig überflüssiger Umweg. Denn es wird offenbar schon $O=\bigcap_\mu T_{\Phi_\mu}$, falls wir unter Φ_μ die trivialen, den einzelnen Elementen von M im Sinne von § 2 zugeordneten Ultrafilter verstehen. Um einzusehen, daß bei der Zulassung beliebiger Gruppen $\widetilde{O}_\Psi$ auf die nichttrivialen Ultrafilter nicht verzichtet werden kann, überlegen wir:

Ist F r-zerlegbar, so definiert kein Ψ nicht umfassender Ultrafilter Φ in $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ eine $\widetilde{O}_\Psi$ enthaltende T-Halbgruppe, weil unter unserer Voraussetzung stets $T_\Phi+F(\mathsf{P})=F$ wird. Da nämlich T_Φ die Gruppe $F(\Pi)$ enthält, genügt es $F(\Pi)+F(\mathsf{P})=F$ zu beweisen. Ist aber Λ eine nicht zu Φ gehörige Menge aus Ψ, so gehört $\mathsf{M}-\Lambda$ zwar zu dem zu Ψ komplementären Antifilter P, aber nicht zu dem zu Φ komplementären Antiultrafilter Π, und es muß Λ wegen $(\mathsf{M}-\Lambda)\cap\Lambda=\emptyset$ in Π liegen. Definieren wir weiter zu einem beliebigen $f\in F$ die Funktion f_i $(i=1,2)$ durch $f_1(\mu)=f(\mu)$ $(\mu\in\Lambda)$, $f_1(\mu)=0$ $(\mu\notin\Lambda)$, $f_2(\mu)=0$ $(\mu\in\Lambda)$, $f_2(\mu)=f(\mu)$ $(\mu\notin\Lambda)$, so sind f_1 und f_2 Elemente von F, weil F r-zerlegbar. Außerdem haben wir: $f_1\in F(\Pi)$, $f_2\in F(\mathsf{P})$, $f=f_1+f_2\in F(\Pi)+F(\mathsf{P})$. Unser Resultat zeigt uns insbesondere: Bei einer r-zerlegbaren Gruppe F (z.B. bei $F=G$ oder $F=R$) sind die trivialen Ultrafilter nicht mehr zur Bildung von T-Halbgruppen benützbar, sobald solche Gruppen $F(\mathsf{P})$ und $\widetilde{F}_{\mathsf{P}}$ betrachtet werden sollen, bei denen P den Antifilter E aller endlichen Untermengen von M enthält.

Das einfachste Beispiel einer Gruppe, bei deren Untersuchung wir ausschließlich auf die nichttrivialen Ultrafilter angewiesen sind, liefert also $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$. Wir zeigen kurz, warum es (abgesehen von den bereits in der Einleitung angegebenen Gründen) lohnend erscheint, sich gerade mit $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$, und zwar speziell für den Fall einer abzählbaren Argumentmenge $\mathsf{M}_0=\{1,2,\ldots\}$ näher zu beschäftigen. Die Gruppe G ist offenbar eines der einfachsten Beispiele, auf das man stößt, wenn man nach Abelschen Gruppen fragt, die kein abzählbares Erzeugendensystem besitzen. Trotzdem hat schon G selbst überraschende Eigenschaften. Wohl läßt sich G als „unendliche" direkte Summe (TYCHONOFF-Summe) von abzählbar unendlich vielen zyklischen Summanden $\mathfrak{Z}_\nu=\{g_\nu\}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ darstellen. [Als Basis für $\mathfrak{Z}_\nu$ hat man einfach die durch $g_\nu(\mu)=\delta_{\nu\mu}$ $(\mu=1,2,\ldots)$ definierte Funktion zu wählen.] Aber es zeigt sich, daß G keine direkte Zerlegung in zyklische Summanden in der gebräuchlichen Bedeutung des Wortes besitzt, also keine Zerlegung, bei der jedes $f\in G$ schon in der Summe von *endlich vielen* Summanden enthalten ist, — vgl. hierzu § 7. Geht man weiter zu $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$ über, so sieht man überhaupt nicht mehr, wie eine Aufspaltung von $\widetilde{G}_{\mathsf{E}}$ bewerkstelligt werden könnte, sei es im Sinne einer Summenzerlegung, sei es im Sinne einer Durchschnittsdarstellung. Unsere Ordnungsbetrachtungen liefern nun einen ersten Hinweis, wie sich dieses Problem

vielleicht anpacken ließe. Denn die zyklischen Gruppen (unendlich hoher Ordnung) können als die einfachsten, gleichzeitig total und streng geordneten Abelschen Gruppen angesehen werden und die Gruppen $\tilde{G}_{\Pi\mathfrak{E}} = G(\Pi)/G(\mathfrak{E})$, die man mit Hilfe der $\mathfrak{E}$ umfassenden und damit nichttrivialen Antiultrafilter Φ gewinnt, sind ausgezeichnete Untergruppen von $\tilde{G}_{\mathfrak{E}}$ mit der Eigenschaft, daß stets die Restklassengruppen $\tilde{G}_{\mathfrak{E}}/\tilde{G}_{I,\mathfrak{E}}$ sich streng und total ordnen lassen, und zwar in einer ganz bestimmten Weise, die durch die Definition von G zum mindesten nahegelegt wird. Natürlich liefert die Einführung der $\tilde{G}_{\Pi\mathfrak{E}}$ für die systematische Behandlung des Strukturproblems von $\tilde{G}_{\mathfrak{E}}$ wirklich nicht mehr als eine Anregung; vor allem müßte vom Standpunkt einer am Vorbild der abzählbar erzeugbaren Abelschen Gruppen orientierten Strukturtheorie die Auszeichnung der „natürlichen" Ordnung von $\tilde{G}_{\mathfrak{E}}$ viel sorgfältiger gerechtfertigt werden, als es hier im Text nötig war, wo der Ordnungsbegriff von vornherein im Mittelpunkt stand. Aber unsere Überlegungen dürften es jedenfalls verständlich machen, wenn wir uns im folgenden Paragraphen mit der Struktur der totalen Ordnungen, die den Ultrafiltern Φ entsprechen, etwas genauer beschäftigen.

§ 4. Struktur der Ultrafilter-Ordnungen

Ist in der (zunächst völlig willkürlichen) Gruppe F eine T-Halbgruppe und damit eine totale Ordnung $\mathfrak{T}$ ausgezeichnet, so sollen zwei Elemente f, g als *gleich* bezeichnet werden, wenn sie relativ $\mathfrak{T}$ ordnungsgleich sind; wenn also $f-g$ in der größten Untergruppe H_T von T liegt (vgl. § 1). „Streng gleich" dagegen soll Gleichheit in F bedeuten. Abgekürzt sei $f=g$ die Bezeichnung für strenge Gleichheit, $f\equiv g$ die für Ordnungsgleichheit. Aus $f>g$, $g>f$ folgt also stets $f\equiv g$. Solange nichts anderes bemerkt, seien $f(g,\ldots)$ immer echt positive Elemente im Sinne von § 1. Die Elemente f, g heißen *vergleichbar*, wenn $n\cdot f>g$, $m\cdot g>f$ für passendes m, n[10]). Ist andererseits etwa $f>n\cdot g$ für alle n, so heißt f *groß* gegenüber g, g *klein* gegenüber f, und wir schreiben $f\gg g$. Sind f und g vergleichbar, und ist etwa $f>g$, so nennen wir f und g *fast gleich*, wenn $f\gg f-g$ (und damit, wie leicht zu sehen, auch $g\gg f-g$). Sind f und g vergleichbar, so erhält man einen DEDEKINDschen Schnitt im Bereich der rationalen Zahlen, wenn man den Bruch $m\cdot n^{-1}$ der „Unterklasse" oder „Oberklasse" zuordnet, je nachdem ob $n\cdot f>m\cdot g$ oder $n\cdot f\leq m\cdot g$. Ist ϱ die durch diesen Schnitt bestimmte reelle Zahl, so kann man unbedenklich g fast gleich zu $\varrho\cdot f$ bzw. f fast gleich zu $\varrho^{-1}\cdot g$ nennen,

[10]) Die im folgenden bei den total geordneten Gruppen benützte Terminologie entspricht der des 5. Buches der euklidischen „Elemente". Euklid beschränkt sich allerdings durch die Forderung der Vergleichbarkeit aller (echt positiven) Elemente auf den „archimedischen" Fall. Er braucht daher weder das Symbol $f\gg g$ noch die Definition für „fast gleich" des Textes. Typisch euklidisch aber scheint mir im Text der Gedanke, soweit wie möglich allein mit dem Grundbegriff der Vergleichbarkeit auszukommen und die Einführung neuer spezieller Hilfsbegriffe aus der Gruppentheorie zu vermeiden. Es ist bemerkenswert, daß man auf diesem klassischen, in vieler Hinsicht bequemsten Wege recht weit kommt.

auch wenn von vornherein nur $n \cdot f$, aber nicht $\varrho \cdot f$ in F definiert ist. — Wie üblich soll die Ordnung $\mathfrak{O}$ archimedisch bzw. diskret heißen, wenn alle $f \in F$ vergleichbar sind, bzw. wenn in T jedes f einem Vielfachen $n \cdot f_1$ eines kleinsten Elements f_1 gleich ist; es bedeutet also „archimedisch" bzw. „diskret" die additive Isomorphie von F/H_T zu einer geordneten Untergruppe aller reellen Zahlen bzw. zur Gruppe aller ganzen Zahlen.

Es sei jetzt speziell $F = G$ und T eine zu einem Ultrafilter Φ mit dem komplementären Antiultrafilter $\Pi = \mathsf{M} - \Phi$ gehörige T-Halbgruppe. Dann gilt zunächst: *Jedes $f \in T$ ist einem $f^* \in O$ gleich.* Wegen $f \in T$ ist nämlich sicher $\Lambda^-(f) \in \Pi$ und damit $\Lambda(f) \in \Phi$. Das aber zeigt, daß f z.B. der in O liegenden, durch $f^*(\mu) = f(\mu)$ $(\mu \in \Lambda(f))$, $f^*(\mu) = 0$ $(\mu \in \Lambda^-(f))$ definierten Funktion f^* gleich ist. — Wir dürfen und wollen unter diesen Umständen die betrachteten Funktionen $f, g, \ldots$ stillschweigend stets in O annehmen. Unter f_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ verstehen wir die durch „$f_n(\mu) = n$ für alle μ" definierte Funktion. — Ist f eine beliebige, echt positive Funktion aus G, so ist jedenfalls $\Lambda^-(f)$ leer und $\Lambda(f = 0) \in \Pi$. Betrachten wir weiter für $n = 1, 2, \ldots$ die Mengen $\Lambda(f \leq n)$, $\Lambda(f > n)$, so ist für jedes einzelne n immer entweder $\Lambda(f \leq n) \Phi$, $\Lambda(f > n) \in \Pi$ oder $\Lambda(f \leq n) \in \Pi$, $\Lambda(f > n) \in \Phi$, und wir haben die *Alternative:*

α) Es ist $\Lambda(f \leq n_0) \in \Phi$ für ein n_0. Dann ist auch [wegen $\Lambda(f \leq n_0) = \Lambda(f = 0) \cup \Lambda(f = 1) \cup \cdots \cup \Lambda(f = n_0)$ und $\Lambda(f = 0) \in \Pi$] sicher $\Lambda(f = n) \in \Phi$ für mindestens ein $n \leq n_0$. — β) Es ist $\Lambda(f > n) \in \Phi$ für alle n.

Mit Hilfe der Alternative beweisen wir nun leicht:

Satz 7. a) *In T ist f_1 ein kleinstes Element und jedes zu f_1 vergleichbare Element ist einem f_n gleich.* — b) *Ist $f \gg f_1$, so gibt es für jedes positiv reelle ϱ ein zu $\varrho \cdot f$ fast gleiches g.*

a α) Gilt für f der Fall α) der Alternative, ist also etwa $\Lambda(f = n) \in \Phi$, so ist f zu f_n gleich, weil $\Lambda(f \neq f_n) \subseteq \Lambda(f \neq n) \in \Pi$.

a β) Gilt für f der Fall β) der Alternative, so ist $f - f_n$ echt positiv für jedes n, da $\Lambda(f - f_n > 0) \supseteq \Lambda(f > n) \in \Phi$. Es ist also hier $f \gg f_1$ wegen $f_n = n \cdot f_1$. — Aus a α) und a β) zusammen folgt sofort die volle Behauptung a) von Satz 4. — b) Es sei $f \gg f_1$ [Fall β) der Alternative]. Dann ist wegen $\emptyset \notin \Phi$ jedenfalls $\Lambda(f = n) \neq \emptyset$ für unendlich viele n. — Wir bezeichnen jetzt für $n = 1, 2, \ldots$ mit $m(n)$ jeweils die kleinste ganze Zahl, derart daß $m(n) \cdot n^{-1} > \varrho$, definieren g durch: $g(\mu) = 0$ $(\mu \in \Lambda(f = 0))$, $g(\mu) = m(n)$ $(\mu \in \Lambda(f = n);\ n = 1, 2, \ldots)$ und behaupten: Es ist g fast gleich zu $\varrho \cdot f$. Zum Beweis beachte man: Es ist $\lim\limits_{n \to \infty} (m(n) \cdot n^{-1} - \varrho) = 0$. Daraus folgt: Ist $m_0 \cdot n^{-1} < \varrho$ (bzw. $> \varrho$), so wird $m_0 \cdot n - n_0 \cdot m(n) < 0$ (> 0) für alle hinreichend großen n. Dann aber haben wir für solche n: $m_0 \cdot f(\mu) - n_0 \cdot g(\mu) < 0$ (bzw. > 0) auf $\overline{\mathsf{N}}_n$ und wegen $\overline{\mathsf{N}}_n \in \Phi$ bedeutet das: $m_0 \cdot f < n_0 \cdot g$ $(m_0 \cdot f > n_0 \cdot g)$.

Wir interessieren uns jetzt weiter für die verschiedenen Größenklassen in T, genauer gesagt für die folgende Frage: Kann man in einfacher Weise eine Elementmenge f_σ aus T angeben, derart daß jedes f mit einem und nur einem f_σ vergleichbar ist?

Satz 8. *Die Ordnung $\mathfrak{T}$ von G ist dann und nur dann diskret, wenn es in Φ keine Folge $\Lambda_1 \supseteq \Lambda_2 \supseteq \cdots$ mit $\bigcap_n \Lambda_n = \emptyset$ gibt. — Ist $\mathfrak{T}$ nicht diskret, so gibt es zu jedem $f \in T$ ein $g \gg f$.*

Beweis. a) Aus Satz 7 folgt sofort: Ist $\mathfrak{T}$ nicht diskret, so muß ein $f \gg f_1$ existieren. Bei f gehört ferner $\Lambda_n = \Lambda$ $(f > n)$, wie bereits gezeigt, stets zu Φ und wir haben: $\Lambda_n \supseteq \Lambda_{n+1}$, $\bigcap_n \Lambda_n = \emptyset$. Die Bedingung von Satz 8 ist also für die Diskretheit von $\mathfrak{T}$ hinreichend. b) Es sei jetzt eine Folge $\Lambda_1 \supseteq \Lambda_2 \supseteq \cdots$ mit $\bigcap_n \Lambda_n = \emptyset$ in Φ vorhanden, und es sei f beliebig aus T. Dann ist wegen $f \not\equiv 0$ auch $\Lambda(f \geq 1) \in \Phi$, $\mathsf{N}_n = \Lambda_n \cap \Lambda(f \geq 1) \in \Phi$, und wir haben $\mathsf{N}_n \supseteq \mathsf{N}_{n+1}$, $\bigcap_n \mathsf{N}_n = \Phi$. Definieren wir nun g durch $g(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{M} - \mathsf{N}_1)$, $g(\mu) = (n+1) \cdot f(\mu)$ $(\mu \in \mathsf{N}_n - \mathsf{N}_{n+1};\ n = 1, 2, \ldots)$, so ist damit g auf ganz M erklärt, da $\mathsf{N}_1 = (\mathsf{N}_1 - \mathsf{N}_2) \cup (\mathsf{N}_2 - \mathsf{N}_3) \cup \cdots$ wegen $\bigcap_n \mathsf{N}_n = \emptyset$. Ferner wird für $n = 1, 2, \ldots$ stets $n \cdot f - g$ negativ auf N_n und wegen $\mathsf{N}_n \in \Phi$ bedeutet das $n \cdot f - g \notin T$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $g \gg f$. — Fragen wir nun nach Kriterien für die Gültigkeit der Diskretheitsbedingung von Satz 8, so ergibt sich:

Satz 9. *Die Ordnung $\mathfrak{T}$ ist sicher nicht diskret, wenn Φ eine abzählbare Menge Λ enthält, also insbesondere dann, wenn M selbst abzählbar.*

Ist nämlich Λ eine abzählbare, zu Φ gehörige Menge, so muß Φ als *nichttrivialer* Ultrafilter zu jeder endlichen Untermenge E von Λ das Komplement $\bar{\mathsf{E}} = \Lambda - \mathsf{E}$ enthalten und wegen der Abzählbarkeit von Λ kann man aus solchen Komplementen eine Folge $\bar{\mathsf{E}}_1 > \bar{\mathsf{E}}_2 > \cdots$ mit $\bigcap_n \bar{\mathsf{E}}_n = \emptyset$ bilden. — Ist M überabzählbar, so existieren sicher nichttriviale Ultrafilter Φ, in denen keine abzählbare Menge Λ auftritt (vgl. § 2). — Bei *überabzählbarem* M sind also zwei wesentlich verschiedene Klassen von nichttrivialen Ultrafiltern zu unterscheiden: a) *Ultrafilter mit abzählbaren Mengen*, b) *Ultrafilter ohne abzählbare Mengen*. Beim Typ a) weiß man, daß die zugehörige Ordnung $\mathfrak{T}$ von G nicht diskret wird. Beim Typ b) reichen unsere bisherigen Überlegungen nicht zur Bestimmung des Typus von $\mathfrak{T}$ aus, denn es ist hier ohne weiteres nicht zu sehen, wie man das Auftreten einer Folge $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \cdots$ mit $\bigcap_n \Lambda_n = \emptyset$ in *jedem* Φ beweisen könnte. Nur das eine läßt sich leicht zeigen, daß auch beim Typ b) unter Umständen Ultrafilter Φ existieren, die derartige Folgen enthalten. Es sei nämlich z.B. M die Menge aller reellen, echt positiven Zahlen, Λ_n die Untermenge aller Zahlen $\mu \leq 10^{-n}$. Dann ist $\Lambda_n > \Lambda_{n+1}$, $\bigcap_n \Lambda_n = \emptyset$. Aus der Tatsache, daß alle Λ_n überabzählbar sind, folgt weiter, daß es einen Filter Ψ gibt, der sowohl die Λ_n als auch sämtliche Untermengen von M mit abzählbarem Komplement enthält. Ein Ψ umfassender Ultrafilter Φ ist dann ein Filter der von uns gewünschten Art. Das Endergebnis unserer Betrachtungen läßt sich so formulieren:

Es ist noch nicht entschieden, ob es nicht triviale Ultrafilter mit zugeordneten diskreten Ordnungen $\mathfrak{T}$ gibt oder nicht. Jedenfalls kann $\mathfrak{T}$ nur dann diskret werden, wenn für Φ mindestens zwei Überabzählbarkeitsvoraussetzungen [Überabzählbarkeit von M und Vorliegen des Typus b)] erfüllt sind. Die Nichtdiskretheit von $\mathfrak{T}$ bei nichttrivialem Φ darf also mit gewissem Recht als Regelfall angesehen werden. — Für diesen Regelfall beweisen wir über Satz 7 und Satz 8 hinaus:

Satz 10. a) *Ist $\mathfrak{T}$ nichtdiskret, so gibt es in T zu abzählbar unendlich vielen $f^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ stets ein f, das groß ist gegenüber allen $f^{(i)}$.* b) *Ist ferner ein $g \gg f^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ von vornherein gegeben, so kann f so bestimmt werden, daß $g \gg f$.* c) *Existiert andererseits ein $\bar{g}$ mit $f^{(i)} \gg \bar{g}$ $(i=1, 2, \ldots)$, so gibt es auch ein $\bar{f}$ mit $f^{(i)} \gg \bar{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $\bar{f} \gg \bar{g}$.*

Wegen der Nichtdiskretheit von $\mathfrak{T}$ gibt es in Φ eine Folge $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \cdots$ mit $\bigcap_n \Lambda_n = \emptyset$ und wir dürfen annehmen, daß $f^{(1)}(\mu) \geq 1$, $\bar{g}(\mu) \geq 1$ auf Λ_1 [vgl. Beweis b) zu Satz 8]. Im Falle a) setzt man nun einfach: $f(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{M} - \Lambda_1)$, $f(\mu) = (n+1) \cdot \max\left(f^{(1)}(\mu), \ldots, f^{(n)}(\mu)\right)$ $(\mu \in \Lambda_n - \Lambda_{n+1})$. Dann ist f überall auf M definiert, und die bei Satz 8 unter b) angestellten Überlegungen zeigen, daß $f \gg f^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Etwas umständlicher wird der Beweis von b). Wir haben $\Lambda\left(g \geq (n+1)^2 \cdot \max\left(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right)\right) = \Lambda\left(g \geq (n+1)^2 \cdot f^{(1)}\right) \cap \Lambda\left(g \geq (n+1)^2 \cdot f^{(2)}\right) \cap \cdots \Lambda\left(g \geq (n+1)^2 \cdot f^{(n)}\right) \in \Phi$ wegen $g \gg f^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Bilden wir daher $\mathsf{N}_n = \Lambda_n \cap \Lambda\left(g \geq (n+1)^2 \cdot \max\left(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right)\right)$, so haben wir $\mathsf{N}_n \in \Phi$, $\mathsf{N}_n \supseteq \mathsf{N}_{n+1}$, $\bigcap_n \mathsf{N}_n = \emptyset$. Es wird also f durch $f(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{M} - \mathsf{N}_1)$, $f(\mu) = (n+1) \cdot \max\left(f^{(1)}(\mu), \ldots, f^{(n)}(\mu)\right)$ $(\mu \in \mathsf{N}_n - \mathsf{N}_{n+1})$ auf ganz M definiert, und man sieht wie im Falle a) ohne Schwierigkeit, daß nicht nur $f \gg f^{(i)}$ sondern auch $g \gg f$. — Bei c) arbeitet man statt mit den N_n mit den durch $\bar{\mathsf{N}}_n = \Lambda_n \cap \Lambda\left(\bar{g} \leq (n+1)^{-1} \cdot \min\left(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right)\right)$ definierten Mengen $\bar{\mathsf{N}}_n$ und setzt $f(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{M} - \bar{\mathsf{N}}_1)$, $f(\mu) = (n+1) \cdot \bar{g}(\mu)$ $(\mu \in \bar{\mathsf{N}}_n - \bar{\mathsf{N}}_{n+1})$. Im übrigen schließt man ganz analog wie unter b). — Um die Bedeutung von Satz 10 zu würdigen, fassen wir die Elemente f aus T in (paarweise elementefremde) Klassen vergleichbarer Elemente zusammen und ordnen die Menge K aller Klassen $\mathfrak{k}$ in naturgegebener Weise streng und total auf Grund der totalen Ordnung $\mathfrak{T}$ von G[11]). In der total geordneten Menge K definieren wir die natürliche Topologie, indem wir als offene Mengen in K die „Intervalle" $\mathfrak{k}_1 \gg \mathfrak{k} \gg \mathfrak{k}_2$ einführen. Für K und seine Topologie ergibt sich dann aus unseren Sätzen:

K enthält eine kleinste Klasse, aber keine größte. In jeder offenen Menge von K liegen überabzählbar viele Klassen. K kann nicht von abzählbar vielen offenen Mengen überdeckt werden. Keiner Klasse $\mathfrak{k}$ kann ein System von abzählbar vielen, $\mathfrak{k}$ enthaltenden offenen Mengen $\Omega_1 > \Omega_2 > \cdots$ so zugeordnet werden, daß kein $\mathfrak{k}_1 \neq \mathfrak{k}$ (oder auch nur kein $\mathfrak{k}_1 \gg \mathfrak{k}$ bzw. kein $\mathfrak{k}_1$ mit $\mathfrak{k} \gg \mathfrak{k}_1$) allen Ω_i angehört. — Kurz gesagt: Für K als topologischem Raum gelten keinerlei Abzählbarkeitsaxiome.

Zum Beweis hat man nur in Satz 10 die Elemente $f^{(i)}$ so zu wählen, daß $f^{(i+1)} \gg f^{(i)}$ bzw. $f^{(i)} \gg f^{(i+1)}$. Natürlich liegt es jetzt nahe, weiter zu fragen, ob

[11]) Es wird also die Klasse $\mathfrak{k}_1$ als größer angesehen als die Klasse $\mathfrak{k}_2$, wenn ein und damit jedes Element aus $\mathfrak{k}_1$ groß ist gegenüber einem und damit jedem Element aus $\mathfrak{k}_2$. Will man den Zusammenhang herstellen zwischen den Klassen des Textes und den isolierten Untergruppen der geordneten Gruppe F im Sinne von Krull [*1*] § 2 und vor allem § 4, so hat man zu beachten: Jeder Klasse $\mathfrak{k}$ entspricht eine bestimmte isolierte Untergruppe $I(\mathfrak{k})$. Dabei enthält $I(\mathfrak{k})$ an positiven Elementen alle und nur die f, die gegenüber den g aus $\mathfrak{k}$ *nicht* groß sind. Bildet man die Vereinigung oder den Durchschnitt einer beliebigen Menge von isolierten Untergruppen $I(\mathfrak{k}_\tau)$, so entsteht wieder eine isolierte Untergruppe I; umgekehrt kann *jede* isolierte Untergruppe von F auf eine dieser Weisen gewonnen werden.

man nicht zum mindesten bei abzählbarem $\mathsf{M}=\mathsf{M}_0$ den Typus von K völlig bestimmen, also eine bekannte, zu K ordnungsisomorphe Menge K^* angeben kann. Allerdings wäre das offenbar in einfacher Weise nur möglich, wenn für $\mathsf{M}=\mathsf{M}_0$ alle durch einen nichttrivialen Ultrafilter Φ definierten Ordnungen von G den gleichen Typus besitzen. Aber gerade diese Vermutung liegt nicht allzu fern (vgl. Satz 14 in § 6). Will man also bei den mit den Sätzen 7 bis 10 gewonnenen Resultaten nicht stehenbleiben, so wird man am besten als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen die genauere Strukturanalyse von K unter der Annahme $\mathsf{M}=\mathsf{M}_0$ wählen. — Hier begnügen wir uns mit dem Erreichten und fragen nur nach den Modifikationen, die sich ergeben, wenn wir statt ganzzahligen reellwertige Funktionen, also R statt G betrachten. Zunächst läßt sich Satz 8 in der folgenden Form übertragen:

Satz 11. a) *Die Ordnung $\mathfrak{T}$ von R ist dann und nur dann archimedisch, wenn es in Φ keine Folge $\Lambda_1 \supseteq \Lambda_2 \supseteq \cdots$ mit $\bigcap_n \Lambda_n = \emptyset$ gibt.* — b) *Ist $\mathfrak{T}$ archimedisch, so ist R/H_T stets zur Additionsgruppe R^* aller reellen Zahlen isomorph.*

Beweis. a) Existiert in Φ eine Folge Λ_n, so ist bereits die Ordnung $\mathfrak{T}'$ der Untergruppe G von R nicht archimedisch, also erst recht die Ordnung $\mathfrak{T}$ von R. Soll andererseits $\mathfrak{T}$ nicht archimedisch sein, so muß in T entweder ein f mit $f_1 \gg f$ oder ein f mit $f \gg f_1$ existieren. Ist etwa $f \gg f_1$, so können wir wegen $f \not\equiv 0$ von vornherein annehmen, daß $\Lambda(f=0)=\emptyset$. Setzen wir dann etwa $\Lambda_n = \Lambda(f \leq 10^{-n})$, so müssen wegen $f_1 \gg f$ alle Λ_n in Φ liegen, und man hat $\Lambda_n \supseteq \Lambda_{n+1}$, $\bigcap_n \Lambda_n = \emptyset$. — Ist andererseits $f \gg f_1$, so arbeite man mit den Mengen $\Lambda(f \geq n)$ statt mit den $\Lambda(f \leq 10^{-n})$. — b) Daß R/H_T, falls archimedisch, zu R^* isomorph sein muß, folgt daraus, daß T für jedes positive reelle ϱ die durch „$f(\mu)=\varrho$ für alle μ" definierte Funktion $\varrho \cdot f_1$ enthält.

Im *nichtarchimedischen* Fall sieht man weiter mühelos: *Es gilt der volle Satz 10.* Denn es lassen sich ja alle beim Beweis benutzten Schlüsse ebenso wie in G auch in R durchführen. Darüber hinaus erhält man diesmal noch: *Zu jeder Folge $f^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ aus T gibt es in T ein $\bar{f}$ mit $f^{(i)} \gg \bar{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$.* Man nehme nämlich von vornherein alle $f^{(i)}$ so präpariert an, daß sie für kein μ verschwinden, gehe von einer in Φ liegenden Folge Λ_n mit $\Lambda_n \supseteq \Lambda_{n+1}$, $\bigcap_n \Lambda_n = \emptyset$ aus und setze $\bar{f}(\mu)=0$ $(\mu \in \mathsf{M}-\Lambda_1)$, $\bar{f}(\mu) = (n+1)^{-1} \cdot \min\left(f^{(1)}(\mu), \ldots, f^{(n)}(\mu)\right)$ auf $\Lambda_n - \Lambda_{n+1}$. Im übrigen Schlüsse wie üblich. — Bei R enthält also im Gegensatz zu G im nichtarchimedischen Fall die zugehörige Klassenmenge K nicht nur kein größtes sondern auch kein kleinstes Element. Sonst ergeben sich keine bemerkenswerten neuen Gesichtspunkte. — Fragen wir schließlich noch nach einfachen Untergruppen von R und G, bei denen sich für alle nichttrivialen Ultrafilter Φ genauere Aussagen über die zugehörige Ordnung $\mathfrak{T}$ machen lassen, so erhalten wir:

Satz 12. *Die Ordnung $\mathfrak{T}$ der Gruppe H bzw. H' aller der reellen bzw. ganzzahligen Funktionen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, ist stets archimedisch, bzw. diskret.*

Sind nämlich $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die endlich vielen Werte der Funktion f aus H bzw. H' und setzt man $\Lambda_i = \Lambda(f=\alpha_i)$ $(i=1, \ldots, n)$, so muß wegen $\mathsf{M} = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_n$

ein Λ_i, etwa Λ_{i_0}, zu Φ gehören und es ist dann $f \equiv f_{\alpha_i}$, falls f_{α_i} durch „$f_{\alpha_i}(\mu) = \alpha_i$ für alle μ" definiert wird. (Vgl. den Beweis der „Alternative" unmittelbar vor Satz 7.) — Man beachte: Die Gruppe H' kann auch definiert werden als die Gruppe aller ganzzahligen beschränkten Funktionen. Im reellwertigen Fall wäre es *nicht* zulässig, in Satz 12 die Gruppe H aller endlichwertigen durch die echte Obergruppe aller beschränkten Funktionen zu ersetzen. Denn man kann ja bei nichtarchimedischer Ordnung von R stets beschränkte Funktionen bilden, die gegenüber f_1 klein sind. Über den trivialen in Satz 12 erfaßten Fall, ist also auch bei R nicht hinauszukommen.

Bei einer beliebigen, total, aber nicht archimedisch geordneten Gruppe kann man von der gegebenen totalen Ordnung $\mathfrak{T}$ zu einer zwar vergröberten aber häufig auch wesentlich vereinfachten totalen Ordnung $\overline{\mathfrak{T}}$ kommen, wenn man in T von einer echten „isolierten" Unterhalbgruppe ausgeht, d.h. von einer echten Unterhalbgruppe I, die gleichzeitig mit f auch alle $g < f$ enthält[12]). Es wird dann die Menge $\overline{T}$ aller Elemente der Form $f - g$ ($f \in T$, $g \in I$) eine T umfassende T-Halbgruppe, und die zugehörige Ordnung $\overline{\mathfrak{T}}$ ist die gesuchte Vergröberung von $\mathfrak{T}$. Die $\overline{\mathfrak{T}}$ entsprechende Klassenmenge $\overline{K}$ entsteht aus der Klassenmenge K von $\mathfrak{T}$ einfach dadurch, daß man das „Anfangsstück" aller Klassen $\mathfrak{k} \in K$, die von zu I gehörigen Elementen gebildet werden, wegläßt. — Handelt es sich nun speziell um eine durch einen nichttrivialen Ultrafilter Φ definierte, totale nichtarchimedische Ordnung der Gruppe G (oder auch der Gruppe R), so ergibt sich aus Satz 10 und seinen Folgerungen sofort: *Der Übergang von $\mathfrak{T}$ zu einer Vergröberung $\overline{\mathfrak{T}}$ bedeutet keine Vereinfachung.* Denn die Klassenmenge $\overline{K}$ ist in ihrer Struktur ebenso schwer zugänglich wie die Klassenmenge K.

§ 5. Restriktionsordnungen und Integral

Wie schon aus den Betrachtungen von § 2 hervorgeht, hat die allgemein brauchbare Methode der Definition von totalen Ordnungen der Funktionengruppen F mit Hilfe von Ultrafiltern aus $\mathfrak{B}$ den Nachteil, daß diese Ultrafilter im allgemeinen nicht konstruktiv erfaßt werden können. § 4 zeigte darüber hinaus, daß die durch die Ultrafilter festgelegten Ordnungen in der Regel eine völlig aus dem gewohnten Rahmen herausfallenden Typ besitzen. Es muß unter diesen Umständen hervorgehoben werden, daß in vielen wichtigen Spezialfällen die natürliche Ordnung $\mathfrak{O}$ von F auf eine andere, einfache und der Eigenart des Sonderfalls angemessene Art als Konjunktion von totalen Ordnungen $\mathfrak{T}_\tau$ dargestellt werden kann, wobei häufig die $\mathfrak{T}_\tau$ obendrein archimedisch werden. Die Methode, die wir hier im Auge haben, liegt vor allem dann nahe, wenn in der gegebenen Funktionengruppe F ein *Integral* definiert ist. Dementsprechend sollen einige Bemerkungen über diejenigen Eigenschaften des Integralbegriffs an die Spitze gestellt werden, die von unserem, auf die totalen Ordnungen eingestellten Standpunkt als wesentlich erscheinen.

[12]) Zu dem Begriff der Vergröberung einer Ordnung vgl. z.B. KRULL [1], § 4. (Der Vergröberung im Sinne des Textes entspricht dort der Übergang von Γ zu Γ/Δ.)

Es sei im Verband $\mathfrak{B}$ aller Untermengen von $\mathfrak{M}$ ein Verband Δ ausgezeichnet, der jedenfalls $\mathfrak{M}$ nicht zu enthalten braucht[13]) und dessen Elemente wir gelegentlich als „meßbar" bezeichnen, ohne aber im allgemeinen mit diesem Wert einen über die Zugehörigkeit zu Δ hinausgehenden Sinn zu verbinden. Der Bequemlichkeit halber wollen wir voraussetzen, es sei F zum mindesten hinsichtlich aller meßbaren Mengen $\mathfrak{N}$ r-zerlegbar im Sinne von § 3[14]). Mit $\tilde{f}_{\mathfrak{N}}$ bezeichnen wir die $\mathfrak{N}$-Restriktion von f, also das homomorphe Bild von f in $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$. Von einem in F relativ Δ definierten *Integral* sprechen wir, wenn jeder meßbaren Menge $\mathfrak{N}$ eine totale, *normierte* archimedische Ordnung $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ von $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$, also eine feste[15]) homomorphe Abbildung von $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$ in die geordnete Additionsgruppe aller reellen Zahlen zugeordnet ist, und wenn dabei die folgende *Additivitätsbedingung* besteht: Sind $\mathfrak{N}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ elementefremde meßbare Mengen und bedeutet α_i $(i=1,\ldots,n)$ bzw. α das Bild der Restriktion $\tilde{f}_{\mathfrak{N}_i}$ bzw. $\tilde{f}_{\mathfrak{N}_1\cup\ldots\cup\mathfrak{N}_n}$ relativ $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}_i}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}_1\cup\ldots\cup\mathfrak{N}_n}$, so ist stets $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

Für unsere augenblicklichen Zwecke ist die Additivitätsbedingung nebensächlich. Wesentlich dagegen ist, daß jede totale Ordnung $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ unmittelbar eine totale Ordnung $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$ von F selbst definiert. Denn über das Mittelglied $\tilde{f}_{\mathfrak{N}}$ ordnet sie ja jedem $f\in F$ als homomorphes Bild eine bestimmte reelle Zahl zu. Sowie also zu F ein Integral gegeben ist, erhebt sich vom Standpunkt der geordneten Gruppen aus die Frage: *Wird für die durch das Integral gelieferten totalen Ordnungen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$ die natürliche Ordnung $\mathfrak{O}$ von F gleich der Konjunktion aller $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$?*

Besonders wichtig ist dabei die folgende Bemerkung: Ist $\mathfrak{P}$ ein Antifilter aus $\mathfrak{M}$, so entsteht aus dem Untermengenverband $\mathfrak{B}$ bzw. Δ ein „Restklassen-

[13]) In der Analysis wird $\mathfrak{M}\in\Delta$ in der Regel erfüllt sein, da man dort, wenn man vom gleichen Punkte ausgeht wie im Text, von vornherein die additive Gruppe aller auf einer bestimmten Menge $\mathfrak{M}$ integrablen Funktionen zugrundelegen wird, so daß die Menge $\mathfrak{M}$ im Sinne des Textes als meßbar anzusehen ist, auch wenn sie im Sinne der Analysis kein endliches Maß besitzt. — Andererseits wäre z. B. bei Beispiel a) unseres Paragraphen die Aufnahme von $\mathfrak{M}$ in Δ nicht möglich. — In der Analysis ist Δ in der Regel *subtraktiv*, d. h. aus $\mathfrak{N}_i\in\Delta$ $(i=1,2)$ folgt $\mathfrak{N}_i-(\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2)\in\Delta$. Für uns ist diese Subtraktivität unwesentlich. — Grundsätzlich sei betont: Im Texte soll nicht der Integralbegriff systematisch aus dem Ordnungsbegriff abgeleitet werden. Es kommt nur auf die zu den Beispielen a) bis d) näher erläuterte Bedeutung des Integrals für das Konjunktionsproblem der Ordnungen an.

[14]) Die Forderung, F solle r-zerlegbar sein, ist also hier etwas schwächer als in § 3. Es wird nur gefordert, daß jede Spaltung $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$, $\emptyset=\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2$, bei der mindestens $\mathfrak{M}_1$ meßbar ist auf dem Wege über die Restriktionsbildung zu einer direkten Zerlegung von F führt.

[15]) Die Normierung kann bekanntlich dadurch erfolgen, daß man für *ein* hinsichtlich $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ echt positives Element $\tilde{f}_{\mathfrak{N}}$ aus $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$ den positiven Zahlwert vorschreibt, auf den $\tilde{f}_{\mathfrak{N}}$ durch $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ abgebildet werden soll — falls nicht die hier ausnahmsweise nicht auszuschließende Möglichkeit vorliegt, daß $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ die „uneigentliche" Totalordnung ist, die der T-Halbgruppe $\tilde{T}_{\mathfrak{N}}=\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$ entspricht, die also *alle* Elemente von $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$ auf die 0 abbildet.

Verband" $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{P}}$ bzw. $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{P}}$, wenn wir zwei Mengen $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ aus $\mathfrak{B}$ bzw. Δ gleichsetzen, falls $(\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2) - (\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2) \in \mathfrak{P}$ hat. Hat nun ein zu F gehöriges Integral die Eigenschaft, daß es die $\mathfrak{N}_1$- und $\mathfrak{N}_2$-Restriktion von $f \in F$ immer auf die gleiche reelle Zahl abbildet, wenn $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ der gleichen Mengenklasse in $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{P}}$ angehören, so kann man von einem zu $\tilde{F}_{\mathfrak{P}}$ relativ $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{P}}$ gehörigen Integral reden, und es besteht die Möglichkeit, daß das gegebene Integral unmittelbar eine Konjunktionsdarstellung der natürlichen Ordnung von $\tilde{F}_{\mathfrak{P}}$ durch totale Ordnungen liefert. — Wir erläutern die praktische Brauchbarkeit des Integralbegriffs für das Konjunktionsproblem an drei einfachen Beispielen:

a) $\mathfrak{M}$ sei ganz beliebig, $\Delta = \mathfrak{E}$ sei der Verband aller endlichen Untermengen Δ_ε von $\mathfrak{M}$. Als „Integration" in F werde die gewöhnliche, jeweils über alle $\mu \in \Delta_\varepsilon$ zu erstreckende Summation gewählt. Es sei also $\sum_{\mu \in \Delta_\varepsilon} f(\mu) \equiv \int_{\Delta_\varepsilon} f$ das Bild, das der Δ_ε-Restriktion $\tilde{f}_{\Delta_\varepsilon}$ zugeordnet wird, und es sei dementsprechend die Ordnung $\mathfrak{T}_{\Delta_\varepsilon}$ von F definiert durch die Vorschrift: „$f > g$ dann und nur dann, wenn $\sum_{\mu \in \Delta_\varepsilon} (f(\mu) - g(\mu)) \geq 0$". Hier folgt der Satz, daß $\mathfrak{T}$ die Konjunktion aller $\mathfrak{T}_{\Delta_\varepsilon}$ darstellt, bereits aus der Bemerkung, daß die den trivialen Ultrafiltern aus $\mathfrak{M}$ entsprechenden totalen Ordnungen von F zu den $\mathfrak{T}_{\Delta_\varepsilon}$ gehören. Wir haben also hier in a) eine Verallgemeinerung der Methode der Totalordnung durch triviale Ultrafilter vor uns, die aber im Rahmen unserer Arbeit nicht weiter interessant ist, da die Ordnungen $\mathfrak{T}_{\Delta_\varepsilon}$ sämtlich unbrauchbar werden, wenn wir von F zu der mit Hilfe eines $\mathfrak{E}$ umfassenden Antiultrafilters $\mathfrak{P}$ gebildeten Restklassengruppe $\tilde{F}_{\mathfrak{P}}$ übergehen wollen.

b) Es sei $\mathfrak{M}$ ein Intervall, $\{a \leq \mu \leq b\}$ ein abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlgeraden, F bestehe aus allen in $\mathfrak{M}$ *stetigen* Funktionen. Δ sei der Verband aller abgeschlossenen Teilintervalle von $\mathfrak{M}$. Als Integral werde das von RIEMANN benutzt, also $\int_{\Lambda \in \Delta} f \equiv \int_{a_1}^{b_1} f(\mu)\, d\mu$, falls $\Lambda \equiv \{a_1 \leq x \leq b_1\}$. — Hier haben wir $\mathfrak{T}_\Lambda$ festgelegt durch „$f > g$, wenn $\int_{a_1}^{b_1} (f(\mu) - g(\mu))\, d\mu \geq 0$", und die Tatsache, daß $\mathfrak{O}$ Konjunktion aller $\mathfrak{T}_\Lambda$ ist, folgt aus dem wohlbekannten Satz: Im Falle der Stetigkeit ist dann und nur dann $\int_{a_1}^{b_1} f(\mu)\, d\mu \geq 0$ für alle Paare a_1, b_1 mit $a \leq a_1 < b_1 \leq b$, wenn $f(\mu) \geq 0$ für alle μ in $a \leq x \leq b$. — Der Konjunktionssatz für $\mathfrak{O}$ ist also zwar richtig, aber doch nicht selbstverständlich.

c) Wählt man in dem Beispiel von b) statt der Gruppe aller stetigen für F die Gruppe aller beschränkten, RIEMANNsch-integrablen Funktionen, so gilt der Konjunktionssatz für $\mathfrak{O}$ (also in der Halbgruppensprache die Gleichung $O = \bigcap_{\Lambda \in \Delta} T_\Lambda$, wobei T_Λ die zu $\mathfrak{T}_\Lambda$ gehörige T-Halbgruppe) nicht mehr, aber es taucht dafür ein neuer Gesichtspunkt auf: Am RIEMANNschen Integral ändert sich nichts, wenn man die Funktionswerte des Integranden an endlich vielen Stellen ändert. Das bedeutet, daß man ohne weiteres das RIEMANNsche Integral auch interpretieren kann als ein Integral im Sinne des Textes,

das zu der Funktionengruppe $\tilde{F}_{\mathfrak{E}}$ hinsichtlich des Teilbereiches $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{E}}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{E}}$ gehört. Allerdings wird dadurch kein wesentlicher Fortschritt erzielt. Denn auch für $\tilde{T}_{\mathfrak{E}}$ läßt sich mit Hilfe des RIEMANNschen Integrals keine Konjunktionsdarstellung der natürlichen Ordnung $\tilde{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}$ durch totale Ordnungen gewinnen. (Man beachte z.B., daß man bei einer stetigen Funktion auch an abzählbar unendlich vielen Stellen die Werte abändern kann, ohne am Integral etwas zu ändern, wobei allerdings die Lage dieser Stellen sich nicht mehr beliebig vorschreiben läßt.)

d) Im Gegensatz zu c) kommt man wieder zu einem befriedigenden Konjunktionssatz, wenn man $\mathfrak{M}$ wie in b) und c) definiert, aber statt des RIEMANNschen Integrals das LEBESGUEsche zugrunde legt und für Δ bzw. F dementsprechend den Verband aller LEBESGUEsche meßbaren Untermengen von $\mathfrak{M}$ bzw. die Menge aller beschränkten und (LEBESGUEsch) meßbaren Funktionen wählt. Hier ist es zunächst klar, daß man das Integral naturgemäß nicht als zu F hinsichtlich Δ ansehen wird, sondern daß man F und Δ durch $\tilde{F}_{\mathfrak{P}_L}$ bzw. $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{P}_L}$ zu ersetzen hat, wobei $\mathfrak{P}_L$ den Antifilter aller der Untermengen von $\mathfrak{M}$ bedeutet, die das LEBESGUEsche Maß 0 besitzen. Der Konjunktionssatz für die natürliche Ordnung von $\tilde{F}_{\mathfrak{P}_L}$ bezüglich der durch das LEBESGUEsche Integral definierten totalen Ordnungen von $\tilde{F}_{\mathfrak{P}_L}$ folgt dann sofort aus dem wohlbekannten Theorem: Ist f eine meßbare Funktion, so ist $\Lambda^-(f)$ eine meßbare Menge, und es wird das über $\Lambda^-(f)$ mit f als Integranden gebildete LEBESGUEsche Integral negativ, falls nicht $\Lambda^-(f) \in \mathfrak{P}_L$.

Das Beispiel c) ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil hier in einem konkreten Einzelfalle gezeigt ist: Auch bei einer Restklassengruppe einer Funktionengruppe, bei der nicht mehr sinnvoll von den zu den einzelnen Stellen gehörigen Funktionswerten gesprochen werden kann, ist es unter Umständen möglich, das Konjunktionsproblem für die natürliche Ordnung allein mit Hilfe von *archimedischen* Totalordnungen zu lösen. Allerdings kommt man dabei nicht mit der Ultrafiltermethode zum Ziel; man muß andere, dem Spezialfall angepaßte Begriffsbildungen heranziehen, in unserem Fall das Integral.

§ 6. Die Ordnungen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$ und $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}|\mathfrak{N}}$

Entsprechend wie in § 5 denken wir uns die auftretenden Ordnungen normiert. Jede Ordnung von F soll also ein bestimmter Homomorphismus $F \to A$ von F auf eine streng total geordnete Abelsche Gruppe sein. Zwei Ordnungen $F \to A$ und $F \to A'$ haben den *gleichen Typ*, wenn A und A' ordnungsisomorph aufeinander abgebildet werden können. Wir wollen zeigen, daß sich unter Umständen der Begriff der Restriktion benützen läßt, um für die natürliche Ordnung $\mathfrak{O}$ von F eine Konjunktionsdarstellung durch totale Ordnungen $\mathfrak{T}_\tau$ abzuleiten, bei der die $\mathfrak{T}_\tau$ alle den gleichen Typ haben. — Wie schon bisher benutzt, führt jede totale Ordnung $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{N}}$ einer Restriktionsgruppe $\tilde{F}_{\mathfrak{M}-\mathfrak{N}}$ von F unmittelbar zu einer totalen Ordnung $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$ von F selbst,

einfach wegen der Existenz des kanonischen Homomorphismus $\mathfrak{H}_N$ von F auf $\tilde{F}_{M-N}$. Das Schema läßt sich dabei anschaulich so charakterisieren:

$$(1) \qquad [\{F \to \tilde{F}_{M-N}(\mathfrak{H}_N)\};\ \{\tilde{F}_{M-N} \to A_N(\tilde{\mathfrak{T}}_N)\}] \Rightarrow \{F \to A_N(\mathfrak{T}_N)\}.$$

Wir nehmen nun ferner an, es gäbe eine bestimmte *isomorphe* Abbildung $\mathfrak{A}_N$ von F auf $\tilde{F}_{M-N}$ (die natürlich mit dem kanonischen Homomorphismus $\mathfrak{H}_N$ nichts zu tun hat); $\mathfrak{T}$ sei eine gegebene Ordnung $F \to A$ von F. Dann gewinnt man eine im allgemeinen von $\mathfrak{T}$ verschiedene Ordnung $\mathfrak{T}_1$ von F, indem man zunächst mit Hilfe von $\mathfrak{A}_N$ aus $\mathfrak{T}$ eine Ordnung $\tilde{\mathfrak{T}}$ von $\tilde{F}_{M-N}$ ableitet und anschließend von $\tilde{\mathfrak{T}} = \tilde{\mathfrak{T}}_N$ zur zugehörigen Ordnung $\mathfrak{T}_N = \mathfrak{T}_1$ von F zurückgeht. Der Bildungsmechanismus von $\mathfrak{T}_1$ läßt sich anschaulich folgendermaßen beschreiben:

$$(2) \qquad \begin{cases} [\{f \to \alpha(\mathfrak{T})\};\ \{\tilde{f}_N \leftrightarrow f(\mathfrak{A}_N)\}] \Rightarrow \{\tilde{f}_N \to \alpha(\tilde{\mathfrak{T}}_N)\}; \\ [\{f_1 \to \tilde{f}_N(\mathfrak{H}_N)\};\ \{\tilde{f}_N \to \alpha(\tilde{\mathfrak{T}}_N)\}] \Rightarrow \{f_1 \to \alpha(\mathfrak{T}_N)\}. \end{cases}$$

In (2) durchläuft f alle Elemente von F, $\tilde{f}_N$ alle von $\tilde{F}_{M-N}$; ebenso durchläuft α in allen Einzelformen *alle* Elemente von A und f_1 in den beiden letzten Formeln wieder *alle* Elemente von F. Es ist also tatsächlich $\mathfrak{T}_N$ wieder eine Ordnung der Gruppe F, und zwar *haben* $\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{T}_N$ *den gleichen Typ*, weil sie F auf ein und dieselbe Gruppe A abbilden.

Um die bisherigen grundsätzlichen Überlegungen konkret anzuwenden, betrachten wir auf einer abzählbaren Argumentmenge $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots\}$ die Gruppe G aller ganzzahligen Funktionen und wählen bei den folgenden Betrachtungen für N stets eine unendliche und damit abzählbare Untermenge von M. Dann gibt es stets (unendlich viele) eindeutig umkehrbare Abbildungen $\mathfrak{a}_N$ von M auf N und jeder Abbildung $\mathfrak{a}_N$ entspricht ein Isomorphismus $\mathfrak{A}_N$ von F auf $\tilde{F}_{M-N}$. [Das Bild von f bei $\mathfrak{A}_N$ ist definiert durch „$\tilde{f}_N(\mu_N) = f(\mu)$, falls μ_N Bild von μ bei $\mathfrak{a}_N$".] — Ist ferner Φ irgendein Ultrafilter aus B mit dem zugehörigen Antiultrafilter Π, so wird Φ, Π durch $\mathfrak{a}_N$ im Verband B_N aller Untermengen von N ein Paar Φ_N, Π_N zugeordnet. Jedem Paar Φ_N, Π_N wiederum entspricht in B ein kanonisches Urbildpaar Φ_1, Π_1, und zwar besteht Φ_1 bzw. Π_1 aus allen den $A \in \mathsf{B}$, bei denen $A \cap \mathsf{N} \in \Phi_N$ bzw. $A \cap \mathsf{N} \in \Pi_N$. (Die Verifikation der Tatsache, daß so tatsächlich immer aus einem zusammengehörigen Ultrafilter-Antiultrafilterpaar aus B_N ein entsprechendes Paar aus B gewonnen wird, ist trivial.) Φ_1, Π_1 kann als das mit Hilfe von $\mathfrak{a}_N$ aus Φ, Π abgeleitete Paar bezeichnet werden. Man sieht sofort:

Ist $\mathfrak{a}_N$ *eine eindeutig umkehrbare Abbildung von* M *auf* N *und* $\mathfrak{A}_N$ *die entsprechende Abbildung von* F *auf* $\tilde{F}_{M-N}$, *bedeutet ferner* $\mathfrak{T}$ *die dem Ultrafilter* Φ *aus* B *zugeordnete Ordnung von* F, *so gehört die mit Hilfe von* $\mathfrak{A}_N$ *aus* $\mathfrak{T}$ *abgeleitete Ordnung* $\mathfrak{T}_1$ *von* F *zu dem mit Hilfe von* $\mathfrak{a}_N$ *aus* Φ *abgeleiteten Ultrafilter aus* B.

Wir gehen nun aus von einer beliebigen Ordnung $\mathfrak{T}$ von F mit der T-Halbgruppe $T > O$; mit $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_N}$ bzw. $T_{\mathfrak{a}_N}$ bezeichnen wir die aus $\mathfrak{T}$ mit Hilfe

von $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ und der zugehörigen Abbildung $\mathfrak{A}_{\mathsf{N}}$ abgeleitete Ordnung $\mathfrak{T}_1$ bzw. ihre T-Halbgruppe. Gefragt wird zunächst: Läßt sich die natürliche Ordnung $\mathfrak{O}$ als Konjunktion von Ordnungen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ darstellen, gibt es also $O = \bigcap_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}} T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ bei passender Wahl der $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$? Es ergibt sich leicht:

$\mathfrak{O}$ ist sicher dann Konjunktion von Ordnungen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$, wenn mindestens ein μ_0 existiert, derart daß $f(\mu_0) \geqq 0$ für alle $f \in T$.

Ist nämlich unsere Bedingung erfüllt, gibt es etwa in T kein f mit $f(1) < 0$, und bedeutet $\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eine Abbildung von M auf sich selbst, bei der 1 in i übergeht, so gibt es in $T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}}$ kein f mit $f(i) < 0$, es wird also $O = \bigcap_i T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}}$. Kritisch ist zu unserem Resultat zu bemerken: Enthält T kein f mit $f(1) < 0$, so ist $T \subseteqq T_{\Phi_1}$, falls Φ_1 den $\mu = 1$ entsprechenden trivialen Ultrafilter und T_{Φ_1} die durch Φ_1 bestimmte T-Halbgruppe bedeutet. Es stellt also die Ordnung $\mathfrak{T}$ eine Verfeinerung der Ordnung $\mathfrak{T}_{\Phi_1}$ dar, und in gleicher Weise ergibt sich sofort, daß $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{T}_{\Phi_i}$ sein muß, falls Φ_i der zu $\mu = i$ gehörige triviale Ultrafilter. $\bigcap_i T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{M}}^{(i)}} = O$ ist also eine unmittelbare Konsequenz von $\bigcap_i T_{\Phi_i} = O$, und unsere bisherigen Überlegungen sind uninteressant, sofern man nicht speziell die Verfeinerungen der Ordnungen $\mathfrak{T}_{\Phi_1}$ untersuchen will[16]).

Um zu nichttrivialen Resultaten zu kommen, betrachten wir unter Auszeichnung eines bestimmten Antifilters P und des zugehörigen komplementären Filters Ψ analog wie in § 3 die Halbgruppe O_Ψ aller $f \in G$ mit $\Lambda^-(f) \in \mathsf{P}$. Von P wollen wir jedenfalls voraussetzen, daß alle endlichen Untermengen von M in P liegen, $\mathsf{P} \supseteqq \mathsf{E}$. In Übereinstimmung der in § 2 bei Filtern benutzten Terminologie sagen wir, der Antifilter P sei *abzählbar*, wenn er eine *abzählbare Basis* besitzt, d.h. wenn sich $\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots$ in P so bestimmen lassen, daß P gerade aus allen Untermengen der N_i besteht.

Hilfssatz. *Ist P abzählbar und ist $\overline{\mathsf{N}}$ eine beliebige nicht zu P gehörige Untermenge von M, so gibt es stets eine umkehrbar eindeutige Abbildung $\mathfrak{a}_{\overline{\mathsf{N}}}$ von M auf $\overline{\mathsf{N}}$, derart daß jede zu P gehörige Untermenge $\overline{\Lambda}$ von $\overline{\mathsf{N}}$ in M ein gleichfalls zu P gehöriges Urbild Λ hat.*

Wie unmittelbar zu sehen, darf man von der Basis von P voraussetzen, daß $\mathsf{N}_{i+1} \supset \mathsf{N}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$; wegen $\mathsf{E} \subseteqq \mathsf{P}$ hat man dann $\bigcup_i \mathsf{N}_i = \mathsf{M}$. Wir setzen $\overline{\mathsf{N}}_i = \overline{\mathsf{N}} \cap \mathsf{N}_i$ und erhalten $\overline{\mathsf{N}} = \bigcup_i \overline{\mathsf{N}}_i$, $\overline{\mathsf{N}}_{i+1} \supseteqq \overline{\mathsf{N}}_i$; außerdem ist klar, daß die Untermengen der $\overline{\mathsf{N}}_i$ gerade die sämtlichen zu P gehörigen Untermengen von $\overline{\mathsf{N}}$ darstellen. Beachten wir noch, daß aus $\Lambda_k \in \mathsf{P}$ $(k = 1, 2)$ stets $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \in \mathsf{P}$

[16]) Daß unendlich viele Verfeinerungen etwa von $\mathfrak{T}_{\Phi_1}$ existieren, ist klar. Man hat nur in der Gruppe $\overline{F}_{\Phi_1}$ aller $f \in G$ mit $f(1) = 0$ irgendeine T-Halbgruppe $\overline{T}_1$ zu wählen. Dann bildet die Menge $(T - \overline{F}_{\Phi_1}) \cup \overline{T}_1 = T_1$ eine T-Halbgruppe in G, die eine Verfeinerung $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{T}_\Phi$ definiert. — Bei einer T-Halbgruppe $T > O$, die für jedes μ ein f mit $f(\mu) < 0$ enthält, liegt die Vermutung nahe, daß der über alle $\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$ erstreckte Durchschnitt $\bigcap_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}} T_{\mathfrak{a}_{\mathsf{N}}}$ stets eine *echte* Obergruppe von O wird. Indessen stößt ein Beweisversuch auf Schwierigkeiten und noch aussichtsloser erscheint der Versuch, die Vermutung durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

folgt, so sehen wir sofort: Der Hilfssatz ist richtig, wenn man zeigen kann: Die Abbildung $\mathfrak{a}_{\overline{\mathsf{N}}}$ läßt sich so bestimmen, daß für $\Lambda_1 = \mathsf{N}_1$, $\Lambda_{i+1} = \mathsf{N}_{i+1} - \mathsf{N}_i$, $\overline{\Lambda}_1 = \overline{\mathsf{N}}_1$, $\overline{\Lambda}_{i+1} = \overline{\mathsf{N}}_{i+1} - \overline{\mathsf{N}}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ jedes Urbild eines $\overline{\Lambda}_i$ Untermenge eines $\mathsf{N}_k = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_k$ ist. Beim Beweis dieser letzten Behauptung unterscheiden wir zwei Fälle: a) Es seien unendlich viele $\overline{\Lambda}_i$ unendlich, etwa $\overline{\Lambda}_{i_1}, \overline{\Lambda}_{i_2}, \overline{\Lambda}_{i_3}, \ldots$. Dann sind wegen $\Lambda_i \supseteqq \overline{\Lambda}_i$ auch $\Lambda_{i_1}, \Lambda_{i_2}, \ldots$ unendlich; es gibt infolgedessen für $k_1 = 1, 2, \ldots$ stets eine Abbildung $\mathfrak{a}^{(k)}$ von

$$\Lambda_{i_{k-1}+1} \cup \Lambda_{i_{k-1}+2} \cup \cdots \cup \Lambda_{i_k} \quad \text{auf} \quad \overline{\Lambda}_{i_{k-1}+1} \cup \overline{\Lambda}_{i_{k-1}+2} \cup \cdots \cup \overline{\Lambda}_{i_k}.$$

Die Abbildungen $\mathfrak{a}^{(k)}$ zusammengenommen definieren eine Abbildung $\mathfrak{a}_{\overline{\mathsf{N}}}$, die offenbar unserer Bedingung genügt. b) Es seien nur endlich viele $\overline{\Lambda}_i$ unendlich, Λ_I sei die letzte Menge dieser Art[17]). Dann sind jedenfalls immer noch unendlich viele $\overline{\Lambda}_i$ von $\emptyset$ verschieden. Denn andernfalls hätten wir: $\overline{\mathsf{N}} = \overline{\Lambda}_1 \cup \overline{\Lambda}_2 \cup \cdots = \overline{\Lambda}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Lambda}_n = \overline{\mathsf{N}}_n \in \mathsf{P}$, während $\overline{\mathsf{N}} \notin \mathsf{P}$ vorausgesetzt war. Es existiert also sicher eine Abbildung $\mathfrak{a}$ von $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_I$ auf $\overline{\Lambda}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Lambda}_I$ und eine Abbildung $\mathfrak{a}'$ von $\Lambda_{I+1} \cup \Lambda_{I+2} \cup \cdots$ auf $\overline{\Lambda}_{I+1} \cup \overline{\Lambda}_{I+2} \cup \cdots$. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ zusammen definieren wegen der Endlichkeit aller $\overline{\Lambda}_{I+l}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ eine der benötigten Abbildungen $\mathfrak{a}_{\overline{\mathsf{N}}}$. — Auf Grund des Hilfssatzes beweisen wir jetzt

Satz 13. *Ist P ein abzählbarer Antifilter, T eine O_Ψ umfassende T-Halbgruppe, so wird dann und nur dann $O_\Psi = \bigcap_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}} T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$, wenn T kein f mit $\Lambda(f) \in \mathsf{P}$ enthält.*

a) Aus $f \in T$, $\Lambda(f) \in \mathsf{P}$, $O_\Psi \subseteqq T$ und der Definition von O_Ψ folgt die Existenz eines $g \in T$ mit $\Lambda^-(g) = \mathsf{M}$. [Man setze $g = f + g'$, wobei $g'(\mu) = 0$ auf der zu Ψ gehörigen Menge $\mathsf{M} - \Lambda(f)$ und $g'(\mu) = f(\mu) - 1$ auf $\Lambda(f)$.] Aus der Existenz von g ergibt sich $-f_1 \in T$ (f_1 wie in § 4 definiert). Weiter erhält man $-f_1 \in T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ für alle N und alle $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$; wegen $-f_1 \notin O_\Psi$ ist also $O_\Psi = \bigcap_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}} T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ unmöglich. b) Es sei $\Lambda(f) \notin \mathsf{P}$ für alle $f \in T$, und es sei $f \notin O_\Psi$. Dann ist die Existenz eines $T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ mit $f \notin T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$, $O_\Psi \subseteqq T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ zu beweisen. Setzen wir $\Lambda^-(f) = \mathsf{N}$, so ist wegen $f \in O_\Psi$ sicher $\mathsf{N} \notin \mathsf{P}$ und man kann die Abbildung $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ von M auf N so wählen, daß die Bedingung des Hilfssatzes erfüllt ist. *Dadurch erreicht man, daß* $O_\Psi \subseteqq T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$. Es sei nämlich $g \in O_\Psi$, $\tilde{g}_\mathsf{N}$ das kanonische Bild von g hinsichtlich $\mathfrak{H}_\mathsf{N}$. Dann ist zum Beweise von $O_\Psi \subseteqq T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ nur zu zeigen, daß $\tilde{g}_\mathsf{N}$ bei der zu $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ gehörigen Abbildung $\mathfrak{A}_\mathsf{N}$ das Bild eines Elementes $\bar{g}$ aus T darstellt. Nun ist aber $\Lambda^-(\tilde{g}_\mathsf{N}) = \Lambda^-(g) \cap \mathsf{N} \in \mathsf{P}$. Wegen der Festlegung von $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ im Sinne des Hilfssatzes ist also $\Lambda^-(\bar{g}) \in \mathsf{P}$, $\bar{g} \in O_\Psi$, $\bar{g} \in T$, wenn $\bar{g}$ durch $\bar{g}(\mu) = \tilde{g}_\mathsf{N}(\tilde{\mu})$ ($\tilde{\mu}$ Bild von μ bei der Abbildung $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$) definiert wird. — Es bleibt noch $f \notin T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$ zu beweisen. Ist g aus $T_{\mathfrak{a}_\mathsf{N}}$, und haben $\tilde{g}_\mathsf{N}$, $\bar{g}$ die gleiche Bedeutung wie soeben, so ist $\Lambda(g) \cap \mathsf{N} = \Lambda(\tilde{g}_\mathsf{N})$ das Bild, das der Menge $\Lambda(g)$ durch $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ zugeordnet wird. Wegen $\bar{g} \in T$ ist nun nach Voraussetzung $\Lambda(\bar{g}) \notin \mathsf{P}$, und daraus folgt wegen der Grundeigenschaft von $\mathfrak{a}_\mathsf{N}$ sofort $\Lambda(\tilde{g}_\mathsf{N}) \notin \mathsf{P}$, also speziell

[17]) Ist kein $\overline{\Lambda}_i$ unendlich, so ist $I = 0$, $\Lambda_0 = \overline{\Lambda}_0 = \emptyset$ zu setzen.

$\Lambda(\tilde{g}_{\mathfrak{N}}) \neq \emptyset$. Für f aber haben wir $\Lambda(f_{\mathfrak{N}}) = \emptyset$ wegen $\Lambda^{-}(f) = \mathfrak{N}$. Aus $g \in T_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{N}}}$ ergibt sich somit $g \neq f$.

Korollar 1. Die Voraussetzung $\mathfrak{P} \geqq \mathfrak{E}$ war für den Beweis von Satz 13 unentbehrlich. Denn man müßte ja aus $f \notin O_\Psi$ d.h. $\Lambda^{-}(f) \notin \mathfrak{P}$ auf „$\Lambda^{-}(f)$ unendlich" und damit auf die Existenz einer Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\Lambda^{-}(f)$ schließen können. [Wichtig für das Verständnis der Tatsache, daß man bei O_Ψ ($\mathfrak{P} \geqq \mathfrak{E}$) zu einem ganz anderen Resultat kommt als bei O.]

Korollar 2. Für $\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ hat jede Abbildung $\mathfrak{a}_{\mathfrak{N}}$ trivialerweise die im Hilfssatz geforderte Eigenschaft, da das Urbild einer endlichen Menge stets wieder endlich ist. Auch sonst läßt sich der Beweis vereinfachen, da für „nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörig" schlicht „unendlich" eingesetzt werden kann.

Korollar 3. Die Forderung, daß $\mathfrak{P}$ eine abzählbare Basis besitzen soll, läßt sich bei Satz 13 offenbar ersetzen durch: Ist $\mathfrak{N} \notin \mathfrak{P}$, so existiert immer eine Abbildung $\mathfrak{a}_{\mathfrak{N}}$, bei der das Urbild einer zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Untermenge von $\mathfrak{N}$ stets selbst zu $\mathfrak{P}$ gehört. Es erhebt sich daher die Frage: Besitzen etwa alle $\mathfrak{E}$ umfassenden Antifilter $\mathfrak{P}$ die gewünschte Eigenschaft, kann also die Abzählbarkeitsvoraussetzung in Satz 13 entbehrt werden? — Wir gehen auf dieses Problem nicht näher ein; ebensowenig untersuchen wir die Modifikationen, die an unseren Überlegungen angebracht werden müssen, wenn wir die Voraussetzung der Abzählbarkeit von $\mathfrak{M}$ fallen lassen.

Aus Satz 13 ergibt sich insbesondere:

Satz 14. *Ist der Antifilter $\mathfrak{P} \geqq \mathfrak{E}$ abzählbar, so läßt sich die durch O_Ψ definierte Ordnung $\mathfrak{O}_\Psi$ stets als Konjunktion von totalen Ultrafilterordnungen $\mathfrak{T}_{\Phi_\tau}$ darstellen, die alle den gleichen Typ haben.*

Man hat nur zu beachten: Es gibt stets einen Ψ umfassenden Ultrafilter Φ. Die zu Φ gehörige T-Halbgruppe T_Φ umfaßt O_Ψ, sie enthält aber kein f mit $\Lambda^{-}(f) \in \Psi$. Die aus einer beliebigen Ultrafilterordnung $\mathfrak{T}_\Phi = \mathfrak{T}$ abgeleiteten Ordnungen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{N}}}$ sind nicht nur alle selbst Ultrafilterordnungen, sondern sie besitzen auch alle den gleichen Typ. — Bildet man weiter aus G mit Hilfe von $\mathfrak{P}$ die Gruppe $\tilde{G}_{\mathfrak{P}} = G/G(\mathfrak{P})$ mit der durch $\tilde{O}_\Psi = O_\Psi/G(\mathfrak{P})$ definierten natürlichen Ordnung $\tilde{\mathfrak{O}}_\Psi$, so erhält man aus dem letzten Resultat über $\mathfrak{O}_\Psi$ sofort:

Satz 14*. *Hat $\mathfrak{P} \geqq \mathfrak{E}$ eine abzählbare Basis, so ist die natürliche Ordnung $\mathfrak{O}_\Psi$ von $\tilde{G}_\Psi$ stets Konjunktion von totalen Ordnungen eines festen Typs.*

(Vgl. die Herleitung des Korollars zu Satz 6 aus dem Satz 6 selbst in § 3.) — Speziell für den Fall der Gruppe $\tilde{G}_{\mathfrak{E}}$ können wir also feststellen: Es handelt sich nur noch darum, für *irgendeinen* nichttrivialen Ultrafilter Φ von G die Konstitution der zugehörigen T-Halbgruppe T_Φ bzw. Ordnung $\mathfrak{T}_\Phi$ genau zu bestimmen. Dann hat man damit für $\mathfrak{O}_{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{E}}$ eine Konjunktionsdarstellung durch „bekannte" Totalordnungen gefunden. (Bei $O_{\mathfrak{E}}$ kann ja in Satz 13 für T jede Halbgruppe T_Φ mit nichttrivialem Φ eingesetzt werden.) Wir haben also durch die Einführung der Gruppen $T_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{N}}}$ bei $\tilde{G}_{\mathfrak{E}}$ eine gewisse Reduktion des Konjunktionsproblems über den in § 3 erreichten Standpunkt hinaus

erzielt: Statt auf die Menge *aller* nichttrivialen Ultrafilter kann man das Augenmerk auf einen *einzigen* (möglicherweise passend zu wählenden) Ultrafilter richten. Daß die Bedeutung der Reduktion nicht überschätzt werden darf, ist klar. Die Hauptschwierigkeit liegt nach wie vor gerade bei dem einzelnen Ultrafilter.

§ 7. Über a-Verbandsgruppen

Im folgenden werden wieder Funktionengruppen F, $\tilde{F}_{\mathfrak{p}}$ und ihre natürlichen Ordnungen $\mathfrak{O}$, $\tilde{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{p}}$ betrachtet, aber nicht mehr totale Ordnungen gesucht. F wird als Verbandsgruppe bezeichnet, wenn zu f, g in F stets ein (notwendig bis auf Ordnungsgleichheit eindeutig bestimmtes) Element $h = \inf(f, g)$ mit den folgenden Eigenschaften existiert: 1. $f > h$, $g > h$. 2. Aus $f > h'$, $g > h'$ folgt $h > h'$. Die Verbandsgruppe F soll *a-Verbandsgruppe* heißen, wenn es auch zu jeder abzählbaren Folge $f_1, f_2, \ldots$ in F ein $h = \inf_i f_i$ mit den entsprechenden Eigenschaften wie $\inf(f, g)$ gibt, falls nur die Folge der f_i *nach unten beschränkt* ist, d. h. falls für ein passendes f durchweg $f + f_i > 0$ wird[18]). — Die Gruppe R^* aller reellen Zahlen ist eine a-Verbandsgruppe; bei jeder nach unten beschränkten Zahlenfolge μ_i ist $\inf_i \mu_i$ gleich der unteren Grenze der μ_i im üblichen Sinne. Weitere a-Verbandsgruppen sind z. B.: 1. Die Gruppen R und G von § 1 bis § 6. — 2. Die Gruppe H' aller endlichwertigen ganzzahligen, sowie die Gruppe R_b aller beschränkten, reellwertigen Funktionen. — 3. Die in Beispiel d) von § 5 betrachtete Gruppe aller Lebesguesch integrierbaren Funktionen. In allen diesen Fällen ist $f = \inf_i f_i$ bei einer nach unten beschränkten Folge f_i „in natürlicher Weise" definiert durch „$f(\mu) = \inf_i(f_i(\mu))$ für alle μ". Keine a-Verbandsgruppe ist die Gruppe H aller endlichwertigen reellen Funktionen oder die Gruppe S aller in $a \leq \mu \leq b$ stetigen Funktionen von Beispiel b), § 5.

Die Gruppe S soll unter der für die Bezeichnung angenehmen Annahme $a = -1$, $b = +1$ etwas näher betrachtet werden. Es gibt in S eine Folge f_i bzw. f_i', die im üblichen Sinne monoton abnehmend gegen die (nicht zu S gehörige) durch $f(\mu) = 0$ $(-1 \leq \mu < 0)$, $f(\mu) = 1$ $(0 \leq \mu \leq 1)$ bzw. $f'(\mu) = 0$ $(\mu \neq 0)$, $f'(0) = 1$ definierte Funktion f bzw. f' konvergiert. Für $f_1, f_2, \ldots$ existiert $\inf_i f_i$ in S *nicht*; ist nämlich g stetig und $f_i > g$ $(i = 1, 2, \ldots)$, so gibt es immer ein stetiges $g_1 > g$ mit $f_i > g_1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Bei $f_1', f_2', \ldots$ wird *in* S $\inf_i f_i' = 0$. Aber 0 ist *nicht* $\inf_i f_i'$ „in natürlichem Sinne". Es ändert sich also $\inf_i f_i$, wenn man S in die Obergruppe G einbaut. Anknüpfend an

[18]) Aus der Gruppeneigenschaft folgt sofort: Die Verbandsgruppe F enthält zu a, b nicht nur $\inf(a, b)$, sondern auch ein analog unter Vertauschung von $>$ und $<$ definiertes Element $\sup(a, b)$, wobei $\inf(a, b) + \sup(a, b) = a + b$. Es bildet also F tatsächlich eine Verbandsgruppe im Sinne von Lorenzen [2]. — Bei Bourbaki [1], der von „groupes réticulés" spricht, treten auch „totale" Verbandsgruppen auf, die zu jeder nach unten beschränkten Untermenge N von F stets $\inf f$ („$f \in N$") enthalten. Die a-Verbandsgruppen stehen gewissermaßen zwischen den Verbandsgruppen schlechthin und den totalen Verbandsgruppen. Die im Text als Beispiel 3 betrachtete a-Verbandsgruppe aller in einem Intervall $a \leq \mu \leq b$ beschränkten Lebesguesch meßbaren Funktionen ist *keine* totale Verbandsgruppe.

diese letzte Bemerkung wollen wir eine Funktionengruppe F eine *reguläre a-Verbandsgruppe* nennen, wenn für jede nach unten beschränkte Folge $f_1, f_2, \ldots$ aus F die *in natürlicher Weise* definierte untere Grenze $\inf_i f_i$ gleichfalls zu F gehört. — Natürlich kann man den Begriff der a-Verbandsgruppe (ebenso wie den der Verbandsgruppe) bei allen geordneten Gruppen einführen, insbesondere auch bei den Gruppen $\tilde{F}_\mathfrak{P}$, die sich nach § 3 aus einer Funktionengruppe F ableiten lassen. — Wir gehen nun von einer regulären a-Verbandsgruppe F aus und fragen, wann eine mit Hilfe eines gegebenen Antifilters definierte Restklassengruppe $\tilde{F}_\mathfrak{P}$ ihrerseits eine a-Verbandsgruppe ist[19]).

Satz 15. a) *Ist der Antifilter* $\mathfrak{P}$ *a-abgeschlossen, d.h. enthält* $\mathfrak{P}$ *mit einer Mengenfolge* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ *immer auch* $\bigcup_n \Lambda_n$, *so ist* $\tilde{F}_\mathfrak{P}$ *stets eine a-Verbandsgruppe.* b) *Ist* $\mathfrak{P}$ *nicht a-abgeschlossen, so ist* $\tilde{F}_\mathfrak{P}$ *im allgemeinen keine a-Verbandsgruppe* (*Beispiele* $F=R$, $F=G$, $F=R_b$).

Beweis. a) Es sei $\tilde{f}_0+\tilde{f}_i \in \tilde{O}_\mathfrak{P}$ in $\tilde{F}_\mathfrak{P}$ $(i=1, 2, \ldots)$, und es sei f_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ ein Repräsentant der Restklasse $\tilde{f}_i$. Dann gibt es ein $\Lambda_i \in \mathfrak{P}$ für jedes $i=1, 2, \ldots$, derart daß $f_0(\mu)+f_i(\mu) \geq 0$ für alle $\mu \in \mathfrak{M}-\mathfrak{N}_i$. Nach Voraussetzung ist nun $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2 \cup \cdots = \mathfrak{N} \in \mathfrak{P}$; für alle $\mu \in \mathfrak{M}-\mathfrak{N}$ wird $\inf_i(f_i(\mu))$ endlich. Definieren wir f durch $f(\mu)=\inf_i(f_i(\mu))$ $(\mu \in \mathfrak{M}-\mathfrak{N})$, $f(\mu)=0$ $(\mu \in \mathfrak{N})$, so ist $\tilde{f}_i > \tilde{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$ wegen $\mathfrak{N} \in \mathfrak{P}$. Ist ferner $\tilde{f}_i > \tilde{g}$ $(i=1, 2, \ldots)$ und g ein Repräsentant von $\tilde{g}$ sowie $\Lambda_i = \Lambda^-(f_i-g)$, $\Lambda^-(f-g)=\Lambda$, dann haben wir: $\Lambda_i \in \mathfrak{P}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N} \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \in \mathfrak{P}$, $\Lambda \subseteq \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \ldots$, $\Lambda \in \mathfrak{P}$, also $\tilde{f} > \tilde{g}$. — b) Wir behandeln zunächst den Fall der Gruppe R_b aller beschränkten reellwertigen Funktionen. Ist $\mathfrak{P}$ nicht a-abgeschlossen, so gibt es, da $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ immer auch $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$ enthält, sicher in $\mathfrak{P}$ eine monoton zunehmende Mengenfolge $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \cdots = \mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N} \notin \mathfrak{P}$. Dann haben wir auch $\Lambda_i \notin \mathfrak{P}$ für $\Lambda_i = \mathfrak{N}' - (\mathfrak{N}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{N}_i)$. — Wir können und wollen uns nun auf solche $f \in R_b$ beschränken, bei denen $f(\mu)=0$ $(\mu \in \mathfrak{M}-\mathfrak{N})$; diese f werden als Funktionen auf $\mathfrak{N}$ (statt auf $\mathfrak{M}$) behandelt. Es sei ε_i $(i=1, 2, \ldots)$ eine monoton zu 0 abnehmende Folge von positiven reellen Zahlen und es werde f_i durch $f_i(\mu)=0$ $(\mu \in \mathfrak{N}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{N}_i)$, $f_i(\mu)=\varepsilon_i$ $(\mu \in \Lambda_i)$ definiert. Die Folge $f_1, f_2, \ldots$ ist dann nach unten beschränkt $(\inf_i f_i = 0)$, und es gilt: Es ist dann und nur dann $\tilde{f}_i > \tilde{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$, wenn es zu einem (und damit zu jedem) Repräsentanten f aus $\tilde{f}$ ein $\overline{\Lambda}(\varepsilon) \in \mathfrak{P}$ gibt, derart, daß $f(\mu) \leq \varepsilon$ $(\mu \in \mathfrak{N}-\overline{\Lambda}(\varepsilon))$. — In der Tat $\tilde{f}_i > \tilde{f}$ bedeutet die Existenz eines $\overline{\Lambda}_i \in \mathfrak{P}$, derart daß $f(\mu) \leq \varepsilon_i$ $(\mu \in \mathfrak{N}-\overline{\Lambda}_i)$. Wegen $\varepsilon_i \to 0$ ist also unsere Bedingung notwendig. Ist sie andererseits erfüllt, so haben wir $\tilde{f}_i > \tilde{f}$ wegen $\overline{\Lambda}(\varepsilon_i) \cap \mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_i \in \mathfrak{P}$ $(i=1, 2, \ldots)$. — Es sei nun $\tilde{f}_i > \tilde{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$, f ein Repräsentant der Klasse $\tilde{f}$, und es sei g definiert durch $g(\mu)=f(\mu)+\varepsilon_1$ $(\mu \in \mathfrak{N}_1)$, $g(\mu)=f(\mu)+\varepsilon_{i+1}$ $(\mu \in \mathfrak{N}_{i+1}-\mathfrak{N}_i)$

[19]) Den Ausgangspunkt für die Aufstellung von Satz 15 bildete die Bemerkung, daß $\tilde{G}_\mathfrak{E}$ *keine* a-Verbandsgruppe ist. Zu ihr wiederum wurde ich durch BOURBAKI [1] § 1 geführt, wo in Aufgabe 34 gewisse „pathologische" Eigenschaften der Gruppe $\tilde{G}_\mathfrak{E}$ festgestellt werden, die im übrigen aus dem Rahmen unserer Betrachtungen fallen.

$(i=1, 2, \ldots)$. Dann ist nach unserem Kriterium $\tilde{f}_i > \tilde{g}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Andererseits ist *nicht* $f > \tilde{g}$, da $g(\mu) > f(\mu)$ auf ganz N und $\mathsf{N} \notin \mathsf{P}$. — Das soeben konstruierte Beispiel ist natürlich wegen $R > R_b$ auch für die Gruppe R brauchbar. Für G muß man eine etwas andere Konstruktion machen. N_i, N, Λ_i sollen die gleiche Bedeutung haben wie bisher, dagegen werde diesmal f_i durch $f_n(\mu) = -n$ $(\mu \in \mathsf{N})$ erklärt. Dann ist die Folge $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots$ (im Gegensatz zu der Folge $f_1, f_2, \ldots$) nach unten beschränkt; denn man hat $\tilde{f}_0 + \tilde{f}_i \in \tilde{O}_\mathsf{P}$, falls $\tilde{f}_0$ durch $f_0(\mu) = 1$ $(\mu \in \mathsf{N}_1)$, $f_0(\mu) = i+1$ $(\mu \in \mathsf{N}_{i+1} - \mathsf{N}_i)$ definiert wird. Es sei jetzt $\tilde{f}_i > \tilde{f}$ $(i=1, 2, \ldots)$ und f ein Repräsentant von $\tilde{f}$. Dann gehört $\overline{\Lambda}_i = \Lambda$ $(f \geq 1-i)$ wegen $\tilde{f}_i > \tilde{f}$ zu P. Bedeutet nun $g(\mu)$ die durch $g(\mu) = f(\mu) + 1$ $(\mu \in \mathsf{N})$ festgelegte Funktion, so ist $\tilde{f} - \tilde{g} \in \tilde{O}_\mathsf{P}$ wegen $\mathsf{N} \notin \mathsf{P}$. Andererseits hat man $\tilde{f}_i > \tilde{g}$ wegen $\Lambda(g \geq 1-i) = \overline{\Lambda}_i \in \mathsf{P}$.

Aus Satz 15 a) ergibt sich insbesondere die (letzten Endes wohlbekannte) Tatsache, daß die in Beispiel c), § 5 betrachtete Gruppe $\tilde{F}_\mathsf{P} = \tilde{F}$ eine a-Verbandsgruppe ist. Daß man in Satz 15 b) nicht einfach behaupten kann: „Ist P nicht a-abgeschlossen, so ist $\tilde{F}_\mathsf{P}$ niemals eine a-Verbandsgruppe", zeigt das Beispiel der Gruppe H' aller ganzzahligen, beschränkten und damit endlichwertigen Funktionen. Denn bei ihr wird H'_P *immer* eine a-Verbandsgruppe bei beliebiger Wahl des Antifilters P. Die Frage ob noch weitere reguläre a-Verbandsgruppen F existieren, bei denen zum mindesten für gewisse nicht a-abgeschlossene Antifilter P auch $\tilde{F}_\mathsf{P}$ eine a-Verbandsgruppe darstellt, soll hier offengelassen werden.

§ 8. Eine Bemerkung über freie Moduln

Die folgenden Betrachtungen hängen mit § 1 bis § 7 nur dadurch zusammen, daß wieder Funktionen — allerdings diesmal Funktionenmoduln an Stelle von Funktionengruppen —, untersucht werden, und daß beim Beweis an entscheidender Stelle eine Abzählbarkeitsüberlegung, ähnlich wie in § 4, auftritt.

Es sei I ein beliebiger, echter Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K $(I \neq K!)$. Wie früher sei M eine beliebige, unendliche Argumentmenge; M sei die Menge aller überall auf M definierten eindeutigen Funktionen, mit Werten aus I, und zwar werde M als *I-Modul* aufgefaßt. Im Sinne von BOURBAKI ist $M = I^\mathsf{M}$.) Ein beliebiger I-Modul N möge wie üblich *frei* heißen, wenn in N eine Menge von über K linear unabhängigen Elementen g_τ existiert, derart daß jedes $f \in N$ in einem aus endlich vielen Elementen $g_{\tau_1}, \ldots, g_{\tau_n}$ erzeugten I-Modul $\{g_{\tau_1}, \ldots, g_{\tau_n}\}$ enthalten ist. Das Ziel von § 8 ist der Beweis von

Satz 16. *Ist I ein beliebiger echter Integritätsbereich und M unendlich, so ist der Modul $M = I^\mathsf{M}$ nie frei*[20]).

[20]) In BOURBAKI [2] § 3, Aufgabe 10 wird ein Beweis von Satz 16 für den Fall skizziert, daß I ein Hauptidealring mit unendlich vielen verschiedenen Primelementen ist. Die

Wir definieren zunächst: I möge *a-höhenendlich* für ein $a \in I$ genannt werden, wenn für jedes $b \neq 0$ in I ein n existiert, derart daß $b \cdot a^{-n} \in I$. Andererseits soll ein $f \in N$ *a-höhenendlich* heißen oder *a-höhenendlich in N* je nachdem ob die Gleichungen $a^n \cdot x = f$ $(n = 1, 2, \ldots)$ für alle n in M lösbar sind oder nicht. Es gilt dann jedenfalls: *Ist I a-höhenendlich, so ist in einem freien Modul N jedes* $f \neq 0$ *a-höhenendlich.* Ist nämlich $f = \sum_{i=1,\ldots,n} a_i \cdot g_{\tau_i}$, so ist wegen der linearen Unabhängigkeit der g_{τ_i} über K sicher $\sum_{i=1,\ldots,n} (a^{-n} \cdot a_i)\, g_{\tau_i}$ die einzige Lösung der Gleichung $a^n \cdot x = f$, und es gehört diese Lösung dann und nur dann zu N, wenn $a^{-n} \cdot a_i \in I$ $(i = 1, \ldots, n)$. — Wir beweisen Satz 16 zunächst unter der Voraussetzung, daß ein $a \neq 0$ in I existiert, so daß I a-höhenendlich.

Es seien $\mu_1, \mu_2, \ldots$ abzählbar unendlich viele Elemente von M, und es sei M_0^* die Vereinigungsmenge aller μ_i. Ferner werde f_i definiert durch: $f_i(\mu_i) = 1$, $f_i(\mu) = 0$ $(\mu \neq \mu_i)$, und es bedeute M_0 den Modul aller der f, die den folgenden Bedingungen genügen: 1. $f(\mu) = 0$ $(\mu \in \mathsf{M} - \mathsf{M}_0)$. 2. Zu jeder ganzen positiven Zahl n gibt es ein $\mathsf{N}(f; n)$ derart, daß $f(\mu_i)$ für alle $i > \mathsf{N}(f; n)$ in I durch a^n teilbar ist. Man sieht nun sofort: Ist N ein Untermodul von M, der $f_1, f_2, \ldots$ enthält, so ist in dem Restklassenmodul M/N jede durch ein $f \in M_0$ erzeugte Restklasse $\tilde{f}$ a-höhenunendlich. [Beachte: $f - f(\mu) \cdot f_1 - \cdots - f(\mu_{\mathsf{N}}) \cdot f_{\mathsf{N}} = a^n \cdot h$ $(h \in M)$ für $\mathsf{N} = \mathsf{N}(f; n)$ $a^n \cdot \tilde{h} = \tilde{f}$ in M/N.] — Ist andererseits M frei, so kann man abzählbar unendlich viele Basiselemente $g_{\tau_1}, \ldots$ von M so bestimmen, daß der durch die g_{τ_i} erzeugte Modul $N = \{g_{\tau_1}, g_{\tau_2}, \ldots\}$ alle f_i enthält. Der Modul M/N ist frei; eine Basis für $M/N = \tilde{M}$ bildet die Menge aller Restklassen $\tilde{g}_\tau$ $(g_\tau \neq g_{\tau_i}$ $(i = 1, 2, \ldots))$. Es ist also wie schon oben gezeigt in M/N jedes $\tilde{f} \neq \tilde{o}$ a-höhenendlich. Für jedes $f \in M_0$ muß daher $\tilde{f} = \tilde{o}$ sein, d.h. wir haben $M_0 \subseteqq N$. Um die Annahme „M frei" zu widerlegen, genügt es somit zu zeigen: *Es gibt stets ein nicht zu* $N = \{g_{\tau_1}, g_{\tau_2}, \ldots\}$ *gehöriges* $f \in M_0$. Da aber jedes $f \in N$ bereits in einem endlichen Modul $N_n = \{g_{\tau_1}, \ldots, g_{\tau_n}\}$ liegt, ergibt sich die Existenz eines f der von uns gewünschten Art durch einen trivialen Induktionsschluß aus der folgenden Bemerkung: Sind n und N beliebig vorgegeben, so kann man die Funktionswerte $(i = \mathsf{N} + 1, \ldots, \mathsf{N} + n)$ so festlegen, daß $f(\mu_i) = a^n \cdot b_i$ $(b_i \in I)$, und daß das Gleichungssystem $\sum_{k=1,\ldots,n-1} g_{\tau_k}(\mu_i) = f(\mu_i)$ in I unlösbar ist. Die Richtigkeit der „Bemerkung" aber ist fast trivial. Man beachte: Da es sich um n Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten handelt, gibt es jedenfalls Elemente b_i $(i = \mathsf{N} + 1, \ldots, \mathsf{N} + n)$ in I, derart daß unser Gleichungssystem sogar im Quotientenkörper K von I unlösbar für $f(\mu_i) = b_i$; dann aber ist unser System auch unlösbar für $f(\mu_i) = a^n \cdot b_i$.

Einführung der Unendlichkeitsbedingung — die darauf hinweist, daß die Überflüssigkeit dieser Forderung nicht bekannt war — ist vor allem deshalb überraschend, weil die im Aufgabenteil von BOURBAKI [2] § 2 eingeführten Begriffsbildungen ohne weiteres ausreichen, um Satz 16 für beliebige Hauptidealringe (nach der in unserem Text benutzten Methode) sehr rasch und elementar abzuleiten.

In der Mehrzahl der praktisch wichtigen Integritätsbereiche I gibt es Elemente $a \neq 0$, für die I a-höhenendlich; z.B. kann in einem Integritätsbereich mit Maximalbedingung für a jede von 0 verschiedene Nichteinheit gewählt werden. Ein Beispiel für ein I, das hinsichtlich keines $a \neq 0$ höhenendlich, liefert ein Bewertungsring, in dessen Wertgruppe zu jedem Wert β im Sinne von § 4 ein Wert $\gamma \gg \beta$ existiert. Es sei jetzt I ein beliebiger Integritätsbereich von diesem für uns ungünstigen Typus, $a \neq 0$ irgendeine Nichteinheit aus I; die Moduln M_0 und $N = \{g_{\tau_1}, g_{\tau_2}, \ldots\}$ seien genau so definiert wie in dem bereits erledigten einfachen Fall. Dann kann aus der Tatsache, daß $M/N = \tilde{M}$ ein freier Modul mit den $\tilde{g}_\sigma$ $(g_\sigma \neq g_{\tau_i})$; $(i = 1, 2, \ldots)$ als Basiselementen ist, diesmal nur geschlossen werden: Für jedes $f \in M_0$ muß eine Gleichung $f = \sum_{i=1,\ldots,n} a_i \cdot g_{\tau_i} + \sum_{k=1,\ldots,m} b_k \cdot g_{\sigma_k}$ gelten, bei der alle b_k a-höhenunendlich sind. Aus $g_{\sigma_k} \in M$ und der Tatsache, daß die a-höhenunendlichen Elemente in I ein Ideal bilden, folgert man weiter: Bei $g = f - \sum_{i=1,\ldots,n} a_i \cdot g_\tau$ ist $g(\mu)$ a-höhenunendlich für alle μ. Wir haben also diesmal ein $f \in M_0$ zu konstruieren, derart daß g bei beliebig großem n und beliebiger Wahl der a_i dieser Bedingung ***nicht*** genügt. Dazu brauchen wir den folgenden

Hilfssatz. *Zu jeder Nichteinheit $a \neq 0$ aus I gibt es ein a nicht enthaltendes Primideal $\mathfrak{p}$, derart daß alle $b \notin \mathfrak{p}$ a-höhenendlich sind.*

Nehmen wir den Beweis, der später nachgetragen werden soll, als bereits geführt an, so können wir ganz analog schließen wie im einfachen Fall, mit dem einen Unterschied, daß diesmal gezeigt werden muß: Bei passender Wahl der $c_i \in I$ kann für kein System $x_1, \ldots, x_{n-1}$ aus I jemals

$$\sum_{k=1,\ldots,n-1} x_k \cdot g_{\tau_k}(\mu) - a^n \cdot c_i \in \mathfrak{p} \qquad (i = \mathsf{N}+1, \ldots, \mathsf{N}+n)$$

werden. Diese Behauptung ist aber wieder sehr leicht zu beweisen: Ist $\bar{K}$ der Quotientenkörper des Restklassenrings $\bar{I} = I/\mathfrak{p}$ und bedeutet $\bar{c}$ die jeweils durch $c \in I$ repräsentierte Restklasse aus $\bar{I}$, so wähle man c_i $(i = \mathsf{N}+1, \ldots, \mathsf{N}+n)$ so, daß das Gleichungssystem $\sum_{k=1,\ldots,1-1} x_k \cdot \overline{g_{\tau_k}(\mu)}\, \bar{c}_i$ in $\bar{K}$ unlösbar wird.

Nun zum Beweis des Hilfssatzes[21])! Es sei $\mathfrak{p}_0$ ein minimales Primoberideal des Hauptideals $(a) \cdot I$. Im Ring $\bar{I}$ aller Quotienten $b \cdot c^{-1}$ $(b, c \in I,\ c \in \mathfrak{p}_0)$ ist $\tilde{\mathfrak{p}}_0 = \mathfrak{p}_0 \cdot \tilde{I}$ das einzige maximale Primideal und $(a) \cdot \tilde{I}$ ein zu $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ gehöriges Primärideal. Es kann daher kein Primideal $\tilde{\mathfrak{p}} \neq \tilde{\mathfrak{p}}_0$ aus I das Element a enthalten und daraus folgt sofort: Ist $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein (sicher vorhandenes) Primideal aus $\tilde{I}$, das a nicht enthält und zu dem es kein echtes Primoberideal mit der gleichen Eigenschaft gibt, so ist $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein unmittelbares Primunterideal von $\tilde{\mathfrak{p}}_0$. Setzen wir daher $\bar{I} = \tilde{I}/\tilde{\mathfrak{p}}$, und bezeichnen wir allgemein mit $\bar{b}$ die durch $b \in \tilde{I}$ repräsentierte Restklasse aus $\bar{I}$, so wird $\bar{I}$ ein primärer Integritätsbereich mit dem einzigen vom Nullideal verschiedenen Primideal $\bar{\mathfrak{p}}_0 = \tilde{\mathfrak{p}}_0/\tilde{\mathfrak{p}}$, und es ist daher $(\bar{b}) \cdot \bar{I}$ entweder gleich $\bar{I}$ oder ein zu $\bar{\mathfrak{p}}_0$ gehöriges Primärideal für jedes $b \in \tilde{\mathfrak{p}}$

[21]) Zu den im folgenden idealtheoretischen Überlegungen vgl. KRULL [2].

aus $\bar{I}$. Daher folgt weiter: $\bar{I}$ *ist* $\bar{a}$*-höhenendlich*, denn für $\bar{b} \neq \bar{O}$ haben wir nach bereits Bewiesenem: $\bar{a}^{n-1} \in (\bar{b}) \cdot \bar{I}$ d. h. $\bar{a}^{n-1} = \bar{b} \cdot \bar{c}$ $(\bar{c} \in \bar{I})$ für hinreichend großes n. Daraus ergibt sich weiter: $\bar{b} \cdot \bar{a}^{-n} = (\bar{c} \cdot \bar{a})^{-1} \notin \bar{I}$ wegen $\bar{c} \cdot \bar{a} \in \bar{\mathfrak{p}}_0$. — Wir setzen nun $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} \cap I$ und beachten: Ist für $b \in I$ etwa $b \cdot a^{-n} \in I$, d. h. $b = a^n \cdot c$ $(c \in I)$, so haben wir auch $\bar{b} = \bar{a}^n \cdot \bar{c}$, $\bar{b} \cdot \bar{a}^{-n} \in \bar{I}$. Ist daher $b \in I$ a-höhenunendlich, so ist auch $\bar{b} \in \bar{I}$ a-höhenunendlich und wir erhalten $\bar{b} = \bar{O}$ $b \in \bar{\mathfrak{p}} \cap I = \mathfrak{p}$. Das Primideal $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} \cap I$ genügt also der Bedingung des Hilfssatzes.

Literatur

BOURBAKI: [*1*] Algèbre; Groupes et corps ordonnés, Chap. VI. Paris 1952. — [*2*] Algèbre; Modules sur les anneaux principaux, Chap. VII. Paris 1952. — [*3*] Topologie générale I. Paris 1951.

LORENZEN: [*1*] Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. Math. Z. **45**, 533—553 (1939). — [*2*] Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. **52**, 483—526 (1950).

BIRKHOFF: [*1*] Lattice Theory, Chap. 10. New York 1948.

KRULL: [*1*] Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160—196 (1932). — [*2*] Idealtheorie ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Ann. **101** (1929), insbesondere S. 737 unten.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 31. März 1955)

Zusatz bei der Korrektur. Herr JÜRGEN SCHMIDT machte mich darauf aufmerksam, daß die Vermutung, es seien bei abzählbaren $\mathfrak{M}$ alle nichttrivialen Ultrafilter äquivalent, durch eine einfache „Abzählung" widerlegt werden kann. (Die Menge aller nichttrivialen Ultrafilter ist von größerer Mächtigkeit als die Menge aller Permutationen von $\mathfrak{M}$.) — Unsere Untersuchungen über abzählbare Filter können also die voreilige Äquivalenzvermutung nicht stützen. Sie behalten aber insofern ihren Wert als sie zeigen, daß man bei jeder Unterscheidung von Klassen nichtäquivalenter Ultrafilter notwendig über das Abzählbare hinausgehen muß. Die Bedeutung der Aufgabe, mindestens einen nichttrivialen Ultrafilter im Sinne des Schlusses von § 2 explizit darzustellen, tritt so besonders klar hervor. Wegen der Schwierigkeit dieses Problems wird man sich zu seiner Behandlung allerdings nach neuen Methoden umsehen müssen. Hier sei folgender Hinweis gestattet: Vielleicht ist der richtige Ausgangspunkt der konstruktive Aufbau der Analysis, der von P. LORENZEN geschaffen und neuerdings (in der gelben Sammlung) auch lehrbuchmäßig dargestellt wurde. Allerdings scheint es auf den ersten Blick, als ob man so nur zu Paradoxien kommen könne. Denn bei dem „schichtweisen" Aufbau der Analysis im Sinne LORENZENS kommt man in *keiner* Schicht über das Abzählbare hinaus. Man könnte also meinen, es müßten notwendig alle nichttrivialen Ultrafilter äquivalent werden. Indessen hat LORENZEN schon in anderen Fällen gezeigt, daß die gefürchteten Schwierigkeiten nicht eintreten. So gibt es bei ihm durchaus Mengen positiven LEBESGUEschen Maßes — trotz des bekannten klassischen Satzes, daß alle abzählbaren Mengen das Maß Null haben. Auch ist in seinem Rahmen eine Theorie höherer Mächtigkeiten möglich, wie bisher unveröffentlichte Untersuchungen von E. WETTE zeigen. Die „Überabzählbarkeitsprobleme" der Ultrafiltertheorie dürften also den Methoden LORENZENS durchaus zugänglich sein und gerade von der Beseitigung der scheinbaren Paradoxien darf man wertvolle neue Erkenntnisse erwarten.

HSIUNG, CH.-CH.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 41—46 (1956)

A theorem on surfaces with a closed boundary

By
CHUAN-CHIH HSIUNG

§ 1. Introduction

The purpose of this paper is to prove the following

Theorem. *Let S and S^* be two orientable surfaces of class C''' in a three-dimensional Euclidean space E^3 with positive Gaussian curvatures and closed boundaries C and C^* respectively. Suppose that there is a one-to-one correspondence between the points of the two surfaces S and S^* such that at corresponding points the two surfaces S and S^* have the same normal vectors and equal sums of the principal radii of curvature, and such that at corresponding points the two boundaries C and C^* have the same tangent vectors and equal linear elements. Then the two surfaces S and S^* are congruent or symmetric.*

For two closed surfaces S and S^*, this theorem is due to E. B. CHRISTOFFEL [*1*] and was reproved by A. HURWITZ [*2*] by using spherical harmonics. A generalization of this theorem to hypersurfaces of an arbitrary dimension $n(>1)$ will be studied on a later occasion.

§ 2. Preliminaries

In a three-dimensional Euclidean space E^3, let us consider a fixed orthogonal frame $0\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_3$ with a point 0 as the origin. Let i_1, i_2, i_3 be the unit vectors from the origin 0 in the directions of the vectors $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$, and let A^j_α $(j=1, 2, 3)$ be the components of a vector A_α $(\alpha=1, 2)$[1]) with respect to the frame $0\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_3$, then the scalar product and the vector product of the two vectors A_1 and A_2 are respectively defined in the usual way as follows:

$$A_1 \cdot A_2 = \sum_i A^i_1 A^i_2, \tag{2.1}$$

$$A_1 \times A_2 = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

Now we consider a surface S of class C''' in the space E^3. Let (x^1, x^2, x^3) be the coordinates of a point P in E^3 with respect to the orthogonal frame

[1]) Throughout this paper all Latin indices take the values 1, 2, 3 and Greek indices the values 1, 2 unless stated otherwise. We shall also follow the convention that repeated indices imply summation.

$0\ \mathfrak{y}_1\ \mathfrak{y}_2\ \mathfrak{y}_3$, then the surface S can be given by the parametric equations

$$x^i = f^i(u^1, u^2), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2.3}$$

or the vector equation

$$X = F(u^1, u^2), \tag{2.4}$$

where x^i and f^i are respectively the components of the two vectors X and F, the two parameters u^1 and u^2 take values in a simply connected domain D of the two-dimensional real number space, $f^i(u^1, u^2)$ are of the third class and the Jacobian matrix $\|\partial x^i/\partial u^\alpha\|$ is of rank two at all points of D. If we denote the vector $\partial X/\partial u^\alpha$ by X_α for $\alpha = 1, 2$, then the first fundamental form of the surface S at a point P is

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \tag{2.5}$$

where

$$g_{\alpha\beta} = X_\alpha \cdot X_\beta, \tag{2.6}$$

and the matrix $\|g_{\alpha\beta}\|$ is positive definite so that the determinant

$$g = |g_{\alpha\beta}| > 0. \tag{2.7}$$

Let N be the unit normal vector of the surface S at a point P, and N_α the vector $\partial N/\partial u^\alpha$, then

$$N_\alpha = -\, b_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma}\, X_\gamma, \tag{2.8}$$

where

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\, X_\alpha \cdot N_\beta \tag{2.9}$$

are the coefficients of the second fundamental form of the surface S at the point P, and $g^{\beta\gamma}$ denotes the cofactor of $g_{\beta\gamma}$ in g divided by g so that

$$g^{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \tag{2.10}$$

δ^α_γ being the KRONECKER deltas. The two principal curvatures k_1 and k_2 of the surface S at the point P are the roots of the determinant equation

$$|b_{\alpha\beta} - k\, g_{\alpha\beta}| = 0, \tag{2.11}$$

from which we obtain the Gaussian curvature K and mean curvature H of the surface S at the point P:

$$K = b/g, \quad H = \tfrac{1}{2}\, b_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta}, \tag{2.12}$$

where $b = |b_{\alpha\beta}|$.

The third fundamental form of the surface S at the point P is

$$dN \cdot dN = f_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \tag{2.13}$$

where we have placed

$$f_{\alpha\beta} = N_\alpha \cdot N_\beta. \tag{2.14}$$

From equations (2.6), (2.8) and (2.10), it follows immediately that

$$f_{\alpha\beta} = b_{\alpha\varrho} b_{\beta\sigma} g^{\varrho\sigma}, \tag{2.15}$$

and therefore that

$$g^{\alpha\beta} = f_{\varrho\sigma} b^{\alpha\varrho} b^{\beta\sigma}, \tag{2.16}$$

where $b^{\alpha\varrho}$ denotes the cofactor of $b_{\alpha\varrho}$ in b divided by b. It is easily seen that the two principal radii of curvature $r_1 = 1/k_1$ and $r_2 = 1/k_2$ of the surface S at the point P are the roots of the determinant equation

$$|b_{\alpha\beta} - r f_{\alpha\beta}| = 0, \tag{2.17}$$

from which we obtain

$$r_1 r_2 = b/f, \quad r_1 + r_2 = b_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}, \tag{2.18}$$

where $f^{\alpha\beta}$ denotes the cofactor of $f_{\alpha\beta}$ in the determinant $f = |f_{\alpha\beta}|$ divided by f. From equations (2.12) and (2.18) it follows immediately that

$$f = K^2 g > 0. \tag{2.19}$$

The area element of the surface S at the point P is given by

$$dA = g^{1/2}\, du^1\, du^2. \tag{2.20}$$

Now we choose the direction of the unit normal vector N in such a way that the frame PX_1X_2N is a right-handed system. Then from equations (2.2) and (2.20) it follows that

$$g^{1/2} N = X_1 \times X_2, \tag{2.21}$$

$$|X_1, X_2, N| = g^{1/2}. \tag{2.22}$$

§ 3. An integral formula

Suppose that there is a one-to-one correspondence between the points of two surfaces S and S^* of class C''' with positive Gaussian curvatures and closed boundaries C and C^* respectively in a space E^3 such that the two surfaces S and S^* have the same normal vectors at corresponding points. Without loss of generality we may assume that the corresponding points of the two surfaces S and S^* have the same local coordinates u^1 and u^2. Then § 2 can be applied to the surface S, and for the corresponding quantities for the surface S^* we shall use the same symbols with a star.

At first, we observe that the vector $N \times X_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) is perpendicular to the normal vector N and that the two vectors N_1 and N_2 are linearly independent in the tangent plane of the surface S at the point P. Therefore $N \times X_\alpha$ can be written in the form

$$N \times X_\alpha = a^{\alpha\beta} N_\beta. \tag{3.1}$$

Taking the scalar products of the both sides of equation (3.1) with the vector X_γ and making use of equations (2.9), (2.12), (2.18) and (2.22), we can easily determine $a^{\alpha\beta}$ and thus obtain

$$N\times X_\alpha=\frac{1}{\sqrt{f}}(b_{2\alpha}N_1-b_{1\alpha}N_2),\qquad(\alpha=1,2). \tag{3.2}$$

By means of equations (2.8), (2.12) and (2.21), it is easily seen that

$$\frac{\partial}{\partial u^2}(N\times X_1)-\frac{\partial}{\partial u^1}(N\times X_2)=N_2\times X_1-N_1\times X_2=2H\sqrt{g}\,N. \tag{3.3}$$

Thus, from equations (3.2) and (3.3),

$$2H\sqrt{g}\,N=\sum_{\substack{\beta=1\\(\beta\neq\alpha)}}^{2}(-1)^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{b_{2\beta}}{\sqrt{f}}N_1-\frac{b_{1\beta}}{\sqrt{f}}N_2\right). \tag{3.4}$$

Taking the scalar products of the both sides of equation (3.4) with the position vector X^* of the surface S^*, we obtain in consequence of the analogue ot equation (2.9) for the surface S^*

$$\left\{\begin{aligned}2H\sqrt{g}\,p^*=&\sum_{\substack{\beta=1\\(\beta\neq\alpha)}}^{2}(-1)^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{b_{2\beta}}{\sqrt{f}}X^*\cdot N_1-\frac{b_{1\beta}}{\sqrt{f}}X^*\cdot N_2\right)-\\&-\frac{1}{\sqrt{f}}(b_{11}b^*_{22}-2b_{12}b^*_{21}+b_{22}b^*_{11}),\end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

where we have placed

$$p^*=X^*\cdot N. \tag{3.6}$$

Integrating equation (3.5) with respect to u^1 and u^2 over the surface S and applying the GREEN's theorem to the first term on the right side of equation (3.5), we then have

$$\left\{\begin{aligned}\iint_S 2H\sqrt{g}\,p^*\,du^1\,du^2=&\int_C\frac{1}{\sqrt{f}}(b_{1\alpha}X^*\cdot N_2-b_{2\alpha}X^*\cdot N_1)\,du^\alpha-\\&-\iint_S\frac{1}{\sqrt{f}}(b_{11}b^*_{22}-2b_{12}b^*_{21}+b_{22}b^*_{11})\,du^1\,du^2.\end{aligned}\right. \tag{3.7}$$

§ 4. Proof of the theorem

Let t be the unit tangent vector of the boundary C at a point P, and n the unit tangent vector of the surface S at the point P such that t, n and N form a right-handed system. Then we obtain, by means of equations (3.2),

$$\left\{\begin{aligned}t&=X_\alpha\frac{du^\alpha}{ds},\\n&=-t\times N=\frac{1}{\sqrt{f}}(b_{2\alpha}N_1-b_{1\alpha}N_2)\frac{du^\alpha}{ds},\end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

and therefore equation (3.7) reduces to

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \iint_S 2H\sqrt{g}\,p^*\,du^1\,du^2+\int_C X^*\cdot n\,ds \\ \qquad =-\iint_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,(b_{11}\,b^*_{22}-2b_{12}\,b^*_{21}+b_{22}\,b^*_{11})\,du^1\,du^2. \end{cases}$$

Replacing the surface S by the surface S^* in equation (4.2) gives

$$(4.3)\qquad \begin{cases} \iint_S 2H^*\sqrt{g^*}\,p^*\,du^1\,du^2+\int_{C^*} X^*\cdot n^*\,ds^* \\ \qquad =-2\iint_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,(b^*_{11}\,b^*_{22}-b^*_{12}\,b^*_{21})\,du^1\,du^2. \end{cases}$$

It is easily seen that by the assumptions of the theorem the integrals on the left side of the two equations (4.2) and (4.3) are respectively equal. Thus subtracting equation (4.3) from equation (4.2) yields

$$(4.4)\qquad \iint_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,[2(b^*_{11}\,b^*_{22}-b^*_{12}\,b^*_{21})-(b_{11}\,b^*_{22}-2b_{12}\,b^*_{21}+b_{22}\,b^*_{11})]\,du^1\,du^2=0.$$

By interchanging the two surfaces S and S^* we obtain immediately, from equation (4.4),

$$(4.5)\qquad \iint_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,(b_{11}\,b_{22}-b_{12}\,b_{21})\,du^1\,du^2=\iint_S \frac{1}{\sqrt{f}}\,(b^*_{11}\,b^*_{22}-b^*_{12}\,b^*_{21})\,du^1\,du^2.$$

Thus the addition of equations (4.4) and (4.5) gives

$$(4.6)\qquad \iint_S \frac{1}{f}\,[(b_{11}-b^*_{11})\,(b_{22}-b^*_{22})-(b_{12}-b^*_{12})^2]\,\sqrt{f}\,du^1\,du^2=0.$$

Now for simplicity, we may assume that the parameters u^1 and u^2 are so chosen that $f_{\alpha\beta}=0$ for $\alpha\neq\beta$. Then from the assumption of the theorem that the sums of the principal radii of curvature of the two surfaces S and S^* at corresponding points are equal, we obtain, by use of the second equation of (2.18) and the analogous one for the surface S^*,

$$(b_{11}-b^*_{11})\,f_{22}+(b_{22}-b^*_{22})\,f_{11}=0.$$

Since f_{11} and f_{22} are positive, $b_{11}-b^*_{11}$ and $b_{22}-b^*_{22}$ are of opposite sign or are both zero. Thus the integrand of equation (4.6) is non-positive, and therefore equation (4.6) holds when and only when

$$(b_{11}-b^*_{11})\,(b_{22}-b^*_{22})-(b_{12}-b^*_{12})^2=0,$$

which implies that

$$b_{\alpha\beta} = b^*_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{4.7}$$

From equations (4.7), (2.10), (2.16) and the analogous ones for the surface S^* we obtain that $g_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$. Hence the proof of the theorem is complete.

References

[1] CHRISTOFFEL, E. B.: Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben. J. reine u. angew. Math. **64**, 193—209 (1865). — [2] HURWITZ, A.: Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. École Norm. (3) **19**, 357—408 (1902).

Lehigh University, Bethlehem, Pa., U.S.A.

(Eingegangen am 21. März 1955)

LAMPRECHT, E.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 47—71 (1956)

Zetafunktionen symmetrisch-erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher

Von
ERICH LAMPRECHT

Einleitung und allgemeine Vorbemerkungen

Ein kommutativer Körper, der über seinem Primkörper durch Adjunktion endlich vieler algebraischer oder transzendenter Elemente entsteht, d.h. endlich erzeugbar ist[1]), ist entweder ein *algebraischer Funktionenkörper von n Veränderlichen* (n = Transzendenzgrad) über einem *endlich-algebraischen Zahlkörper* [Fall (a), Bezeichnung: $K, A, \ldots$] oder über einem *Galoisfeld* [Fall (e), Bezeichnung: $K, A, \ldots$]. Einem solchen Körper A bzw. A können in Fortführung von Ansätzen von HASSE [3b] und A. WEIL [9b], [9d] Zetafunktionen zugeordnet werden; hierzu zunächst einige Vorbemerkungen:

Die Erzeugung von A bzw. A. Der *Konstantenkörper* $\varkappa$ von A bzw. k von A, d.h. die Gesamtheit der über dem Primkörper algebraischen Elemente von A bzw. A, ist eindeutig durch den Körper A bzw. A bestimmt und in ihm algebraisch abgeschlossen. Seien mit

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{0.1}$$

n algebraisch unabhängige Elemente aus A bzw. A in *fester Numerierung* vorgegeben (n = Transzendenzgrad über dem Konstantenkörper), so wird durch die Festsetzung:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Setze } \varkappa = A_0 \text{ (bzw. } k = A_0) \text{ und für } \nu = 1, \ldots, n \text{ jeweils} \\ A_\nu = \text{Gesamtheit der über } A_{\nu-1}(x_\nu) \text{ algebraischen Elemente aus } A \\ (A_\nu = \text{Gesamtheit der über } A_{\nu-1}(x_\nu) \text{ algebraischen Elemente aus } A) \end{array}\right. \tag{0.2}$$

eine Erzeugung von A bzw. A als Turm algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen

$$\varkappa = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A \quad \text{bzw.} \quad k = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A \tag{0.3}$$

in Abhängigkeit von $x_1, \ldots, x_n$ eindeutig bestimmt; hierbei ist jeweils A_ν bzw. A_ν algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen mit dem genauen Konstantenkörper $A_{\nu-1}$ bzw. $A_{\nu-1}$.

Die einer Erzeugung zugeordneten Bewertungs-n-tupel. Eine diskrete 1-rangige (additiv geschriebene) Bewertung $w_{\mathfrak{p}_\nu}$ eines Teilkörpers A_ν bzw. A_ν aus

[1]) In der Bezeichnungsweise von KÄHLER ein „rein algebraischer Körper"; vgl. [5a], [5b] (eckige Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis).

(0.3) — der zugehörige Primdivisor sei $\mathfrak{p}_\nu$ — kann eindeutig als Funktionalbewertung bezüglich $x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ auf $A_\nu(x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$ bzw. $A_\nu(x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$ fortgesetzt werden (vgl. HASSE [3d], S. 133ff.) und es gibt höchstens endlich viele inäquivalente Fortsetzungen dieser Funktionalbewertung auf A bzw. A (die zugehörigen Primdivisoren seien mit $\mathfrak{P}'_\nu$ bezeichnet). Jeder Restklassenkörper $A_{\nu+\varrho}\mathfrak{P}'_\nu$ bzw. $A_{\nu+\varrho}\mathfrak{P}'_\nu$ [2]) $(1 \leq \varrho \leq n-\nu)$ ist vom Transzendenzgrad ϱ über $A_\nu\mathfrak{p}_\nu$ bzw. $A_\nu\mathfrak{p}_\nu$, allerdings braucht $A_\nu\mathfrak{p}_\nu$ bzw. $A_\nu\mathfrak{p}_\nu$ nicht mehr der genaue Konstantenkörper zu sein. Dieses Verfahren kann man mit dem neu erhaltenen Körper $A\mathfrak{P}'_\nu$ bzw. $A\mathfrak{P}'_\nu$ wiederum durchführen.

Geht man im Fall (e) von den sämtlichen Bewertungen von A_1 entsprechenden Primdivisoren $\mathfrak{P}'_1$ (i.b.a. $x_2, \ldots, x_n$) aus, wendet in jedem Restklassenkörper $A\mathfrak{P}'_1$ auf alle inäquivalenten Bewertungen von $A_2\mathfrak{P}'_1$ das gleiche Konstruktionsprinzip an und erhält so Primdivisoren $\mathfrak{P}'_{1,2}$ von $A\mathfrak{P}'_1$ und Restklassenkörper $A\mathfrak{P}'_1\mathfrak{P}'_{1,2}$, und setzt man dieses Verfahren sukzessive fort, so erhält man durch $x_1, \ldots, x_n$ eindeutig bestimmte Divisor-n-tupel

$$(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_{1,2}, \ldots, \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n}); \tag{0.4e}$$

jedes solche n-tupel bestimmt eindeutig eine n-rangige diskrete Bewertung von A und verschiedene n-tupel bestimmen verschiedene Bewertungen [3]). Dies ermöglicht zunächst im Fall (e) auf arithmetischem Wege eine Zetafunktion $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ von A bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ zu definieren.

Definition 1(e). *Die* arithmetische Zetafunktion $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ *des algebraischen Funktionenkörpers A von $n \geq 0$ Veränderlichen über dem Galoisfeld k bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ wird durch die folgende rekursive Festsetzung gegeben:*

$$\begin{cases} Z_A(s; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\mathfrak{P}'_1} Z_{A\mathfrak{P}'_1}(s; x_2\mathfrak{P}'_1, \ldots, x_n\mathfrak{P}'_1), \\ \mathfrak{P}'_1 \text{ alle Fortsetzungen bezüglich } x_2, \ldots, x_n \text{ auf } A \text{ der Gesamtheit der} \\ \text{Bewertungen von } A_1; \end{cases} \tag{0.5}$$

dieses Verfahren ist für die Zetafunktionen auf der rechten Seite von (0.5) *so lange zu wiederholen, bis hier Zetafunktionen des Transzendenzgrades* 0 *auftreten; wenn $n(A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n}) = 0$, ist die Abschließungsbedingung*

$$\begin{cases} Z_{A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n}}(s) = \dfrac{1}{1 - \mathfrak{N}(A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n})^{-s}} \\ \mathfrak{N}(A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n}) = \textit{Elementanzahl von } A\mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_{1,\ldots,n} \end{cases} \tag{0.6}$$

einzusetzen.

Im Fall (a) geht man von der Gesamtheit der nichtäquivalenten Bewertungen von $\varkappa = A_0$ aus (die zugehörigen Primdivisoren seien mit dem Index 0 bezeichnet), wiederholt das oben angegebene Verfahren [nach dem ersten

[2]) Mit $A\mathfrak{P}'_\nu$ bzw. $A\mathfrak{P}'_\nu$ bezeichnen wir den Restklassenkörper A mod $\mathfrak{P}'_\nu$ bzw. A mod $\mathfrak{P}'_\nu$, entsprechend für $\mathfrak{P}'_\nu$-ganzes x mit $x\mathfrak{P}'_\nu$ die Restklasse von x mod $\mathfrak{P}'_\nu$.

[3]) Vgl. etwa W. KRULL [6a], S. 113ff.; die zugehörigen Bewertungsringe sind nämlich jeweils verschieden.

Schritt ist man bereits beim Fall (e)] und erhält so durch $x_1, \ldots, x_n$ eindeutig bestimmte Divisor-$(n+1)$-tupel

$$(\mathfrak{P}'_0, \mathfrak{P}'_{0,1}, \ldots, \mathfrak{P}'_{0,1,\ldots,n}) \tag{0.4a}$$

mit entsprechenden Eigenschaften wie oben. Die Definition der Zetafunktion im Fall (a) kann, wie folgt, auf den Fall (e) zurückgeführt werden.

Definition 1(a). *Die* unvollständige[4]) arithmetische Zetafunktion $Z_A^*(s; x_1, \ldots, x_n)$ *des algebraischen Funktionenkörpers* A *von* $n \geq 0$ *Veränderlichen über dem endlich-algebraischen Zahlkörper* $\varkappa = A_0$ *bezüglich* $x_1, \ldots, x_n$ *wird durch die folgende rekursive Festsetzung gegeben:*

$$Z_A^*(s; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\mathfrak{P}'_0} Z_{A\mathfrak{P}'_0}(s; x_1\mathfrak{P}'_0, \ldots, x_n\mathfrak{P}'_0), \tag{0.7}$$

wobei $\mathfrak{P}'_0$ *alle Fortsetzungen bezüglich* $x_1, \ldots, x_n$ *auf* A *der Gesamtheit der nichtarchimedischen Bewertungen von* $\varkappa = A_0$ *durchläuft und jedes* $Z_{A\mathfrak{P}'_0}(s; x_1\mathfrak{P}'_0, \ldots, x_n\mathfrak{P}'_0)$ *gemäß Definition* 1(e) *erklärt ist.*

Die arithmetischen Zetafunktionen können als n-faches bzw. $(n+1)$-faches unendliches Produkt[5]) über n-rangige bzw. $(n+1)$-rangige diskrete Bewertungen des Funktionenkörpers geschrieben werden.

Es interessieren nun unter anderem die folgenden Fragen: a) In welchem Bereich der s-Ebene konvergieren die Produktdarstellungen der Zetafunktionen[6])? — b) Existieren Darstellungen durch elementarere Funktionen und wie lassen sie sich analytisch fortsetzen? — c) Wie lautet ihre Funktionalgleichung (Beziehungen zum Riemann-Rochschen Satz)? — d) Aussagen über Nullstellen und Pole (Riemannsche Vermutung). — e) Verhalten bei Konstantenerweiterung (nur für $n \geq 1$). — f) Abhängigkeit von der Erzeugung von A bzw. A, d.h. von der Auswahl von $x_1, \ldots, x_n$ (Invarianzproblem).

Für endlich-algebraische Zahlkörper und algebraische Funktionenkörper einer Veränderlichen über einem Galoisfeld sind diese Fragen in bekanntem Umfang gelöst; insbesondere sind hier die Zetafunktionen Invarianten des Körpers. Für arithmetische Funktionenkörper A, d.h. $n=1$ und $\varkappa = A_0$ endlich-algebraischer Zahlkörper, wurden von A. Weil [9c, d], H. Hasse [3b] und M. Deuring [2b] in einfachen Spezialfällen die Fragen a), b), c) und teilweise auch d) gelöst[7]).

[4]) Für die archimedischen Bewertungen von $\varkappa$ sind noch keine Beiträge erklärt; eine Hinzunahme solcher Beiträge ist in mancher Hinsicht zweckmäßig (vgl. § 3). Die Definition ist eine direkte Weiterführung der Hasseschen bei $n=1$ (vgl. [3b]).

[5]) Es werden jedoch nicht alle n-rangigen bzw. $(n+1)$-rangigen diskreten Bewertungen des Körpers erfaßt. Die Produktdefinition entspricht der der Artinschen L-Funktionen, für die auch eine Schreibweise als Dirichlet-Reihe nicht bekannt ist.

[6]) Für die Stufe 2, d.h. Fall (a) mit $n=1$ oder Fall (e) mit $n=2$, konvergiert das Produkt für $\Re(s) > 2$, wie aus Ergebnissen von Deuring [2a] folgt.

[7]) Einer mündlichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. F. K. Schmidt zufolge fand inzwischen M. Eichler entsprechende Ergebnisse für weitere spezielle Typen arithmetischer Funktionenkörper.

In dieser Note werden die obengenannten Fragen für arithmetische Zetafunktionen weiterer Körpertypen untersucht, so z.B. in § 1 — nach Herleitung eines Kompositionssatzes für Zetafunktionen — für symmetrisch-erzeugbare Funktionenkörper von n Veränderlichen über einem Galoisfeld k, d.h. für Körper, die als unabhängiges Kompositum von n Funktionenkörpern einer Veränderlichen über k darstellbar sind. Mit „geometrischen" Zetafunktionen höherer Kongruenzmannigfaltigkeiten, wie sie von A. WEIL [9b] in Verallgemeinerung eines Ansatzes bei algebraischen Kurven eingeführt wurden, beschäftigen wir uns in § 2; über die WEILschen Spezialfälle hinaus werden hier weitere Fälle gelöst und die Beziehungen zu den arithmetischen Zetafunktionen der zugehörigen Funktionenkörper untersucht. — § 3 enthält Beiträge zum Fall (a) mit $n>1$, Vergleiche dieser Ergebnisse mit denen in § 1, Relationen zwischen Zetafunktionen von Relativkörpern sowie Beziehungen zu Größencharakteren und WEILschen Charakterfunktionen. Ergänzende Bemerkungen, Beispiele und Überlegungen zum Invarianzproblem der Zetafunktionen sind in § 4 enthalten.

§ 1. Arithmetische Zetafunktionen in symmetrisch-erzeugbaren algebraischen Funktionenkörpern von n Veränderlichen über einem Galoisfeld

1.1. *Ergebnisse bei Funktionenkörpern einer Veränderlichen*[8]). Es seien k das Galoisfeld von $q=p^l$ Elementen und K_i $(i=1,\ldots,n)$ n algebraische Funktionenkörper einer Veränderlichen vom Geschlecht g_i mit dem genauen Konstantenkörper k. Die gemäß Definition 1(e) erklärten arithmetischen Zetafunktionen von K_i sind unabhängig von der Erzeugung und besitzen die Reihendarstellungen

$$(1.1)\qquad Z_{K_i}(s)=\prod_{\mathfrak{p}_i}\left(1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^s}\right)^{-1}=\sum_{\mathfrak{a}_i}\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_i)^s}\qquad(\mathfrak{N}=\text{Absolutnorm in } K_i);$$

hierbei läuft das Produkt über alle Primdivisoren $\mathfrak{p}_i$ von K_i und die Summe über alle ganzen Divisoren $\mathfrak{a}_i$ von K_i. Summen- bzw. Produktdarstellung konvergieren für $\Re(s)>1$ absolut gegen die folgenden rationalen Funktionen von q^{-s}, die auch jeweils die analytischen Fortsetzungen der durch (1.1) im Konvergenzbereich erklärten Funktionen sind:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} Z_{K_i}(s)=\dfrac{\left(1-\frac{\alpha_{i,1}}{q^s}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_{i,2g_i}}{q^s}\right)}{\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{q}{q^s}\right)}=Z_{\mathrm{rat}}(s)\,L_i(s) \\ \text{mit}\quad Z_{\mathrm{rat}}(s)=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{q}{q^s}\right)}\quad\text{und}\quad L_i(s)=\prod_{\lambda_i=1}^{2g_i}\left(1-\frac{\alpha_{i,\lambda_i}}{q^s}\right). \end{cases}$$

$Z_{\mathrm{rat}}(s)$ ist die Zetafunktion des rationalen Funktionenkörpers $k(x)$; die α_{i,λ_i} $(\lambda_i=1,\ldots,2g_i)$ sind komplexe (sogar ganzalgebraische) Zahlen vom

[8]) Vgl. etwa F. K. SCHMIDT [8] und H. HASSE [3a].

Absolutbetrag $|\alpha_{i,\lambda_i}| = \sqrt{q}$ [9]. Das Reziproke der $Z_{K_i}(s)$ kann in der Form

$$(1.3)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{Z_{K_i}(s)} = \displaystyle\prod_{\lambda_i=0}^{2g_i+1} \left(1 - \frac{\alpha_{i,\lambda_i}}{q^s}\right)^{a_{i,\lambda_i}} \text{ mit } \alpha_{i,0}=1,\ \alpha_{i,2g_i+1}=q,\ a_{i,0}=a_{i,2g_i+1}=1, \\ \alpha_{i,\lambda_i} \text{ gemäß (1.2) und } a_{i,\lambda_i}=-1 \text{ für } \lambda_i=1,\dots,2g_i, \end{cases}$$

geschrieben werden[10]. Beim Übergang von s zu $1-s$ genügen diese Zetafunktionen den Funktionalgleichungen

$$(1.4)\qquad \frac{Z_{K_i}(s)}{Z_{K_i}(1-s)} = \frac{q^{s\,2(1-g_i)}}{q^{(1-g_i)}}.$$

Ist $k^{(r)}$ das Galoisfeld von q^r Elementen und $K_i^{(r)} = k^{(r)} \cdot K_i$ die zugehörige Konstantenerweiterung von K_i, so ist die Zetafunktion von $K_i^{(r)}$ gemäß

$$(1.5)\qquad Z_{K_i^{(r)}}(s) = \prod_{\varrho \bmod r} Z_K\left(s - \frac{\varrho}{r}\frac{2\pi i}{\log q}\right) = \frac{\left(1 - \frac{\alpha_{i,1}^r}{q^{rs}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\alpha_{i,2g_i}^r}{q^{rs}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{q^{rs}}\right)\left(1 - \frac{q^r}{q^{rs}}\right)}$$

durch die von K_i bestimmt.

Bei der Substitution $z = q^{-s}$ ist $\zeta_{K_i}(z) = Z_{K_i}(s)$ eine rationale Funktion von z und für die logarithmische Ableitung von $\zeta_{K_i}(z)$ gilt

$$(1.6)\qquad \frac{d\log\zeta_{K_i}(z)}{d\log z} = \sum_{r=1}^{\infty} N_i^{(r)} z^r,$$

wobei $N_i^{(r)}$ die Anzahl der Primdivisoren 1. Grades von $K_i^{(r)}$ ist; ist C_i eine singularitätenfreie ebene algebraische Kurve über k mit dem Funktionenkörper K_i, so ist $N_i^{(r)}$ gleichzeitig die Anzahl der algebraischen Punkte von C_i in $k^{(r)}$.

1.2. *Der Kompositionssatz der arithmetischen Zetafunktionen.* Als Grundlage zu den weiteren Untersuchungen leiten wir ein Schema her, das in vielen Fällen gestattet, Aussagen über die Zetafunktionen höherer algebraischer Funktionenkörper auf solche in niederen Körpern zurückzuführen.

Satz 1. *Ist der algebraische Funktionenkörper A von $n = n_1 + n_2$ Veränderlichen über dem Galoisfeld k von q Elementen darstellbar als unabhängiges Kompositum $A = B_1 \cdot B_2$ zweier Teilkörper B_1 bzw. B_2 von n_1 bzw. n_2 Veränderlichen*[11]*, konvergiert für $i = 1, 2$ bei der speziellen Erzeugung $x_{i1}, \dots, x_{in_i}$ von B_i die Produktdarstellung der gemäß Definition 1 (e) erklärten Zetafunktion*

[9] Dies besagt die Riemannsche Vermutung; Beweise siehe bei A. Weil [9a] und P. Roquette [7a, b].

[10] Für $\Re(s) > 1$ ist jeweils auch $\dfrac{1}{Z_{K_i}(s)} = \displaystyle\prod_{\mathfrak{p}_i}\left(1 - \frac{1}{\Re(\mathfrak{p}_i)^s}\right)$ absolut konvergent.

[11] B_1 und B_2 sind wieder algebraische Funktionenkörper mit dem genauen Konstantenkörper k.

$Z_{B_i}(s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})$ *falls* $\Re(s) > n_i$ *gegen eine rationale Funktion in* q^s *der Form*

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{Z_{B_i}(s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})} = \prod\limits_{\lambda_i=1}^{l_i} \left(1 - \dfrac{\beta_{i\lambda_i}}{q^s}\right)^{b_{i\lambda_i}} \\ \text{mit } b_{i\lambda_i} = \pm 1 \quad \text{und} \quad |\beta_{i\lambda_i}| \leq q^{n_i} \ (\text{für } i = 1,2) \end{cases}$$

und ist bei Konstantenerweiterung von k *zu* $k^{(r)}$, *d.h. für* $B_i^{(r)}$

$$(1.8)\qquad \frac{1}{Z_{B_i^{(r)}}(s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})} = \prod_{\lambda_i=1}^{l_i} \left(1 - \frac{\beta_{i\lambda_i}'}{q^{rs}}\right)^{b_{i\lambda_i}},$$

so konvergiert die Produktdarstellung der arithmetischen Zetafunktion

$$Z_A(s; x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2})$$

absolut für $\Re(s) > n_1 + n_2 = n$ *und es ist*

$$(1.9)\qquad \frac{1}{Z_A(s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})} = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1} \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} \left(1 - \frac{\beta_{1\lambda_1}\beta_{2\lambda_2}}{q^s}\right)^{b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}$$

und bei Konstantenerweiterung von k *zu* $k^{(r)}$ *ist für* $A^{(r)} = B_1^{(r)} \cdot B_2^{(r)}$

$$(1.10)\qquad \frac{1}{Z_{A^{(r)}}(s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})} = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1} \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} \left(1 - \frac{\beta_{1\lambda_1}'\beta_{2\lambda_2}'}{q^{rs}}\right)^{b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}.$$

Genügen die Zetafunktionen von B_i *den Funktionalgleichungen*

$$(1.11)\qquad \frac{Z_{B_i}(s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})}{Z_{B_i}(n_i - s; x_{i1}, \ldots, x_{in_i})} = \frac{q^{sh_i}}{H_i} \qquad (H_i, h_i \text{ konstante Zahlen}),$$

so gilt mit geeigneten Zahlen H *und* h *eine entsprechende Gleichung*

$$(1.12)\qquad \frac{Z_A(s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})}{Z_A(n_1 + n_2 - s; x_{11}, \ldots, x_{2n_2})} = \frac{q^{sh}}{H},$$

und ist speziell sogar

$$(1.13\,\text{a})\qquad h_i = \sum_{\lambda_i=1}^{l_i} b_{i\lambda_i}, \qquad H_i = q^{\frac{n_i}{2}h_i} \qquad (i = 1, 2),$$

so folgt

$$(1.13\,\text{b})\qquad h = h_1 h_2 = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} b_{1\lambda_1} b_{2\lambda_2}, \qquad H = (-1)^h q^{\frac{n_1+n_2}{2}h}.$$

Beweis. Führt man mit der Erzeugung $x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}$ die ersten n_1 Schritte zur Konstruktion der Bewertungs-n-tupel durch, so kann man bei dem Fortsetzungsprozeß jeweils zunächst B_2 (bzw. den zu B_2 isomorphen Restklassenbereich) adjungieren, da die Elemente aus B_2 von den x_{1i} nicht abhängen. Diese Adjunktion von B_2 ist jeweils eine Konstantenerweiterung mit einem separabel-erzeugbaren Körper, dessen Elemente über

dem Konstantenkörper transzendent sind. Nach CHEVALLEY[12]) tritt dabei weder Zerlegung noch Verzweigung auf und es wird

$$A\,\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_{1,2}'\cdots\mathfrak{P}_{1,\dots,\nu}' = B_1\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_{1,2}'\cdots\mathfrak{P}_{1,\dots,\nu}'\cdot B_2, \qquad (\nu\leq n_1), \tag{1.14}$$

wobei das Kompositum über dem jeweiligen Konstantenkörper gebildet wird. Somit entsteht $Z_A(s; x_{11}, \dots, x_{2n_2})$ formal aus $Z_{B_1}(x_{11}, \dots, x_{1n_1})$, indem man in der letzteren Funktion jeweils

$$\frac{1}{1-\mathfrak{N}(B_1\mathfrak{P}_1'\cdots\mathfrak{P}_{1,\dots,n_1}')^{-s}} = \frac{1}{1-q^{-rs}} \quad (r = \text{Grad von } B_1\mathfrak{P}_1'\cdots\mathfrak{P}_{1,\dots,n_1}' \text{ über } k)$$

ersetzt durch

$$\begin{cases} Z_{A\mathfrak{P}_1'\cdots\mathfrak{P}_{1,\dots,n_1}'}(s; x_{22}, \dots, x_{2n_2}) = Z_{B_1^{(r)}}(s; x_{22}, \dots, x_{2n_2}) \\ \quad = \dfrac{1}{\prod\limits_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(1-\dfrac{\beta_{2\lambda_2}^r}{q^{rs}}\right)^{b_{2\lambda_2}}} = \dfrac{1}{\prod\limits_{\lambda_2=1}^{l_2}\left[1-\mathfrak{N}(B_1\mathfrak{P}_1'\cdots\mathfrak{P}_{1,\dots,n_1}')^{\gamma_{2\lambda_2}-s}\right]^{b_{2\lambda_2}}}, \end{cases} \tag{1.15}$$

wobei

$$\beta_{i\lambda_i} = q^{\gamma_{i\lambda_i}} \quad (i=1,2;\ \lambda_i = 1,\dots,l_i)\ ^{13}). \tag{1.16}$$

Ordnet man nach der Ersetzung (1.15) in der Produktdarstellung nach den Indizes λ_2 um und multipliziert zunächst jeweils über die Faktoren mit dem Index λ_2, so wird

$$Z_A(s; x_{11}, \dots, x_{2n_2}) = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} Z_{B_1}(s-\gamma_{2\lambda_2}; x_{11}, \dots, x_{1n_1})^{b_{2\lambda_2}}; \tag{1.17}$$

setzt man hierin wieder $q^{\gamma_{2\lambda_2}} = \beta_{2\lambda_2}$, so folgt daraus die Formel (1.9). Da die Produktdarstellung von $Z_{B_1}(s; x_{11}, \dots, x_{1n_1})$ für $\Re(s) > n_1$ absolut konvergiert, ferner $\Re(\gamma_{2\lambda_2}) \leq n_2$ ist, konvergiert jedes der obigen Produkte für

$$Z_{B_1}(s-\gamma_{2\lambda_2}; x_{11}, \dots, x_{1n_1})$$

absolut, falls $\Re(s) > n_1 + n_2$, und somit wird der Wert des unendlichen Produktes durch die oben vorgenommene Umordnung der Faktoren nicht geändert; da weiter für $\Re(s) > n_1 + n_2$ die Ersetzung (1.15) erlaubt ist, konvergiert die Produktdarstellung von $Z_A(s; x_{11}, \dots, x_{2n_2})$ in dieser Halbebene gegen die durch (1.9) beschriebene Funktion.

Wegen $A^{(r)} = B_1^{(r)} \cdot B_2^{(r)}$ folgt (1.10), wenn man von den entsprechenden Zetafunktionen von $B_1^{(r)}$ und $B_2^{(r)}$ ausgeht.

Bei der Herleitung der Funktionalgleichung lassen wir zur Vereinfachung der Schreibweise die Argumente $x_{i\lambda_i}$ fort. Ausgehend von (1.17) und (1.11) erhalten wir (jeweils mit den Argumenten $s-\gamma_{2\lambda_2}$)

$$Z_A(s) = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} Z_{B_1}(n_1 - s + \gamma_{2\lambda_2})^{b_{2\lambda_2}} \cdot R_1 \quad \text{mit} \quad R_1 = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(\frac{q^{(s-\gamma_{2\lambda_2})h_1}}{H_1}\right)^{b_{2\lambda_2}}.$$

[12]) Vgl. [1], Kap. V, insbes. S. 92ff.

[13]) Beachte $q^{\gamma_{i\lambda_i}+2\pi i n\log q} = \beta_{i\lambda_i}$; die $\gamma_{i\lambda_i}$ können durch die Vorschrift, daß sie minimalen positiven Imaginärteil haben sollen, eindeutig normiert werden.

Wegen (1.7) und (1.16) ist

$$\prod_{\lambda_2=1}^{l_2} Z_{B_1}(n_1-s+\gamma_{2\lambda_2})^{b_{2\lambda_2}} = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\left(1-\frac{\beta_{1\lambda_1}q^s}{\beta_{2\lambda_2}q^{n_1}}\right)^{-b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}$$

$$= R_2\prod_{\lambda_1=1}^{l_1} Z_{B_2}(s-n_1+\gamma_{1\lambda_1})^{b_{1\lambda_1}} \quad \text{mit} \quad R_2 = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(-\frac{\beta_{1\lambda_1}q^s}{\beta_{2\lambda_2}q^{n_1}}\right)^{-b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}.$$

Abermals wegen (1.11) ist (jeweils mit den Argumentwerten $s-n_1+\gamma_{1\lambda_1}$)

$$\prod_{\lambda_1=1}^{l_1} Z_{B_2}(s-n_1+\gamma_{1\lambda_1})^{b_{1\lambda_1}} = R_3\prod_{\lambda_1=1}^{l_1} Z_{B_1}(n_1+n_2-s-\gamma_{1\lambda_1})^{b_{1\lambda_1}}$$

$$\text{mit} \quad R_3 = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\left(\frac{q^{(s-n_1+\gamma_{1\lambda_1})h_2}}{H_2}\right)^{b_{1\lambda_1}}.$$

Da die (1.17) entsprechende Formel bei Vertauschung der Indizes $i=1$ und 2 wegen (1.9) ebenfalls gilt, wird

$$Z_A(s) = Z_A(n_1+n_2-s)\cdot R_1R_2R_3,$$

und da $R_1R_2R_3$ von der Form q^{sh}/H ist, ist dies gleichbedeutend mit (1.12). — Setzen wir (1.13a) voraus, so folgt

$$R_1R_2R_3 = \prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(\frac{q^{sh_1}}{H_1\beta_{2\lambda_2}^{h_1}}\right)^{b_{2\lambda_2}}\prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\prod_{\lambda_2=1}^{l_2}\left(-\frac{\beta_{2\lambda_2}q^{n_1}}{\beta_{1\lambda_1}q^s}\right)^{b_{1\lambda_1}b_{2\lambda_2}}\prod_{\lambda_1=1}^{l_1}\left(\frac{q^{sh_2}\beta_{1\lambda_1}^{h_2}}{q^{n_1h_2}H_2}\right)^{b_{1\lambda_1}}$$

$$= \frac{q^{sh_1h_2}}{H_1^{h_2}}\frac{q^{n_1h_1h_2}}{q^{sh_1h_2}}\frac{q^{sh_1h_2}}{q^{n_1h_1h_2}H_2^{h_1}}(-1)^{h_1h_2} = \frac{q^{sh}}{H}, \qquad h, H \text{ gemäß (1.13b)},$$

womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Bemerkungen. Die Symmetrie des Ergebnisses von Satz 1 zeigt, daß der Wert dieser Zetafunktion von A invariant ist bei Vertauschung der Rollen von B_1 und B_2, wenn man an den Erzeugungen $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}$ der B_i festhält. — Weiter ist stets $|\beta_{1\lambda_1}\beta_{2\lambda_2}| \leq q^{n_1+n_2}$. Somit übertragen sich alle für die Zetafunktionen der B_i vorausgesetzten Eigenschaften auf die von A.

1.3. *Symmetrisch-erzeugbare Funktionenkörper von n Veränderlichen.* Ein algebraischer Funktionenkörper A von n Veränderlichen über k heiße *symmetrisch-erzeugbar*, wenn er in der Form

$$A = K_1^* \cdot K_2^* \cdots K_n^* \tag{1.18}$$

als unabhängiges Kompositum von n Funktionenkörpern K_i^* einer Veränderlichen über k darstellbar ist. A besitzt dann eine Erzeugung $x_1, \ldots, x_n$ [14]) mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß jeweils A_i aus $A_{i-1}(x_i)$ schon durch Adjunktion über $k(x_i)$ algebraischer Elemente ξ_i erzeugt wird. Durch Adjunktion dieser ξ_i zu $k(x_i)$ entsteht der zu K_i^* isomorphe Teilkörper K_i von A, dessen Eigenschaften gemäß **1.1.** festgelegt seien. — Die Voraussetzungen

[14]) Vgl. (0.2) und (0.3).

von Satz 1 einschließlich (1.13a) sind für die Zetafunktionen dieser Körper K_i erfüllt; somit lassen sich diese Eigenschaften der Zetafunktion induktiv auf $A \simeq K_1 \cdots K_n$ übertragen und wir erhalten

Korollar 1 zu Satz 1. *Ist durch $x_1, \ldots, x_n$ eine symmetrische Erzeugung des algebraischen Funktionenkörpers $A \cong K_1 \cdots K_n$ von n Veränderlichen über k gegeben, so konvergiert die Produktdarstellung von $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ für $\Re(s) > n$ absolut gegen die durch*

$$(1.19)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)} = \prod_{\lambda_1=0}^{2g_1+1} \cdots \prod_{\lambda_n=0}^{2g_n+1} \left(1 - \dfrac{\alpha_{1\lambda_1} \cdots \alpha_{n\lambda_n}}{q^s}\right)^{a_{1\lambda_1} \cdots a_{n\lambda_n}}, \\ \text{wobei die } \alpha_{i\lambda_i} \text{ und } a_{i\lambda_i} \ (\lambda_i = 0, \ldots, 2g_i+1;\ i = 1, \ldots, n) \text{ gemäß (1.2), (1.3) bestimmt sind,} \end{array} \right.$$

beschriebene rationale Funktion in q^{-s}; weiter ist

$$(1.20)\quad \frac{1}{Z_{A^{(r)}}(s; x_1, \ldots, x_n)} = \prod_{\lambda_1=0}^{2g_1+1} \cdots \prod_{\lambda_n=0}^{2g_n+1} \left(1 - \frac{\alpha_{1\lambda_1}^r \cdots \alpha_{n\lambda_n}^r}{q^{rs}}\right)^{a_{1\lambda_1} \cdots a_{n\lambda_n}},$$

und es gilt die Funktionalgleichung

$$(1.21)\quad \frac{Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)}{Z_A(n-s; x_1, \ldots, x_n)} = \frac{q^{s\,2^n(1-g_1)\cdots(1-g_n)}}{q^{\frac{n}{2}2^n(1-g_1)\cdots(1-g_n)}}.$$

Wegen der Symmetrie des Ergebnisses (1.19) und der Invarianz der Zetafunktion jedes Teilkörpers K_i können wir überdies folgende Teilaussagen des Invarianzproblems folgern:

Korollar 2 zu Satz 1. *Die Zetafunktion $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ des symmetrisch erzeugten Funktionenkörpers $A \cong K_1 \cdots K_n$ ist einerseits invariant bei jeder Permutation der x_i, d.h. unabhängig von der Reihenfolge bei der Kompositumsbildung, und andererseits invariant bei Ersetzung der x_i durch andere über k transzendente Elemente y_i aus den K_i.*

Die Pole und Nullstellen von $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ sind gemäß (1.19) eindeutig durch die der $Z_{K_i}(s)$ bestimmt und somit überträgt sich eine der Riemannschen Vermutung entsprechende Aussage auch auf $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$, d.h. diese Zetafunktion hat Pole für $\Re(s) = 0, 1, \ldots, n$ und kann Nullstellen höchstens für $\Re(s) = 1/2, 3/2, \ldots, n-1+1/2$ haben. Die folgende elementare Umformung von (1.9) gibt noch einen besseren Einblick in die Verteilung von Polen und Nullstellen. Bezeichne

$$(1.22)\quad L_{i_1, \ldots, i_k}(s) = L_{i_1}(s) \times \cdots \times L_{i_k}(s) = \prod_{\lambda_{i_1}=1}^{2g_{i_1}} \cdots \prod_{\lambda_{i_k}=1}^{2g_{i_k}} \left(1 - \frac{\alpha_{i_1\lambda_{i_1}} \cdots \alpha_{i_k\lambda_{i_k}}}{q^s}\right)$$[15])

[15]) Die Verknüpfung dieser Polynome in q^{-s} entspricht der der charakteristischen Polynome eines Kroneckerprodukts von Matrizen. — Die Komposition der reziproken Zetafunktionen in Satz 1 ist eine Modifikation dieses Schemas für rationale Funktionen.

und für $m \geq 0$

$$\text{(1.23)} \qquad \begin{cases} L^{[m]}_{i_1,\ldots,i_k}(s) = \prod_{\mu=0}^{m} [L_{i_1,\ldots,i_k}(s-\mu)]^{\binom{m}{\mu}}, \\ Z^{[m]}_{\mathrm{rat}}(s) = \prod_{\mu=0}^{m} [Z_{\mathrm{rat}}(s-\mu)]^{\binom{m}{\mu}}, \end{cases}$$

wobei mit $\binom{m}{\mu}$ die Binomialkoeffizienten bezeichnet sind, so ist

$$\text{(1.24)} \qquad Z_A(s; x_1, \ldots, x_n) = Z^{[n-1]}_{\mathrm{rat}}(s) \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n} [L^{[n-k]}_{i_1,\ldots,i_k}(s)]^{(-1)^{k+1}} \right).$$

Im Spezialfall des *rationalen Funktionenkörpers* $R = k(x_1, \ldots, x_n)$ *von n Veränderlichen* wird

$$\text{(1.25)} \qquad Z_R(s; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{q^k}{q^s}\right)^{\binom{n}{k}}}.$$

Korollar 3 zu Satz 1. *Ist A bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ symmetrisch-erzeugbar, so hat $Z_A(s; x_1, \ldots, x_n)$ sicher für $s = k + 2m\pi i \cdot \log q$ $(k = 0, \ldots, n;\ m$ ganz$)$ Pole der Ordnung $\binom{n}{k}$, also ist $\Re(s) = n$ die genaue Konvergenzabszisse der Produktdarstellung. Falls mindestens zwei $g_i \neq 0$, kommen weitere Pole auf den Geraden $\Re(s) = 1, \ldots, n-1$ hinzu (Glieder aus (1.24) mit geradzahligem k) und, falls mindestens ein $g_i \neq 0$, Nullstellen auf den Geraden $\Re(s) = 1/2, \ldots, 1/2 + n - 1$ (Glieder aus (1.24) mit ungeradem k) und es können sich keine der hingeschriebenen Pole gegen Nullstellen fortheben.*

§ 2. Geometrische Zetafunktionen von Kongruenzfunktionenkörpern

2.1. *Zetafunktionen von Kongruenzmannigfaltigkeiten, gelöste Spezialfälle.* Es sei k das Galoisfeld von $q = p^l$ Elementen und M eine irreduzible Kongruenzmannigfaltigkeit der Dimension n über k, die einem projektiven Raum R_m $(m > n)$ über k durch die homogenen Polynome

$$\text{(2.1)} \qquad f_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_m) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l;\ l \geq m - n)$$

gegeben sei[16]). Mit $K(M)$ sei der Funktionenkörper von M bezeichnet; $K(M)$ ist vom Transzendenzgrad n über k. Die *Anzahl $N^{(r)}(M)$ der rationalen Punkte von M über $k^{(r)}$* ($k^{(r)}$ Galoisfeld von q^r Elementen) ist folgendermaßen erklärt:

$$\text{(2.2)} \qquad N^{(r)}(M) = \text{Anzahl der nichtproportionalen Lösungen}$$

$$(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m) \neq (0, \ldots, 0) \text{ von (2.1) in } k^{(r)}.$$

Nach dem Ansatz von A. WEIL (vgl. [9b] und (1.6)) erklären wir dann Zetafunktionen von M bzw. $K(M)$ gemäß

[16]) Unter der durch M gegebenen Erzeugung verstehen wir stets das vorgelegte Gleichungssystem (2.1), wodurch auch der Raum R_m festgelegt ist.

Definition 2(e). *Ist* $N^{(r)}(M)$ *gemäß* (2.2) *die Anzahl der rationalen Punkte der Kongruenzmannigfaltigkeit* M *in* $k^{(r)}$, *so wird durch*

$$\frac{d\log\zeta_M(z)}{d\log z} = \sum_{r=1}^{\infty} N^{(r)}(M)\, z^r \tag{2.3}$$

die Zetafunktion von M *erklärt. Vermöge der Festsetzung*

$$\zeta_{K(M)}(z; M) = \zeta_M(z) \tag{2.4}$$

wird diese zur geometrischen Zetafunktion $\zeta_{K(M)}(z; M)$ *des Funktionenkörpers* $K(M)$ *bezüglich der „Erzeugung" M.*

Für $\zeta_M(z)$ sind entsprechende Fragen wie für die arithmetischen Zetafunktionen zu klären, z.B. ob $\zeta_M(z)$ eine rationale Funktion von z ist, was sich über die Nullstellen und Pole von $\zeta_M(z)$ aussagen läßt und welcher Funktionalgleichung sie genügt. Bei der Zuordnung (2.4) interessiert darüber hinaus, wie $\zeta_{K(M)}(z; M)$ von der durch M gegebenen Erzeugung abhängt und welche Beziehungen zwischen $\zeta_{K(M)}(z; M)$ und der arithmetischen Zetafunktion von $K(M)$ bei der (2.1) entsprechenden Erzeugung von $K(M)$ bestehen[17]).

Es ist naheliegend, zunächst Mannigfaltigkeiten zu untersuchen, die durch eine homogene Gleichung $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ mit Koeffizienten aus k erzeugt werden; im Fall $n = 1$ führt dies bei singularitätenfreier Erzeugung zur bekannten Theorie von **1.1**. [vgl. (1.6)].

Ferner wurde von A. Weil[18]) der Spezialfall der durch die homogene Gleichung

$$a_0 x_0^m + a_1 x_1^m + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}^m = 0 \qquad (m \mid q-1;\ a_\nu \neq 0,\ a_\nu \in k) \tag{2.5}$$

erzeugten singularitätenfreien Mannigfaltigkeit M gelöst. Aus der Berechnung von $N^{(r)}(M)$ unter Benutzung abelscher Gruppencharaktere folgt hier:

$$\left\{\begin{aligned} &\zeta_M(z) = \frac{L(z)^{(-1)^{n+1}}}{\prod_{\nu=0}^{n}(1-q^\nu z)} \\ &\text{mit} \qquad L(z) = \prod_{\substack{\chi_0,\ldots,\chi_{n+1}\neq 1 \\ \chi_0\cdots\chi_{n+1}=1,\ \chi_\nu^m=1}} \left(1 - j(\chi_0, \ldots, \chi_{n+1};\ a_0, \ldots, a_{n+1})\, z\right), \end{aligned}\right. \tag{2.6}$$

wobei die $j(\chi_0, \ldots, \chi_{n+1};\ a_0, \ldots, a_{n+1})$ Produkte von Gaußschen Summen und vom Absolutbetrag $q^{n/2}$ sind. Speziell für $m = 1$, d.h. eine Hyperebene H (der zugehörige Funktionenkörper $K(H) = k(x_1, \ldots, x_n)$ ist rational) folgt

$$\zeta_H(z) = \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n}(1-q^\nu z)}; \tag{2.7}$$

[17]) Geht man in (2.1) zur inhomogenen Schreibweise über, so entstehen definierende Gleichungen von $K(M)$ über k und bei Auszeichnung von n Veränderlichen erhält man Erzeugungen in unserem früheren Sinne.

[18]) Vgl. [9b].

Vergleich mit (1.25) nach der Substitution $z=q^{-s}$ zeigt, daß für $n>1$ bei den Exponenten der mittleren Glieder Abweichungen auftreten, die beiden Zetafunktionen stimmen also *nicht* überein.

Der Fall der durch die inhomogene Gleichung

$$y^p - y = a_1 x_1^m + \cdots + a_n x_n^m \qquad (m \mid p-1;\ a_\nu \neq 0,\ a_\nu \in k) \tag{2.8}$$

erzeugten Mannigfaltigkeit M soll hier mit entsprechenden Mitteln behandelt werden[19]). Zuerst bestimmen wir die Anzahl $A^{(r)}(M)$ der verschiedenen Lösungen $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ von (2.8) in $k^{(r)}$.

Ist $\chi(x)$ ein Multiplikativcharakter von k von der genauen Ordnung m, so ist auch der durch χ in $k^{(r)}$ induzierte Charakter $\chi_{(r)}(x)=\chi\big(N_r(x)\big)$ (N_r Relativnorm von $k^{(r)}$ nach k) von der genauen Ordnung m. Die Lösungsanzahl der Gleichung $x^m=u$ in $k^{(r)}$ wird für alle $u \in k^{(r)}$ [20]) gegeben durch

$$B_{(r)}(u) = \sum_{b=1}^{m} \chi_{(r)}^b(u). \tag{2.9}$$

Entsprechend ist die Lösungsanzahl von $y^p - y = v$ in $k^{(r)}$ durch

$$\left\{\begin{array}{l} B_{(r)}^*(v) = \sum\limits_{c \in \Gamma} e^{(r)}[c \cdot v] \quad \text{mit} \quad e^{(r)}[\ldots] = \epsilon^{\frac{2\pi i}{p} S_r(s(\ldots))}, \\ s(\ldots)\ \text{Absolutspur von } k \text{ zum Primkörper } \Gamma, \\ S_r(\ldots)\ \text{Relativspur von } k^{(r)} \text{ nach } k, \end{array}\right. \tag{2.10}$$

gegeben. Es ist

$$A^{(r)}(M) = \sum_{u_1 \in k^{(r)}} \cdots \sum_{u_n \in k^{(r)}} B_{(r)}(u_1) \ldots B_{(r)}(u_n) \cdot B_{(r)}^*(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n)$$

$$= \sum_{c \in \Gamma} \sum_{b_1=1}^{m} \cdots \sum_{b_n=1}^{m} \tau(\chi_{(r)}^{b_1}; e_{c a_1}^{(r)}) \ldots \tau(\chi_{(r)}^{b_n}; e_{c a_n}^{(r)})$$

mit

$$\tau(\chi_{(r)}^{b_\nu}; e_{c a_\nu}^{(r)}) = \sum_{u_\nu \in k^{(r)}} \chi_{(r)}^{b_\nu}(u_\nu)\, e^{(r)}[c\, a_\nu u_\nu];$$

hieraus folgt

$$A^{(r)}(M) = q^{rn} + \sum_{\substack{c \neq 0 \\ c \in \Gamma}} \sum_{b_1=1}^{m-1} \cdots \sum_{b_n=1}^{m-1} \tau(\chi_{(r)}^{b_1}; e_{c a_1}^{(r)}) \ldots \tau(\chi_{(r)}^{b_n}; e_{c a_n}^{(r)}). \tag{2.11}$$

Gehen wir mit Hilfe der Substitutionen $x_1 = x_1'/x_0', \ldots, x_n = x_n'/x_0', y = x_{n+1}'/x_0'$ zu der (2.8) entsprechenden homogenen Gleichung über, so ist $A^{(r)}(M)$ die Anzahl der nichtproportionalen Lösungen mit $x_0' \neq 0$ derselben. Hinzu kommen für $x_0' = 0$ [21]) weitere $1 + q^r + \cdots + q^{r(n-1)}$ nichtproportionale Lösungen

[19]) Für $n=1$ wurden die Parallelfälle (2.5) und (2.8) schon früher von DAVENPORT und HASSE [3c] mit analogen Mitteln behandelt.

[20]) Auch für $u=0$ aus $k^{(r)}$, da $\chi_{(r)}^b(0)=0$ für $b \neq m$ und $\chi_{(r)}^b(0)=1$ für $b=m$.

[21]) Hier muß $x_{n+1}'=0$ sein, während $x_1', \ldots, x_n'$ beliebig sein können.

$\neq (0, \ldots, 0)$. Wegen $-\tau\left(\chi_{(r)}^{b_\nu}; e_{(r)}^{c a_\nu}\right) = \left(-\tau(\chi^{b_\nu}; e_{c a_\nu})\right)^r$ ist also

$$(2.12)\quad \begin{cases} N^{(r)}(M) = 1 + q^r + \cdots + q^{rn} - \\ -(-1)^{n+1} \sum\limits_{\substack{c \neq 0 \\ c \in \Gamma}} \sum\limits_{b_1=1}^{m-1} \cdots \sum\limits_{b_n=1}^{m-1} [(-1)^n \tau(\chi^{b_1}; e_{c a_1}) \ldots \tau(\chi^{b_n}; e_{c a_n})]^r. \end{cases}$$

Setzt man (2.12) in (2.3) ein und summiert die entstehenden geometrischen Reihen auf[22]), so erhält man

$$\frac{d \log \zeta_M(z)}{d \log z} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q^\nu z}{1 - q^\nu z} - \\ -(-1)^{n+1} \sum_{\substack{c \neq 0 \\ c \in \Gamma}} \sum_{b_1=1}^{m-1} \cdots \sum_{b_n=1}^{m-1} \frac{z(-1)^n \tau(\chi^{b_1}; e_{c a_1}) \ldots \tau(\chi^{b_n}; e_{c a_n})}{1 - (-1)^n \tau(\chi^{b_1}; e_{c a_1}) \ldots \tau(\chi^{b_n}; e_{c a_n}) z},$$

also ist

$$(2.13)\quad \begin{cases} \zeta_M(z) = \dfrac{L(z)^{(-1)^{n+1}}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (1 - q^\nu z)} \\ \text{mit} \quad L(z) = \prod\limits_{\substack{c \in \Gamma \\ c \neq 0}} \prod_{b_1=1}^{m-1} \cdots \prod_{b_n=1}^{m-1} \left(1 - (-1)^n \tau(\chi^{b_1}; e_{c a_1}) \ldots \tau(\chi^{b_n}; e_{c a_n}) \cdot z\right). \end{cases}$$

$\zeta_M(z)$ ist eine rationale Funktion von z von analoger Struktur wie diejenige in (2.6), die Absolutbeträge der Nullstellen und Pole von $\zeta_M(z)$ sind durch (2.13) bestimmt und es gilt auch hier die Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung.

Die Zetafunktionen $\zeta_M(z)$ in (2.6) und (2.13) genügen der Funktionalgleichung

$$(2.14)\quad \frac{\zeta_M(z)}{\zeta_M\left(\frac{1}{q^n z}\right)} = \pm \frac{z^{-h}}{q^{\frac{n}{2} h}} \qquad (h = \text{Nennergrad} - \text{Zählergrad von } \zeta_M(z));$$

(2.14) ist weitgehend analog zu (1.12), (1.13).

Aus der Definition der geometrischen Zetafunktion folgen zusammen mit den in (2.12), (2.13) und (2.14) enthaltenen Überlegungen auch für wesentlich allgemeinere Mannigfaltigkeiten M unmittelbar die nachstehenden Beziehungen zwischen $\zeta_{K(M)}(z; M)$ und $\zeta_{K^{(r)}(M)}(z; M^{(r)})$ (Konstantenerweiterung von k zu $k^{(r)}$):

Lemma 1. *Ist $\zeta_{K(M)}(z; M)$ eine rationale Funktion von z, so ist auch $\zeta_{K^{(r)}(M)}(z; M^{(r)})$ eine rationale Funktion von z und hat als Nullstellen bzw. Pole die r-ten Potenzen derjenigen von $\zeta_{K(M)}(z; M)$. Genügt $\zeta_{K(M)}(z; M)$ zudem einer Funktionalgleichung vom Typus* (2.14), *so auch $\zeta_{K^{(r)}(M)}(z; M^{(r)})$*[23]).

[22]) Dies ist für $|z| < \frac{1}{q^n}$ erlaubt.

[23]) Wenn $\zeta_{K(M)}(z; M)$ rational ist, so ist (für jedes ϱ) $N^{(\varrho)}(M)$ die Differenz der Summen der ϱ-ten Potenz der Pole und der der Nullstellen von $\zeta_{K(M)}(z; M)$; insbesondere gilt dies also auch für alle ϱ mit $\varrho \equiv 0 \bmod r$, die allein in die Definition von $\zeta_{K^{(r)}(M)}(z; M^{(r)})$ eingehen. Hieraus folgen die obengenannten Aussagen.

2.2. *Der Kompositionssatz der geometrischen Zetafunktionen.* Es seien M_1 und M_2 Kongruenzmannigfaltigkeiten über k, die in der Form (2.1) in Räumen R_{m_1} bzw. R_{m_2} gegeben seien. Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$ (in dem Produktraum $R_{m_1} \times R_{m_2}$); ihr Funktionenkörper $K(M_1 \times M_2)$ ist gleich dem über k gebildeten unabhängigen Kompositum von $K(M_1)$ und $K(M_2)$. Die Gesamtheit der Punkte von $M_1 \times M_2$ wird durch die Gesamtheit der geordneten Paare von Punkten aus M_1 und M_2 geliefert; somit gilt

$$N^{(r)}(M_1 \times M_2) = N^{(r)}(M_1) \cdot N^{(r)}(M_2) \quad \text{für jedes } r \geq 1. \tag{2.15}$$

Angenommen, es sei für $i = 1, 2$ und jedes $r \geq 1$

$$N^{(r)}(M_i) = \sum_{\lambda_i=1}^{l_i} (-1)^{a_{i\lambda_i}} \alpha_{i\lambda_i}^r \qquad (a_{i\lambda_i} = \mp 1) \tag{2.16}$$

mit komplexen Zahlen $\alpha_{i\lambda_i}$, d.h. für $|z| < \operatorname{Min}_{\lambda_i} \left| \frac{1}{\alpha_{i\lambda_i}} \right|$ konvergiere jeweils die Reihendarstellung (2.3) und es sei

$$\zeta_{M_i}(z) = \prod_{\lambda_i=1}^{l_i} (1 - \alpha_{i\lambda_i} z)^{(-1)^{a_{i\lambda_i}+1}}, \tag{2.16a}$$

also eine rationale Funktion von z, so folgt wegen (2.15)

$$N^{(r)}(M_1 \times M_2) = \sum_{\lambda_1=1}^{l_1} \sum_{\lambda_2=1}^{l_2} (-1)^{a_{1\lambda_1}+a_{2\lambda_2}} (\alpha_{1\lambda_1}\alpha_{2\lambda_2})^r \qquad (r \geq 1), \tag{2.17}$$

also ist

$$\zeta_{M_1 \times M_2}(z) = \prod_{\lambda_1=1}^{l_1} \prod_{\lambda_2=1}^{l_2} (1 - \alpha_{1\lambda_1}\alpha_{2\lambda_2} z)^{(-1)^{a_{1\lambda_1}a_{2\lambda_2}+1}}, \tag{2.17a}$$

wobei die zugehörige Reihendarstellung (2.3) für $|z| < \operatorname{Min}_{\lambda_1,\lambda_2} \left| \frac{1}{\alpha_{1\lambda_1}\alpha_{2\lambda_2}} \right|$ konvergiert.

Nimmt man zusätzlich an, daß $\zeta_{M_1}(z)$ und $\zeta_{M_2}(z)$ einer Funktionalgleichung vom Typus (2.14) genügen, so folgt bei fast wörtlicher Übertragung des Beweises von Satz 1, wobei jeweils q^{-s} durch z zu ersetzen ist, daß auch $\zeta_{M_1 \times M_2}(z)$ einer Funktionalgleichung dieses Typus genügt. — Interpretiert man diese Funktionen als geometrische Zetafunktionen der zugehörigen Funktionenkörper, so ergibt sich zusammen mit dem Lemma aus **2.1.** ein dem Satz 1 entsprechender Kompositionssatz.

Satz 2. *Sind für $i = 1, 2$ die geometrischen Zetafunktionen der algebraischen Funktionenkörper $K(M_i)$ über k bezüglich der Erzeugungen M_i gemäß* (2.16), (2.16a) *rationale Funktionen von z, so ist auch die geometrische Zetafunktion des unabhängigen Kompositums $K(M_1) \cdot K(M_2)$ bezüglich der Erzeugung $M_1 \times M_2$ gemäß* (2.17a) *eine rationale Funktion von z, deren zugehörige Reihendarstellung* (2.3) *für $|z| < \operatorname{Min}_{\lambda_1,\lambda_2} |1/\alpha_{1\lambda_1}\alpha_{2\lambda_2}|$ konvergiert. Genügt für $i = 1, 2$ $\zeta_{K(M_i)}(z; M_i)$ einer Funktionalgleichung vom Typus* (2.14), *so auch $\zeta_{K(M_1)\cdot K(M_2)}(z; M_1 \times M_2)$; ferner sind die geometrischen Zetafunktionen der endlich-algebraischen Konstantenerweiterungen jedes Grades r von $K(M_1) \cdot K(M_2)$ diejenigen rationalen Funktionen von z, die als Nullstellen bzw. Pole die r-ten Potenzen derjenigen von $K(M_1) \cdot K(M_2)$ haben.*

Nach den bisherigen Ergebnissen ist Satz 2 sicher anwendbar, wenn M_i entweder eine singularitätenfreie Erzeugung einer ebenen algebraischen Kurve oder eine Erzeugung vom Typus (2.5) bzw. (2.8) bedeutet. Weiter dürfen die Komponenten M_i selbst wieder Produktmannigfaltigkeiten mit den geforderten Eigenschaften sein; somit enthält Satz 2 seine Verallgemeinerung auf n-fache Produktmannigfaltigkeiten, d.h. auf die n-fachen unabhängigen Komposita der zugehörigen Funktionenkörper.

Vergleicht man speziell die Zetafunktion des direkten Produktes von n singularitätenfreien ebenen Kurven mit der arithmetischen Zetafunktion des zugehörigen Funktionenkörpers bei symmetrischer Erzeugung (Korollar 1 zu Satz 1), so folgt aus Satz 2 das

Korollar 1 zu Satz 2. *Die geometrische Zetafunktion des Funktionenkörpers $A = K(M_1) \cdots K(M_n)$ des Produktes von n singularitätenfreien ebenen Kurven M_i stimmt bei der Ersetzung $z = q^{-s}$ mit der arithmetischen Zetafunktion dieses Körpers bei der entsprechenden symmetrischen Erzeugung $x_1, \ldots, x_n$ überein, d.h. es ist*

$$\zeta_A(z; M_1 \times \cdots \times M_n) = Z_A(s; x_1, \ldots, x_n), \quad \textit{falls } z = q^{-s}. \tag{2.18}$$

Sind speziell n Geraden zugrunde gelegt, so stimmt die geometrische Zetafunktion des (zugehörigen) rationalen Funktionenkörpers von n Veränderlichen über k bei der Substitution $z = q^{-s}$ mit der in (1.25) erklärten Zetafunktion überein. Vergleich mit (2.7) zeigt, daß für $n \geq 2$ diesem Körper mindestens zwei verschiedene geometrische Zetafunktionen zugeordnet werden können[24]). Diese Unterschiede lassen sich jedoch durch die verschiedene Erfassung des „Unendlichen" in einfach- bzw. mehrfach-projektiven Räumen erklären.

2.3. *Halbrationale Funktionenkörper von zwei Veränderlichen.* Es sei

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{2.19}$$

eine singularitätenfreie homogene Erzeugung einer ebenen Kurve C_1 vom Geschlecht g über k, $N^{(r)}(C_1)$ die Lösungsanzahl von (2.19) in k und

$$\zeta_{C_1}(z) = \zeta_{K(C_1)}(z; C_1) = \frac{\prod_{\lambda=1}^{2g} (1 - \alpha_\lambda z)}{(1 - z)(1 - qz)} \tag{2.20}$$

die zugehörige Zetafunktion. Ist weiter H_1 eine Gerade, so ist nach dem Korollar 1 von Satz 2

$$\zeta_{C_1 \times H_1}(z) = \zeta_{K(C_1) \cdot K(H_1)}(z; C_1 \times H_1) = \zeta_{K(C_1)}(z; C_1)\, \zeta_{K(C_1)}(qz; C_1); \tag{2.21}$$

der zugehörige Funktionenkörper $K(C_1) \cdot K(H_1)$ ist ein halbrationaler Funktionenkörper von zwei Veränderlichen[25]) über k.

[24]) Für $n \geq 3$ sogar in einfacher Weise noch mehr, indem man Produkte von Geraden, Ebenen und Hyperebenen bildet.

[25]) Ein solcher ist als unabhängiges Kompositum eines rationalen und eines Funktionenkörpers höheren Geschlechts über k darstellbar; vgl. im klassischen Fall etwa H. W. E. Jung [4], S. 181.

Wir betrachten gleichzeitig die durch die Gl. (2.19) im projektiven Raum R_3 erzeugte Fläche M, deren Funktionenkörper $K(M) = K(C_1) \cdot K(H_1)$ ist, und untersuchen die geometrische Zetafunktion $\zeta_{K(M)}(z; M)$. Die Anzahl der rationalen Punkte von M in $k^{(r)}$ bestimmt sich durch die von C_1 gemäß

$$N^{(r)}(M) = 1 + q\, N^{(r)}(C_1), \tag{2.22}$$

also ist im Konvergenzbereich der Reihendarstellung (2.3)

$$\zeta_{K(M)}(z; M) = \frac{1}{1-z}\, \zeta_{K(C_1)}(qz; C_1). \tag{2.23}$$

Diese halbrationalen Funktionenkörper liefern also ein weiteres Beispiel dafür, daß man einem Funktionenkörper verschiedene geometrische Zetafunktionen zuordnen kann.

Bezeichnen wir mit $L_{C_1}(z)$ das Zählerpolynom von $\zeta_{K(C_1)}(z; C_1)$, so gelten wegen (1.4) folgende „Funktionalgleichungen" für $\zeta_{K(M)}(z; M)$

$$\frac{\zeta_{K(M)}(z; M)}{\zeta_{K(M)}\left(\frac{1}{q^2 z}; M\right)} = -\frac{z^{2g-3}}{q^{3-g}} \cdot \frac{L_{C_1}(qz)}{L_{C_1}(z)} \tag{2.24}$$

bzw.

$$\frac{\zeta_{K(M)}(z; M)}{\zeta_{K(M)}\left(\frac{1}{q^3 z}; M\right)} = -\frac{z^{2g-3}}{q^{3g-6}} \cdot \frac{1-q^3 z}{1-z}, \tag{2.25}$$

die beide nicht vom Typus (2.14) sind[26]).

§ 3. Arithmetische Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher

3.1. *Zetafunktionen in arithmetischen Funktionenkörpern.* Einem arithmetischen Funktionenkörper A von n Veränderlichen, d. h. einer endlich-erzeugbaren Erweiterung vom Transzendenzgrad n über einem endlich-algebraischen Zahlkörper $\varkappa = A_0$, lassen sich gemäß Definition 1 (a) (unvollständige) arithmetische Zetafunktionen zuordnen. Aber auch das Schema der geometrischen Zetafunktion kann, wie folgt, übertragen werden:

Es sei M eine Mannigfaltigkeit über $\varkappa$ mit dem Funktionenkörper $K(M) = A$, die in einem ein- oder mehrfach projektiven Raum durch die homogenen Polynome

$$f_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_m) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l;\ l \geq m - n) \tag{3.1}$$

mit ganzalgebraischen Koeffizienten aus $\varkappa$ und vom jeweiligen Inhalt 1 gegeben sei. Ist $\mathfrak{P}_0$ ein endlicher Primdivisor von $\varkappa$, so bedeute $M\mathfrak{P}_0$ die durch

$$f_{\lambda, \mathfrak{P}_0}(x_0, x_1, \ldots, x_m) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l;\ l \geq m - n) \tag{3.2}$$

erklärte Kongruenzmannigfaltigkeit über $\varkappa\mathfrak{P}_0$ (Galoisfeld von $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_0)$ Elementen), wobei jeweils $f_{\lambda, \mathfrak{P}_0}$ aus f_λ entsteht, indem man die Koeffizienten durch ihre Restklassen mod $\mathfrak{P}_0$ ersetzt.

[26]) Auch beim Übergang von z zu $1/qz$ gilt keine Funktionalgleichung vom Typus (2.14). — Entsprechend lassen sich allgemeinere Beispiele mit dieser Eigenschaft bilden.

Definition 2(a). *Durch*

$$\zeta_A(s;M)=\prod_{\mathfrak{P}_0}\zeta_{K(M\mathfrak{P}_0)}(\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_0)^s;M\mathfrak{P}_0), \tag{3.3}$$

wobei das Produkt über alle endlichen Primdivisoren $\mathfrak{P}_0$ *von* $\varkappa$ *läuft und* $\zeta_{K(M\mathfrak{P}_0)}(z;M\mathfrak{P}_0)$ *jeweils entsprechend*[27]) *Definition* 2(e) *bestimmt ist, wird die* geometrische Zetafunktion $\zeta_A(s;M)$ *des arithmetischen Funktionenkörpers* A *bezüglich* M *erklärt.*

Bis jetzt wurden Zetafunktionen von arithmetischen Funktionenkörpern K_i einer Veränderlichen vom Geschlecht g_i in folgenden Spezialfällen untersucht:

(I) *Rationale Funktionenkörper* $K_i=\varkappa(x)$;

(II) *Körper vom Fermatschen Typus*, d.h. solche, die durch eine Gleichung der Form

$$a\,y^m+b\,x^n=c \qquad (a,b,c\in\varkappa) \tag{3.4}$$

über einem Körper $\varkappa$, der die m-ten und n-ten Einheitswurzeln enthält, erzeugt sind (von A. Weil [9b] auf geometrischem[28]) und von Hasse [3b] auf arithmetischem Wege untersucht).

(III) *Elliptische Funktionenkörper mit komplexer Multiplikation* (von Deuring [2b] auf vorwiegend geometrischem Wege[28]) untersucht).

Die Zetafunktionen sind von der Struktur

$$Z^*_{K_i}(s)=(\zeta_{K_i}(s;M))=Z^*_\varkappa(s)\,Z^*_\varkappa(s-1)\cdot\prod_{\nu_i=1}^{2g_i}L^*_\varkappa(s|\lambda_{i\nu_i})^{-1}, \tag{3.5}$$

wobei die $L^*_\varkappa(s|\lambda_{i\nu_i})$ jeweils mit *Heckeschen Größencharakteren* $\lambda_{i\nu_i}$ gebildete L-Funktionen von $\varkappa$ sind[29]). Ein Größencharakter $\lambda_{i\nu_i}$ ist dabei eine komplexwertige Funktion der zu einem Führer $\mathfrak{f}(\lambda_{i\nu_i})$ primen ganzen Divisoren von $\varkappa$, die der Funktionalgleichung $\lambda_{i\nu_i}(\mathfrak{AB})=\lambda_{i\nu_i}(\mathfrak{A})\cdot\lambda_{i\nu_i}(\mathfrak{B})$ genügt und die für Hauptdivisoren (α) mit $\alpha\equiv 1 \bmod \mathfrak{f}(\lambda_{i\nu_i})$ gemäß

$$\lambda_{i\nu_i}((\alpha))=\prod_\mu\alpha_\mu^{a_\mu}\prod_\mu|\alpha_\mu|^{c_\mu} \qquad (\alpha_\mu \text{ alle Konjugierten von } \alpha) \tag{3.6}$$

mit ganzrationalen Zahlen a_μ und komplexzahligen c_μ darstellbar ist[30]). Die Werte der $2g_i$ Größencharaktere $\lambda_{i\nu_i}$ für die zu $\mathfrak{f}(\lambda_{i\nu_i})$ primen Primdivisoren $\mathfrak{P}_0$ von $\varkappa$ werden bei geeigneter Numerierung durch die $2g_i$ Nullstellen der

[27]) Auch falls $M\mathfrak{P}_0$ keine irreduzible Mannigfaltigkeit, d.h. falls $K(M\mathfrak{P}_0)$ kein Körper, sondern eine Algebra über $\varkappa\mathfrak{P}_0$ ist, werde $\zeta_{K(M\mathfrak{P}_0)}(z;M\mathfrak{P}_0)$ durch (2.3), (2.4) erklärt, da die Lösungsanzahlen $N^{(\nu)}(M\mathfrak{P}_0)$ von (3.2) unabhängig von der Körpereigenschaft erklärt sind.

[28]) Bei den geometrischen Untersuchungen wurden die endlich vielen Faktoren in (3.3), bei denen $K(M\mathfrak{P}_0)$ von A abweichendes Geschlecht hat, zunächst vernachlässigt; in diesem Sinne lassen sich die Deuringschen Ergebnisse in die arithmetische Sprechweise übersetzen.

[29]) Im Fall (I) ist das Produkt $\prod_{\nu_i=1}^{2g_i}$ durch 1 zu ersetzen.

[30]) Vgl. etwa A. Weil [9d], S. 487.

jeweiligen Zetafunktionen $Z_{K_i\mathfrak{P}_0'}(s)$ bzw. $\zeta_{K(M_i\mathfrak{P}_0)}(\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_0)^{-s}; M)$ geliefert; die hierzu erforderliche Sortierung der Nullstellen wird z.B. in (II) mit Hilfe gruppentheoretischer Überlegungen durchgeführt (die Nullstellen sind Jacobische Summen, deren Argumente Gruppencharaktere sind).

Wir formulieren folgenden weiteren Kompositionssatz:

Satz 3. *Ist* $A \cong K_1 \cdots K_n$ *ein symmetrisch-erzeugbarer arithmetischer Funktionenkörper von n Veränderlichen über* $\varkappa$ *und ist für* $i = 1, \ldots, n$ *bei der zugrunde gelegten Erzeugung die arithmetische Zetafunktion* $Z_{K_i}^*(s; x_i)$ *vom Typus* (3.5), *wobei die Größencharaktere* $\lambda_{i\nu_i}$ *durch die Nullstellen von* $Z_{K_i\mathfrak{P}_0'}(s)$ *bestimmt sind, so ist die arithmetische Zetafunktion von A von der Form*

$$(3.7)\quad \left\{ \begin{array}{l} Z_A^*(s; x_1, \ldots, x_n) \\ = Z_\varkappa^{*[n]}(s) \prod\limits_{k=1}^{n} \Bigg(\prod\limits_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} \prod\limits_{\nu_{i_1}=1}^{2g_{i_1}} \cdots \prod\limits_{\nu_{i_k}=1}^{2g_{i_k}} \left[L_\varkappa^{*[n-k]}(s \mid \lambda_{i_1\nu_{i_1}} \cdots \lambda_{i_k\nu_{i_k}}) \right]^{(-1)^{k+1}} \Bigg), \end{array} \right.$$

wobei $Z_\varkappa^{*[n]}(s)$ *bzw.* $L_\varkappa^{*[n-k]}(s \mid \lambda_{i_1\nu_{i_1}} \cdots \lambda_{i_k\nu_{i_k}})$ *wie in* (1.23) *erklärt ist. Dies gilt insbesondere dann, wenn alle* K_i *vom Typus* (I) *bzw.* (II) *bzw.* (III) *sind.*

Beweis. Aus der Definition der symmetrischen Erzeugbarkeit folgt unmittelbar, daß auch $(K_1 \cdots K_n)\mathfrak{P}_0' \cong K_1\mathfrak{P}_0' \cdots K_n\mathfrak{P}_0'$ für jeden Primdivisor $\mathfrak{P}_0'$ symmetrisch-erzeugbar ist. Da ferner das Produkt endlich vieler Größencharaktere wieder ein Größencharakter ist (erklärbar nach dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Führer), folgt wegen (1.24) und der Voraussetzung (3.5) bei der zugrunde gelegten Sortierung der Nullstellen (3.7), was die Behauptung ergibt.

Das obige Kompositionsschema läßt sich verallgemeinern auf den Fall, daß jede Komponente K_i von A ein Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher über $\varkappa$ ist, dessen Zetafunktion Quotient von Produkten von L-Funktionen von $\varkappa$ mit durch die Nullstellen bzw. Pole von $Z_{K_i\mathfrak{P}_0'}(s)$ bestimmten Größencharakteren ist.

Auch die geometrischen Zetafunktionen können in weiteren Spezialfällen arithmetischer Funktionenkörper von höherem Transzendenzgrad bestimmt werden: 1. M sei eine durch eine Gleichung der Form (2.5) über einem Zahlkörper erzeugte Mannigfaltigkeit[31]; 2. M sei Produktmannigfaltigkeit, deren Komponenten vom Typus (I), (II), (III) oder 1. sind. Die zugehörigen geometrischen Zetafunktionen sind dann wieder als Quotienten von Produkten von Heckeschen L-Funktionen darstellbar.

3.2. *Vergleich arithmetischer Funktionenkörper einer Veränderlichen mit Doppelkörpern über einem Galoisfeld.* Die weitgehenden Parallelen zwischen der Arithmetik eines endlich-algebraischen Zahlkörpers $\varkappa$ einerseits und der eines Funktionenkörpers K_i einer Veränderlichen über einem Galoisfeld andererseits legen es nahe, entsprechende Parallelen in der nächsthöheren Stufe zu

[31]) Die Nullstellen von $\zeta_{K(M\mathfrak{P}_0)}(z; M\mathfrak{P}_0)$ sind dann allgemeine Jacobische Summen und liefern bei entsprechender Sortierung wie in (II) Heckesche Größencharaktere von $\varkappa$.

suchen, d.h. zwischen arithmetischen Funktionenkörpern einer Veränderlichen und Funktionenkörpern zweier Veränderlichen über einem Galoisfeld. Wir wollen hier einen solchen Vergleich für die arithmetischen Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper K_i der in **3.1** aufgezählten Typen (I), (II), (III) und für *Doppelkörper* über einem Galoisfeld, d.h. symmetrisch-erzeugbare Funktionenkörper $A = K_1 \cdot K_2$ zweier Veränderlichen, durchführen.

In beiden Fällen wird der Gesamtkörper zunächst als Funktionenkörper einer Veränderlichen über einem relativen „Konstantenkörper" aufgefaßt [vgl. (0.3)]; dieser „Konstantenkörper" ist im ersten Fall (a) der in natürlicher Weise ausgezeichnete endlich-algebraische Zahlkörper $\varkappa$, im zweiten Fall (e) eine zunächst willkürlich ausgezeichnete Komponente von A, etwa K_1. Während aber im Fall (e) alle Primdivisoren von K_1 zugrunde gelegt werden, beschränkt man sich im Fall (a) auf die endlichen Primdivisoren von $\varkappa$, d.h. auf die nichtarchimedischen Bewertungen. Dies hat folgende Konsequenzen:

Beim Übergang von s zu $2-s$ genügt $Z^*_{K_i}(s)$ einer durch die Funktionalgleichungen von $Z^*_\varkappa(s)$ und $L^*_\varkappa(s|\lambda_{i\nu_i})$ bestimmten Funktionalgleichung, die aber von der von $Z_{K_1 \cdot K_2}(s)$ [vgl. (1.11), (1.21)] insofern abweicht, als auf der rechten Seite noch Γ-Faktoren usw. stehen. Ergänzt man $Z^*_\varkappa(s)$ und $L^*_\varkappa(s|\lambda_{i\nu_i})$ in geläufiger Weise (vgl. etwa HASSE [3e]) durch Hinzunahme von Beiträgen der unendlichen Primdivisoren zu vollständigen Zeta- bzw. L-Funktionen, so daß die ergänzten Funktionen $Z_\varkappa(s)$, $L_\varkappa(s|\lambda_{i\nu_i})$ einer Funktionalgleichung vom Typus (1.11)[32]) genügen, so trifft dies auch für $Z_{K_i}(s)$ beim Übergang von s zu $2-s$ zu. Die so hinzugekommenen Faktoren können als Beiträge der unendlichen Primstellen $\mathfrak{P}_0$ von $\varkappa$ zu $Z_{K_i}(s)$ geschrieben werden und $Z_{K_i}(s)$ werde die vollständige arithmetische Zetafunktion von K_i genannt[33]).

Wir vergleichen jetzt die Darstellung (3.5) von $Z^*_{K_i}(s)$ mit der aus (1.17) folgenden Darstellung der arithmetischen Zetafunktion des Doppelkörpers $K_1 \cdot K_2$

$$(3.8)\quad \begin{cases} Z_{K_1 \cdot K_2}(s) = Z_{K_1}(s)\, Z_{K_1}(s-1) \prod\limits_{\nu_1=1}^{2g_1} Z_{K_1}(s-\gamma_{2\nu_2})^{-1}, \\ \text{mit } q^{\gamma_{2\nu_2}} = \alpha_{2\nu_2},\ \alpha_{2\nu_2}\ (\nu_2 = 1, \ldots, 2g_2) \text{ alle Nullstellen von } Z_{K_2}(s) \text{ in } q^{-s}. \end{cases}$$

Obwohl der Begriff des Heckeschen Größencharakters zunächst auf endlich-algebraische Zahlkörper beschränkt ist, können auch die $2g_2$ letzten Faktoren in (3.8) als formale „L-Funktionen" von K_1 geschrieben werden; es ist nämlich

$$(3.9)\qquad Z_{K_1}(s-\gamma_{2\nu_2}) = L_{K_1}(s|\lambda_{2\nu_2}) = \prod_{\mathfrak{P}} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{P})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{P})^s}} \qquad (\nu_2 = 1, \ldots, 2g_2),$$

wobei das Produkt über alle Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von K_1 läuft und $\lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{P})$ für alle Divisoren $\mathfrak{A}$ von K_1 jeweils durch

$$(3.10)\quad \begin{cases} \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{A}) \cdot \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{B}), \\ \lambda_{2\nu_2}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{\gamma_{2\nu_2}} \quad \text{für alle } \mathfrak{P} \text{ von } K_1, \end{cases}$$

[32]) Für q^{h_i} ist natürlich eine andere Konstante zu setzen.

[33]) Die einfachen und formalen Umrechnungen sollen hier nicht weiter ausgeführt werden.

erklärt ist. $\lambda_{2\nu_1}$ ist gemäß (3.10) eine komplexwertige „Multiplikativdarstellung" der Divisorengruppe von K_1 (vom „Führer" 1), die für alle Hauptdivisoren den Wert 1 annimmt[34]). Entsprechend wie nach einer Bemerkung von A. WEIL (vgl. [9d, e]) jedem Heckeschen Größencharakter ein *Idelklassencharakter* des Zahlkörpers $\varkappa$ entspricht, kann man auch jedem unserer obigen $\lambda_{2\nu_1}$ einen Multiplikativcharakter vom „Führer" 1 der (abstrakten) Idelklassengruppe von K_1 zuordnen durch folgende Festsetzung

$$(3.11)\quad \begin{cases} \lambda_{2\nu_1}[\xi\eta] = \lambda_{2\nu_1}[\xi]\,\lambda_{2\nu_1}[\eta] & (\xi, \eta \text{ Idele von } K_1) \\ \lambda_{2\nu_1}[\xi_{\mathfrak{P}}] = \lambda_{2\nu_1}(\mathfrak{P}^{w_{\mathfrak{P}}(\xi_{\mathfrak{P}})}), & \text{falls } \xi_{\mathfrak{P}} = (1, \ldots, 1, \xi_{\mathfrak{P}}, 1, \ldots, 1). \end{cases}$$

Dies legt nahe, $\lambda_{2\nu_1}$ als Spezialfall einer allgemeineren Klasse von Charakterfunktionen der Idelklassen- bzw. Divisorengruppe von K_1, die auch die Kongruenzcharaktere von K_1 umfaßt, zu deuten und neben der Frage nach der Struktur dieser Gruppe auch zu untersuchen, ob allgemeinere solcher Charakterfunktionen im Zusammenhang mit der Theorie der Zetafunktionen auftreten[35]).

Einen speziellen Einbettungsprozeß dieser „Charaktere" erhält man folgendermaßen: Man bildet das direkte Produkt der Gruppe der Kongruenzcharaktere $\chi(\mathfrak{A})$ von K_1 mit der Gruppe der „Charaktere"

$$(3.12)\qquad \lambda_c(\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{A})^c \qquad (c \text{ komplexe Zahl, } \mathfrak{A} \text{ Divisor von } K_1).$$

Bezeichnung $\chi \times \lambda_c(\mathfrak{A}) = \chi(\mathfrak{A})\,\lambda_c(\mathfrak{A})$[36]). Läßt man auch Linearkombinationen der $\chi \times \lambda_c$ mit ganzrationalen Koeffizienten zu, d.h. betrachtet man Elemente $\Lambda(\mathfrak{A}) = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu\, \chi_\mu \times \lambda_{c_\mu}(\mathfrak{A})$ (a_μ ganzrational) des ganzzahligen zugehörigen Gruppenringes, so kann man nach dem Schema der Artinschen L-Funktionen (vgl. HASSE [3e]) allgemeinere L-Funktionen von K_1 bilden:

$$(3.13)\quad L_{K_1}(s|\Lambda) = \prod_{\mathfrak{P}} L_{\mathfrak{P}}(s|\Lambda, K_1) \quad \text{wobei} \quad \log L_{\mathfrak{P}}(s|\Lambda, K_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(\mathfrak{P}^m)}{m \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{P}^m)^s};$$

$L_{K_1}(s|\Lambda)$ kann entsprechend der Summenzerlegung von $\Lambda(\mathfrak{A})$ in geläufiger Weise in ein Produkt zerlegt werden. In dieser Bezeichnungsweise ist

$$(3.14)\quad \begin{cases} Z_{K_1 \cdot K_2}(s) = L_{K_1}(s|\Lambda_2) \quad \text{mit} \quad \Lambda_2(\mathfrak{A}) = \lambda_0(\mathfrak{A}) + \lambda_1(\mathfrak{A}) - \sum_{\nu_1=1}^{2g_2} \lambda_{2\nu_1}(\mathfrak{A}), \\ \text{wobei } \lambda_0, \lambda_1 \text{ gemäß (3.12), } \lambda_{2\nu_1} \text{ gemäß (3.10) erklärt sind.} \end{cases}$$

[34]) Der Wert von $\lambda_{2\nu_1}$ hängt sogar nur vom Grad des Divisors ab; $\lambda_{2\nu_1}$ ist aber nicht auf den absoluten Betrag 1 normiert. — Man beachte die Analogie zu Größencharakteren vom Führer 1 im rationalen Zahlkörper.

[35]) Eventuell bei nicht symmetrisch erzeugbaren Funktionenkörpern. Zusatz bei der Korrektur: Diese Frage kann auf Grund eines neueren Ergebnisses des Verf. [Arch. Math. **6**, 266—274 (1955), insbes. S. 271] bejaht werden.

[36]) Es ist $\chi \times \lambda_c(\mathfrak{A}) = 0$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{A}$ nicht prim zum Führer $\mathfrak{f}(\chi)$ von χ ist, da in diesem Fall nach der üblichen Konvention $\chi(\mathfrak{A}) = 0$ gesetzt wird.

Es sei K_1' ein abelscher Erweiterungskörper von K_1 vom Grade m mit dem genauen Konstantenkörper $k^{(r)}$; dann ist

$$Z_{K_1'}(s) = \prod_{\chi} L_{K_1}(s|\chi),$$

wobei das Produkt über alle zur Erweiterung K_1' über K_1 gehörigen Kongruenzcharaktere läuft. Der Doppelkörper $K_1' \cdot K_2^{(r)}$ ist (im Sinne der Isomorphie) eine abelsche Erweiterung m-ten Grades von $K_1 \cdot K_2$, dessen Galoisgruppe zu der von K_1' über K_1 isomorph ist, und werde eine (abelsche) relative Konstantenerweiterung des Doppelkörpers $K_1 \cdot K_2$ genannt. Wie durch einfache Umrechnung zu bestätigen ist, kann die arithmetische Zetafunktion von $K_1' \cdot K_2^{(r)}$ durch die in der Form (3.14) geschriebene Zetafunktion von $K_1 \cdot K_2$ ausgedrückt werden; es ist

$$Z_{K_1' \cdot K_2^{(r)}}(s) = \prod_{\chi} L_{K_1}(s|\Lambda_2 \chi), \tag{3.15}$$

wobei Λ_2 gemäß (3.14) bestimmt ist und χ alle zur Erweiterung K_1' über K_1 gehörigen Kongruenzcharaktere durchläuft.

Im Fall eines Zahlkörpers $\varkappa$ sind die Kongruenzcharaktere ein Spezialfall der Größencharaktere. Nach dem Vorgang von A. Weil [9e] kann man noch allgemeinere Charakterfunktionen Λ einführen, die einerseits die Heckeschen Größencharaktere und andererseits die Artinschen Gruppencharaktere endlicher galoisscher Erweiterungen $\varkappa'$ von $\varkappa$ als Spezialfälle enthalten, und mit diesen Λ analog zu (3.13) L-Funktionen bilden, die in ein Potenzprodukt von Heckeschen L-Funktionen von Zwischenkörpern zwischen $\varkappa'$ und $\varkappa$ zerlegbar sind. Führt man analog zu (3.14) die speziellen Weilschen Charakterfunktionen $\Lambda_i(\mathfrak{A}) = \lambda_0(\mathfrak{A}) + \lambda_1(\mathfrak{A}) - \sum_{\nu_i=1}^{2g_i} \lambda_{i\nu_i}(\mathfrak{A})$ von $\varkappa$ ein, so wird aus (3.5) $Z_{K_i}^*(s) = L_\varkappa(s|\Lambda_i)$. Bei Verwendung dieser Bezeichnungen läßt sich eine weitere formale Analogie zwischen den Fällen (a) und (e) angeben.

Lemma 2. *Ist die arithmetische Zetafunktion eines arithmetischen Funktionenkörpers K_i einer Veränderlichen über $\varkappa$ (bei einer Erzeugung) in der Form $Z_{K_i}^*(s) = L_\varkappa(s|\Lambda_i)$ als L-Funktion zu einer geeigneten Weilschen Charakterfunktion Λ_i von $\varkappa$ darstellbar, so gilt (bei entsprechender Erzeugung) für die Zetafunktion jeder abelschen Konstantenerweiterung*[37]) *$\varkappa' \cdot K_i$ über $\varkappa'$ analog zu* (3.15)

$$Z_{K_i\varkappa'}^*(s) = \prod_{\chi} L_\varkappa(s|\Lambda_i \chi), \tag{3.16}$$

wobei das Produkt über alle zur Erweiterung $\varkappa'$ über $\varkappa$ gehörigen Kongruenzcharaktere läuft[38]).

[37]) Diese Konstantenerweiterung entspricht sinngemäß der relativen Konstantenerweiterung im Doppelkörperfall; ein Analogon zur absoluten Konstantenerweiterung des Galoisfeldes gibt es im Fall (a) naturgemäß nicht.

[38]) Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß das Zerlegungsverhalten der Primdivisoren $\mathfrak{P}_0$ von $\varkappa$ mit dem ihrer Fortsetzungen $\mathfrak{P}_0'$ bei dieser Konstantenerweiterung übereinstimmt.

§ 4. Weitere Bemerkungen, insbesondere zum Invarianzproblem

4.1. *Auszeichnung von Erzeugungen.* Im Unterschied zu den Bemerkungen des vorigen Paragraphen treten beim Invarianzproblem, d.h. bei der Frage nach der Abhängigkeit der arithmetischen Zetafunktionen von der Erzeugung der Körper, zunächst Unterschiede zwischen den Fällen (a) und (e) auf. Während nämlich beim arithmetischen Funktionenkörper von $n \geq 1$ Veränderlichen eine Abhängigkeit von n Größen $x_1, \ldots, x_n$ vorliegt (der Konstantenkörper $\varkappa$ ist ja invariant ausgezeichnet), ist im Fall (e) der gleichen Stufe, d.h. beim Funktionenkörper von $n+1$ Veränderlichen über einem Galoisfeld k, zunächst eine Abhängigkeit von $n+1$ Größen $x_1, \ldots, x_{n+1}$ vorhanden, da ja der erste Körper A_1 aus (0.3) in keiner Weise invariant ausgezeichnet ist. Man weiß jedoch: *Wurde der erste Teilkörper A_1 einmal (durch ein x_1) ausgezeichnet, so ändert sich die arithmetische Zetafunktion nicht, wenn man x_1 durch ein anderes $x_1' \in A_1$ ersetzt.*

Dies führt zu folgender Fragestellung: Kann im Fall (e) einer der möglichen Teilkörper A_1 oder kann allgemeiner überhaupt eine Erzeugung des Körpers invariant ausgezeichnet werden[39])? — Bei einem rationalen Funktionenkörper $k(x_1, \ldots, x_n)$ z.B. kann man die (rationale) Erzeugung durch Adjunktion von n algebraisch-unabhängigen Elementen zu k als in natürlicher Weise ausgezeichnet ansehen.

Dieser Gedankengang soll hier zunächst bei Doppelkörpern $K_1 \cdot K_2$ weiter verfolgt werden; wir setzen dabei voraus, daß der Konstantenkörper k entweder ein Galoisfeld oder ein Körper der Charakteristik 0, d.h. stets *vollkommen* ist [somit sind die Resultate auch im Fall (a) anwendbar]. Wegen der Vollkommenheit von k ist jede Komponente K_i separabel erzeugbar und es gibt mindestens eine Erzeugung der Form

$$(4.1)\quad \begin{cases} K_i = k(x_{i1}, x_{i2}), \\ x_{i2} \text{ separabel und algebraisch über } k(x_{i1}) \text{ mit } f_i(x_{i1}, x_{i2}) = 0; \end{cases}$$

die Erzeugung wird also durch eine Gleichung $f_i = 0$ beschrieben.

Die Zahl der möglichen Erzeugungen eines *Doppelkörpers* A schränken wir nun durch die folgenden (invarianten) Forderungen ein:

(I) A soll als Doppelkörper dargestellt sein.

(II) Jede Komponente K_i von A soll in der Form (4.1) erzeugt sein.

Wir lassen somit für A nur Erzeugung folgender Form zu:

$$(4.2)\quad \begin{cases} A = K_1 \cdot K_2 = k(x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22}), \text{ wobei für } i = 1, 2 \\ K_i = k(x_{i1}, x_{i2}) \text{ separabel algebraisch über } k(x_{i1}) \text{ mit } f_i(x_{i1}, x_{i2}) = 0 \\ \text{und vom Geschlecht } p_i \text{ ist und jeweils } x_{1j}, x_{2l} \text{ algebraisch unabhängig sind.} \end{cases}$$

[39]) Einer solchen invariant ausgezeichneten Erzeugung würde ja eine ausgezeichnete arithmetische Zetafunktion entsprechen, die eine Invariante des Körpers wäre; dies bedeutete einen Ersatz für das in der Einleitung formulierte Invarianzproblem.

Es sei nun

$$(4.2')\quad \begin{cases} A = K_1' \cdot K_2' = k(x_{11}', x_{12}'; x_{21}', x_{22}'), \quad K_i' = k(x_{i1}', x_{i2}') \text{ separabel alge-} \\ \text{braisch über } k(x_{i1}') \text{ mit } f_i'(x_{i1}', x_{i2}') = 0 \text{ und vom Geschlecht } p_i' \\ (i = 1, 2),\ x_{1j}', x_{2l}' \text{ algebraisch unabhängig über } k^{40}), \end{cases}$$

eine zweite Darstellung des gleichen Körpers A als Doppelkörper $K_1' \cdot K_2'$. Dann ist

$$(4.3)\qquad x_{ij} = R_{ij}(x_{11}', x_{22}'; x_{21}', x_{22}') \qquad (i, j = 1, 2),$$

bzw.

$$(4.3')\qquad x_{ij}' = R_{ij}'(x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22}) \qquad (i, j = 1, 2),$$

wobei die R_{ij} und R_{ij}' jeweils rationale Funktionen der angegebenen Argumente sind.

Tritt bei einer dieser Umformungen in R_{i1} und R_{i2} (i fest) jeweils nur ein Argumentpaar x_{jl}' auf, etwa x_{11}' und x_{12}', so sagen wir, K_i ist *ungemischt* durch K_1' bestimmt; anderenfalls sagen wir, K_i ist *gemischt* durch K_1' und K_2' bestimmt (entsprechend bei anderen Indizes und bei der umgekehrten Richtung). — Bei den obigen Voraussetzungen und Bezeichnungen gilt das folgende

Lemma 3[41]). *Ist K_i ungemischt durch K_j' bestimmt, so ist K_i ein Teilkörper von K_j', d.h. $K_i \subseteqq K_j'$, und es ist $p_i \leq p_j'$. Ist K_i gemischt durch K_1' und K_2' bestimmt, dann besitzt bei einer geeigneten Konstantenerweiterung $\tilde{k}$ von k sowohl $\tilde{K}_1'$ als auch $\tilde{K}_2'$ einen zu $\tilde{K}_i$ isomorphen Teilkörper, d.h. $p_i \leq p_1'$ und $p_i \leq p_2'$.*

Beweis. Die Enthaltenseinsaussage im ungemischten Fall ist trivial. — Im gemischten Fall treten in R_{i1} und R_{i2} aus jedem Argumentpaar (x_{11}', x_{12}') bzw. (x_{21}', x_{22}') mindestens ein x_{ij}' wirklich auf. Es gilt aber $f_i(R_{i1}, R_{i2}) = 0$ für alle „Parameter" x_{ij}', die die Gleichungen $f_1'(x_{11}', x_{12}') = 0$ und $f_2'(x_{21}', x_{22}') = 0$ erfüllen. Dann kann man Elemente α und β aus einer geeigneten endlichalgebraischen Erweiterung $\tilde{k}$ von k so wählen, daß $f_1'(\alpha, \beta) = 0$ und daß $R_{i1}^* = R_{i1}(\alpha, \beta; x_{21}', x_{22}')$ und $R_{i2}^* = R_{i2}(\alpha, \beta; x_{21}', x_{22}')$ nicht beide algebraisch über k sind, wenn x_{21}' und x_{22}' die Erzeugenden von K_2' sind. Die Elemente R_{i1}^* und R_{i2}^* genügen einerseits der erzeugenden Gleichung der Konstantenerweiterung $\tilde{K}_i$ über $\tilde{k}$ und sind andererseits über $\tilde{k}$ nicht beide algebraisch und in $\tilde{K}_2'$ enthalten; folglich besitzt $\tilde{K}_2'$ einen durch R_{i1}^* und R_{i2}^* erzeugten zu $\tilde{K}_i$ isomorphen Teilkörper. Entsprechend schließt man für $\tilde{K}_1'$ und $\tilde{K}_i$. — Die Geschlechtsabschätzungen folgen aus der Tatsache, daß ein separabler Teilkörper stets kleineres Geschlecht hat und daß ein rein inseparabler Teilkörper eines Funktionenkörpers einer Veränderlichen über einem Galoisfeld zu seinem Oberkörper isomorph ist[42]); hiermit ist Lemma 3 bewiesen. —

[40]) Die Striche bedeuten hier stets den Hinweis auf die zweite Erzeugung, d.h. f_i' ist nicht mit der Ableitung von f_i zu verwechseln, die in diesem Zusammenhang nicht vorkommt.

[41]) Dieses Lemma ist die Fortführung eines bei F. W. E. Jung [4] aufgezeichneten Beweisgedankenganges.

[42]) Nach einer brieflichen Mitteilung von F. K. Schmidt.

Hat ein Doppelkörper zwei verschiedene Erzeugungen, d.h. ist $A = K_1 \cdot K_2 = K_1' \cdot K_2'$, wobei nicht $K_1 = K_1'$ und $K_2 = K_2'$, so tritt in mindestens einer Übergangsrichtung eine gemischte Erzeugung auf[43]; o. B. d. A. sei also K_1 gemischt durch K_1' und K_2' bestimmt. Nach Lemma 3 gibt es dann eine geeignete Konstantenerweiterung, so daß sowohl $\tilde{K}_1'$ als auch $\tilde{K}_2'$ einen zu $\tilde{K}_1$ isomorphen Teilkörper haben. Bei der umgekehrten Richtung hänge o. B. d. A. K_1' von K_1 ab; dann existiert eine geeignete Konstantenerweiterung von k zu $\tilde{\tilde{k}}$, so daß $\tilde{\tilde{K}}_1 \cong \tilde{\tilde{K}}_1'$ und daß $\tilde{\tilde{K}}_2'$ einen zu $\tilde{\tilde{K}}_1'$ isomorphen Teilkörper besitzt. — Entweder hängt auch K_2' von K_1 ab, dann sind wegen Lemma 3 bei geeigneter Konstantenerweiterung alle vier Komponentenkörper zueinander isomorph, oder K_2' muß bei einer Konstantenerweiterung zu K_2 isomorph werden. — Ist schließlich $p_2 > p_1$, so folgt aus den Geschlechtsabschätzungen, daß $K_2 = K_2'$ sein muß.

Satz 4. *Ein Doppelkörper $A = K_1 \cdot K_2$ kann höchstens dann auf eine zweite Art als Doppelkörper erzeugt werden, wenn es eine endlich-algebraische Konstantenerweiterung von k zu $\tilde{k}$ und eine geeignete Numerierung der Komponentenkörper K_i gibt, so daß $\tilde{K}_1$ einen zu $\tilde{K}_2$ isomorphen Teilkörper enthält. In diesem Fall ist aber bei einer geeigneten Konstantenerweiterung $\tilde{K}_1 \cong \tilde{K}_1'$ und $\tilde{K}_2 \cong \tilde{K}_2'$; ist sogar $p_2 > p_1$, so ist stets $K_2 = K_2'$.*

Hieraus folgt: Nimmt man in die Definition der arithmetischen Zetafunktionen eines Doppelkörpers die Forderungen auf, daß nur Erzeugungen vom Typus (I), (II) zugelassen sind, so gehen alle derart definierten Zetafunktionen des Körpers bei geeigneter Konstantenerweiterung stets in die gleiche Funktion über, d.h. die arithmetische Zetafunktion ist zumindest eine Fastinvariante des Körpers.

Zur Frage der Vollinvarianz bleibt noch zu klären, ob es zwei Funktionenkörper einer Veränderlichen über k gleichen Geschlechts gibt, die bei einer Konstantenerweiterung zueinander isomorph werden, deren Zetafunktionen aber verschieden sind (d.h. bei denen sich die Nullstellen um Einheitswurzelfaktoren unterscheiden)[44].

4.2. *Spezielle Bewertungssysteme.* Eine andere Möglichkeit das Invarianzproblem in Angriff zu nehmen, besteht darin, die Struktur des in die Definition eingehenden speziellen Bewertungssystems zu untersuchen. Eine Untersuchung von speziellen Bewertungssystemen in Funktionenkörpern mehrerer Veränderlicher, d.h. von solchen Systemen, die nicht alle Bewertungen des Körpers enthalten, wurde für einrangige diskrete Bewertungen von KRULL [6b] durchgeführt; etwas davon abweichend ist das in der Arithmetik eines Doppelkörpers vorkommende Bewertungssystem (vgl. ROQUETTE [7a, b]).

---

[43]) Ist eine Richtung rein ungemischt, so muß nach Voraussetzung mindestens einmal echtes Enthaltensein auftreten, also die umgekehrte Richtung gemischt sein.

[44]) Zusatz bei der Korrektur: Solche Körper gibt es, wie vom Verf. neuerdings [Arch. Math. 6, 271 (1955)] gezeigt werden konnte.

Welche Eigenschaften bei unserem speziellen 2-rangigen diskreten Bewertungssystemen ungefähr zu erwarten sind, wollen wir am Beispiel des rationalen Funktionenkörpers von zwei Veränderlichen über einem Galoisfeld skizzieren: 1. Alle Bewertungen bewerten den Konstantenkörper identisch. 2. Zu jedem nicht konstanten Element ξ gibt es mindestens eine Bewertung im System, bei der ξ nicht identisch bewertet wird (d.h. das Bewertungssystem ist *ausreichend*). 3. Jeder Bewertung ist invariant ein *Grad* $d(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_{1,2})$ zugeordnet (der Grad des Restklassenkörpers über dem Konstantenkörper). 4. Schreibt man die Werte der Bewertungen gemäß der Schachtelung $(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_{1,2})$ als geordnete Paare von ganzen Zahlen (a_1, b_2), so sind nur bei endlich vielen Paaren beide Komponenten von Null verschieden. 5. Bei festgehaltenem $\mathfrak{P}'_1$ gilt die modifizierte Summenregel

$$\sum_{\mathfrak{P}'_{1,2}} \nu_{\mathfrak{P}'_{1,2}}(\xi)\, d(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_{1,2}) = 0. \tag{4.4}$$

Literatur

[1] Chevalley, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable. Math. Surveys **6** (1951). — [2a] Deuring, M.: Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers. Math. Z. **47**, 643—654 (1942). — [2b] Deuring, M.: Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. **1953**, 85—94. — [3a] Hasse, H.: Über die Kongruenzzetafunktionen. Sitzgsber. Preuß. Akad. Wiss. **1934**, 250—263. — [3b] Hasse, H.: Zetafunktionen und L-Funktionen zu einem arithmetischen Funktionenkörper vom Fermatschen Typus. Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. **1954**, Nr. 4. — [3c] Davenport, H., u. H. Hasse: Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktion in gewissen zyklischen Fällen. J. reine angew. Math. **172**, 151—182 (1934). — [3d] Hasse, H.: Zahlentheorie. Berlin 1951. — [3e] Hasse, H.: Gaußsche Summen zu Normalkörpern über endlich-algebraischen Zahlkörpern: Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. **1952**, Nr. 1. — [4] Jung, H. W. E.: Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. Berlin 1951. — [5a] Kähler, E.: Über rein algebraische Körper. Math. Nachr. Berlin **5**, 69—92 (1951). — [5b] Kähler, E.: Algebra und Differentialrechnung. Ber. Math. Tagung Berlin **1953**, 58—163. — [6a] Krull, W.: Idealtheorie. Ergebn. Math. Grenzgeb. **4**, Berlin 1935. — [6b] Krull, W.: Über geschlossene Bewertungssysteme. J. reine angew. Math. **190**, 75—92 (1951). — [7a] Roquette, P.: Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Arch. Math. **4**, 6—16 (1953). — [7b] Roquette, P.: Arithmetischer Beweis der Riemannschen Vermutung in Kongruenzfunktionenkörpern beliebigen Geschlechts. J. reine angew. Math. **191**, 199—252 (1953). — [8] Schmidt, F. K.: Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. Math. Z. **33**, 1—32 (1931). — [9a] Weil, A.: Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. Act. Scient. Ind. **1041** (1948). — [9b] Weil, A.: Numbers of solutions of equations in finite fields. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 497—508 (1949). — [9c] Weil, A.: Number-Theory and Algebraic Geometry. Proc. Int. Math. Congress Cambridge **1950**, 90—100. — [9d] Weil, A.: Jacobi sums as „Größencharaktere". Trans. Amer. math. Soc. **73**, 487—495 (1952). — [9e] Weil, A.: Sur la Théorie du Corps de Classes. J. Math. Soc. Japan **3**, 1—35 (1951).

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. Oktober 1954)

LAUGWITZ, D.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 72—78 (1956)

Über einen Abbildungssatz von B. Sz.-Nagy

Von
DETLEF LAUGWITZ

Von BÉLA SZÖKEFALVI-NAGY rührt der folgende Satz her:

Es sei eine Abbildung des n-dimensionalen euklidischen Raumes auf sich gegeben

$$f(x) = \lambda(x) \cdot x \quad (\lambda(rx) = \lambda(x) \text{ für } r > 0;\ \lambda(x) > 0 \text{ für } x \neq 0), \tag{1}$$

welche die Einheitskugel $|x| \leq 1$ in einen konvexen Körper K überführt. Dann ist $f(x)$ „dehnungsbeschränkt":

$$|f(x) - f(x')| \leq M \cdot |x - x'|. \tag{2}$$

VINCZE und SZÜSZ [4] haben diesen Satz zusammen mit der Tatsache, daß auch f^{-1} dehnungsbeschränkt ist, für euklidische Räume beliebiger (auch unendlicher) Dimension bewiesen. HAUPT [1] hat gezeigt, daß für K in endlichdimensionalen euklidischen Räumen auch gewisse Sternbereiche zugelassen werden dürfen, und daß auf diese Weise dann alle dehnungsbeschränkten Abbildungen der Form (1) erhalten werden. V. L. KLEE [2] hat die Resultate von Sz.-NAGY, VINCZE und SZÜSZ nach einer anderen Richtung erweitert: Wenn die Abbildung f mit (1) in einem normierten Raume (endlicher oder unendlicher Dimension) einen beschränkten konvexen Körper mit 0 als Innenpunkt in einen anderen mit eben denselben Eigenschaften überführt, dann ist f dehnungsbeschränkt.

Wir werden hier einen Satz beweisen, der alle diese Resultate verallgemeinert[1]) und darüber hinaus eine Kennzeichnung der dehnungsbeschränkten Abbildungen (1) in beliebigen normierten Räumen gibt.

Eine Gerade in einem zweidimensionalen linearen Raum soll *freie Tangente* der Punktmenge M im Punkte x heißen, wenn sie Limes einer Folge von Verbindungsgeraden von Punkten $x_n \in M$, $x_n' \in M$ ist ($x_n \neq x_n'$, $x_n \to x$, $x_n' \to x$, $x \in M$; wegen des Limes einer Geradenfolge vgl. [1], p. 149, Anm. 7). *Tangentenmenge* einer Menge M in einem linearen Raum beliebiger (auch unendlicher) Dimension heiße die Punktmenge aus den Punkten aller freien Tangenten von $M \cap L$ in L, wo L alle *zwei*dimensionalen Unterräume durchläuft, welche 0 enthalten[2]). Eine Punktmenge S in einem linearen Raum beliebiger

[1]) KLEE [2] behandelt auch den Fall unsymmetrischer Normen ($||rx|| = r \cdot ||x||$ für $r \geq 0$), auf den wir hier nicht eingehen.

[2]) Für einen zweidimensionalen Raum sind Tangentenmenge und Paratingent [1] äquivalente Begriffe. Für Räume höherer Dimension kann man leicht Beispiele finden, die zeigen, daß die Tangentenmenge im allgemeinen eine echte Teilmenge des Paratingents ist.

Dimension heiße *stetig berandeter Sternbereich*, wenn sie mit jeder Geraden durch 0 eine abgeschlossene Strecke mit 0 als innerem Punkt gemeinsam hat, und wenn die Menge der Endpunkte aller dieser Strecken (der „*Rand*" von S) mit jedem zweidimensionalen linearen Unterraum durch 0 eine stetige Kurve gemeinsam hat[3]).

Alle vorkommenden Räume sind reelle lineare Räume mit mindestens zwei linear unabhängigen Elementen.

Satz. *Notwendig und hinreichend für die Dehnungsbeschränktheit der Abbildung*

(1) $f(x) = \lambda(x) \cdot x$ *mit* $\lambda(x) > 0$ *für* $x \neq 0$, $\lambda(rx) = \lambda(x)$ *für* $r > 0$

eines normierten Raumes auf sich und ihrer Inversen $f^{-1}(x) = \lambda^{-1}(x) \cdot x$ *ist die folgende Bedingung* **(B)**:

Es gibt zwei stetig berandete beschränkte Sternbereiche S_1, S_2 *(mit* 0 *als Innenpunkt), so daß* $f(S_1) = S_2$, *und Umgebungen* U_i $(i = 1, 2)$ *von* 0, *so daß die Tangentenmenge des Randes von* S_i *fremd zu* U_i *ist.*

Dem Beweis dieses Satzes schicken wir eine einfache Hilfsbetrachtung voraus[4]).

Lemma. *In jedem zweidimensionalen normierten* (Minkowskischen) *Raum* (*Norm* $\| \|$) *gibt es eine euklidische Metrik* (*Norm* $| |$) *mit*

$$\tfrac{1}{2} |x| \leq \|x\| \leq |x| \leq 2\|x\|.$$

Beweis des Lemmas. Die konvexe Mittelpunktskurve $\|x\| = 1$ besitzt ein Paar konjugierter Durchmesser (vgl. etwa [3], p. 238), d.h. solcher Durchmesser, die in ihren Endpunkten Stützstangenten besitzen, die zum anderen Durchmesser des Paares parallel sind. Wir können die Halbmesser e_1, e_2 des Paares als Basisvektoren des affinen Koordinatensystems wählen. Dann erfüllt bei $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ die Norm

$$|x| = \sqrt{\tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

die Ungleichung des Lemmas.

Wir zeigen jetzt:

Die Bedingung (B) des Satzes ist notwendig.

[3]) Dies bedeutet Stetigkeit des Randes bezüglich der feinsten Hausdorff-Topologie des Vektorraumes, eine Forderung, die schwächer ist als die Stetigkeit bezüglich einer Normtopologie.

[4]) Hier wie in den späteren Abschätzungen legen wir weniger Wert auf Angabe der besten Schranken als auf Kürze der Beweise und Übersichtlichkeit der Formeln. Nach einem Satz von F. John, Studies Essays pres. to R. Courant, 1948, 203, läßt sich zu jeder Norm $||x||$ im n-dimensionalen Raum eine euklidische Norm $|x|$ sogar so finden, daß $||x|| \leq |x| \leq \sqrt{n} \cdot ||x||$. Der Eichkörper der eindeutig bestimmten bestapproximierenden euklidischen Norm ist übrigens homothetisch zum Loewner-Ellipsoid des Eichkörpers $\{x; ||x|| \leq 1\}$.

Dazu genügt es zu zeigen: Wenn $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ dehnungsbeschränkt sind, d.h. wenn

$$(3) \qquad 0 < m \leq \frac{\|f(x) - f(x')\|}{\|x - x'\|} \leq M < \infty \qquad (x \neq x'),$$

dann ist **(B)** erfüllt mit $S_1 = \{x; \|x\| \leq 1\}$ und $S_2 = \{f(x); \|x\| \leq 1\}$.

Für S_1 sind offenbar alle Forderungen erfüllt.

Aus (3) folgt, daß S_2 beschränkt ist, 0 als Innenpunkt enthält und stetig berandet ist.

Wir beweisen nun die Existenz eines $\mu > 0$, so daß kein Punkt x mit $\|x\| \leq \mu$ zur Tangentenmenge des Randes von S_2 gehört. Zunächst folgt unschwer, daß keine freie Tangente durch 0 gehen kann.

Nehmen wir nun an, die freie Tangente g habe den Abstand $d > 0$ vom Nullpunkt. Wir betrachten die zweidimensionale Ebene, in der g und 0 liegen; $|\ |$ sei eine nach dem Lemma bestimmte euklidische Metrik in dieser Ebene mit dem Skalarprodukt (x, y), $(x, x) = |x|^2$. Dann gilt für die Folgen $x_n \to x$, $x_n' \to x$ aus der Definition der freien Tangente (wenn δ_n den euklidischen Abstand, d_n den Abstand im Sinne der Norm $\|\ \|$ der n-ten Näherungsgeraden, d.h. der Geraden durch x_n und x_n' vom Nullpunkt 0 bezeichnet):

$$M \geq \frac{\|f(x_n) - f(x_n')\|}{\|x_n - x_n'\|} \geq \frac{1}{2} \frac{|f(x_n) - f(x_n')|}{|x_n - x_n'|} = \frac{1}{2} \frac{|f(x_n)| \cdot |f(x_n')|}{\delta_n} \cdot \left(\frac{x_n + x_n'}{2}, x_n\right)$$

$$\geq \frac{1}{4} \frac{\|f(x_n)\| \cdot \|f(x_n')\|}{d_n} \cdot \left(\frac{x_n + x_n'}{2}, x_n\right) \geq \frac{1}{4} \frac{m^2}{d_n} \left(\frac{x_n + x_n'}{2}, x_n\right).$$

Für $n \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen $\frac{m^2}{4d}$, woraus folgt

$$d \geq \frac{m^2}{4M};$$

$\mu = \frac{m^2}{4M}$ erfüllt also unsere Bedingung. — Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung **(B)** bewiesen. —

Die Bedingung (B) ist hinreichend.

Wir setzen also voraus:

$$(4) \qquad m \cdot \|x\| \leq \|f(x)\| \leq M \cdot \|x\|, \quad 0 < m \leq M < \infty \quad \text{und:}$$

Für die untere Grenze μ_i der Abstände der 0 von den freien Tangenten des Randes von S_i gilt $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2)$. —

Wir führen den Beweis nacheinander zunächst für gewisse Spezialfälle.

(I) *Die Norm ist euklidisch,* $\|x\|^2 = (x, x)$, $S_1 = \{x; \|x\| \leq 1\}$.

Für linear abhängige Vektoren x_1, x_2 gilt wegen (4):

$$(I, 1) \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M \cdot \|x_1 - x_2\|; \quad \|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{m} \|f(x_1) - f(x_2)\|.$$

Es seien jetzt x_1, x_2 linear unabhängige Einheitsvektoren, E die von ihnen aufgespannte Ebene, g die Verbindungsgerade von $f(x_1)$ und $f(x_2)$, d deren Abstand von 0. Alle Winkel beziehen wir auf das Lot von 0 auf g. Es sei β_i der Winkel der Richtung x_i, so daß also gilt $|\beta_i| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\beta_1 - \beta_2| < \pi$.

Aus

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|^2 = \lambda^2(x_1) + \lambda^2(x_2) - 2\lambda(x_1)\lambda(x_2) \cdot (x_1, x_2)$$

folgt

$$\begin{aligned}(\lambda(x_1) - \lambda(x_2))^2 &= \|f(x_1) - f(x_2)\|^2 - 2\lambda(x_1)\lambda(x_2)\,(1 - \cos(\beta_2 - \beta_1)) \\ &= \|f(x_1) - f(x_2)\|^2 - 4\lambda(x_1)\lambda(x_2)\sin^2\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}.\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}\|f(x_1) - f(x_2)\| \cdot d &= \lambda(x_1)\lambda(x_2) \cdot \sin|\beta_2 - \beta_1| \\ &= 2\lambda(x_1)\lambda(x_2) \cdot \sin\frac{|\beta_2 - \beta_1|}{2} \cdot \cos\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}.\end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\left|\frac{\lambda(x_2) - \lambda(x_1)}{\beta_2 - \beta_1}\right|^2 = \frac{\lambda^2(x_1)\lambda^2(x_2)}{d^2}\cos^2\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\sin^2\frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \cdot \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right)^{-2} -$$

$$- 4\lambda(x_1)\lambda(x_2)\sin^2\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}(\beta_2 - \beta_1)^{-2},$$

also

$$\text{(I, 2)} \qquad \left|\frac{\lambda(x_1) - \lambda(x_2)}{\beta_1 - \beta_2}\right|^2 \leq \lambda^2(x_1)\lambda^2(x_2)\frac{\cos^2\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}{d^2}.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle a) und b):

a) β_1 und β_2 haben verschiedene Vorzeichen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an: $0 \leq -\beta_1 \leq \beta_2$. Dann ist wegen

$$0 \leq -\beta_1 \leq \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}:$$

$$\frac{d}{\cos\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}} \geq \frac{d}{\cos\beta_1} = \lambda(x_1) = \|f(x_1)\| \geq m.$$

Also gilt in diesem Falle wegen (I, 2)

$$\text{(I, 3)} \qquad \left|\frac{\lambda(x_1) - \lambda(x_2)}{\beta_1 - \beta_2}\right|^2 \leq \frac{M^4}{m^2}.$$

b) β_1 und β_2 haben nicht verschiedene Vorzeichen, $|\beta_2| \geq |\beta_1|$.

In diesem Falle betrachten wir einen Zwischenwinkel mit zugehörigem Einheitsvektor x_0, so daß es in $f(x_0)$ eine zu g parallele freie Tangente des Randes von S_2 gibt. (Die Existenz eines solchen Zwischenpunktes folgt aus der Stetigkeit des Randes von $S_2 \cap E$.) Diese freie Tangente habe den

Abstand d' von 0, $d' \geq \mu_2$. Wegen $|\beta_i| < \frac{\pi}{2}$ folgt

$$\frac{d'}{d} = \frac{\cos\vartheta}{\cos\beta_1} \cdot \frac{\lambda(x_0)}{\lambda(x_1)} \leq 1 \cdot \frac{M}{m}, \quad \text{also} \quad d \geq \frac{m\,\mu_2}{M}.$$

Einsetzen in (I, 2) ergibt

$$\text{(I, 4)} \qquad \left|\frac{\lambda(x_1) - \lambda(x_2)}{\beta_1 - \beta_2}\right|^2 \leq \frac{M^6}{\mu_2^2\, m^2}.$$

Wegen $M \geq \mu_2$ gilt in beiden Fällen a) und b) nach (I, 3) die Abschätzung (I, 4).

Wir verwenden jetzt für unseren zweidimensionalen euklidischen Raum E den Satz 1 der Arbeit [4]:

Wenn $0 < m \leq \lambda(x) \leq M < \infty$, $\lambda(r \cdot x) = \lambda(x)$ für $r \geq 0$, und

$$\left|\frac{\lambda(x_1) - \lambda(x_2)}{\beta_1 - \beta_2}\right| \leq L < \infty,$$

dann gilt[5])

$$\text{(I, 5)} \qquad \frac{m}{1 + \frac{\pi L}{m}} \leq \frac{\|f(x') - f(x)\|}{\|x' - x\|} \leq M + \pi L.$$

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind bei uns erfüllt mit

$$\text{(I, 6)} \qquad L = \frac{M^3}{m \cdot \mu_2}.$$

Die Schranken in (I, 5) sind unabhängig von der speziellen Wahl von x, x', und daher sind f und f^{-1} dehnungsbeschränkt.

(II) $\|x\|^2 = (x, x)$; S_1 *und* S_2 *beliebig gemäß* **(B)**.

Diesen Fall führen wir auf (I) zurück. Es sei f_i die in allen Richtungen homothetische [d.h. Form (1)!] Abbildung des Eichkörpers $\{x; \|x\| \leq 1\}$ auf S_i $(i = 1, 2)$; dann sind nach (I) die Abbildungen f_i, f_i^{-1} sämtlich dehnungsbeschränkt, also sind auch $f = f_2\, f_1^{-1}$ und $f^{-1} = f_1\, f_2^{-1}$ dehnungsbeschränkt, w. z. b. w.

(III) $\|\ \|$ *beliebige Norm*, $S_1 = \{x; \|x\| \leq 1\}$.

E sei wieder die von den beiden beliebig gewählten linear unabhängigen Vektoren x_1, x_2 aufgespannte Ebene. Nach dem Lemma können wir in E eine euklidische Norm $|\ |$ einführen mit

$$\tfrac{1}{2}\,|x| \leq \|x\| \leq |x| \leq 2\|x\|.$$

---

[5]) An dieser Stelle befindet sich in der Arbeit [4] ein Druckfehler: An Stelle von $\frac{m}{1 + \frac{\pi}{mL}} \leq \cdots$ ist zu lesen $\frac{m}{1 + \frac{\pi L}{m}} \leq \cdots$, wie aus dem letzten Teil des Beweises zu Satz 1 der Arbeit [4] auf S. 99 hervorgeht.

Um (I, 5) anwenden zu können, betrachten wir die beiden Abbildungen f_i der Form (1), die $\{x; |x| \leq 1\}$ in S_i überführen $(i = 1, 2)$. Für $f_1(x) = \frac{|x|}{\|x\|} x$ ist in (I, 5), (I, 6) einzusetzen: $M = 2$, $m = \mu_2 = 1$, so daß sich ergibt:

$$\text{(III, 1)} \qquad a_1 = \frac{1}{1 + 8\pi} \leq \frac{|f_1(x') - f_1(x)|}{|x' - x|} \leq 2 + 8\pi = A_1.$$

Für $f_2(x) = \frac{|x|}{\|x\|} f(x)$ gilt $m \cdot |x| \leq |f_2(x)| \leq 2M \cdot |x|$ und für die untere Grenze μ_2' der Abstände der freien Tangenten von S_2 vom Nullpunkt:

$$\mu_2 \leq \mu_2' \leq 2 \cdot \mu_2.$$

Die Anwendung von (I, 5), (I, 6) ergibt hier

$$\text{(III, 2)} \qquad a_2 = \frac{m}{1 + \frac{8\pi M^3}{m \mu_2}} \leq \frac{|f_2(x') - f_2(x)|}{|x' - x|} \leq 2M + \frac{8M^3 \pi}{m \mu_2} = A_2.$$

Da $f(x) = f_2(f_1^{-1}(x))$, erhält man

$$\frac{\|f(x') - f(x)\|}{\|x' - x\|} \leq 2 \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} = 2 \frac{|f_2(f_1^{-1}(x')) - f_2(f_1^{-1}(x))|}{|f_1^{-1}(x') - f_1^{-1}(x)|} \cdot \frac{|f_1^{-1}(x') - f_1^{-1}(x)|}{|x' - x|} \leq 2 \frac{A_2}{a_1}$$

und entsprechend

$$\frac{\|f(x') - f(x)\|}{\|x' - x\|} \geq \frac{1}{2} \frac{a_2}{A_1}.$$

Da die Schranken nur von M, m, μ_2, aber nicht von der speziellen Wahl der Ebene abhängen, ist damit die Dehnungsbeschränktheit von f, f^{-1} bewiesen.

(IV) $\| \|$, S_1, S_2 *beliebig der Bedingung* **(B)** *gemäß.*

Diesen allgemeinen Fall erledigt man nun mühelos unter Verwendung von (III) analog zum Beweisschritt (II).

Damit ist gezeigt, daß die Bedingung **(B)** auch hinreichend ist.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit derjenigen stetig berandeten beschränkten Sternbereiche in einem beliebigen (aber fest gewählten) normierten Raum, zu denen es eine zur Tangentenmenge des Randes fremde Umgebung des Nullpunkts gibt. Dann folgt aus dem Beweis noch als

Korollar 1. *Eine dehnungsbeschränkte Abbildung* (1) *eines normierten Raumes auf sich, deren Umkehrung ebenfalls dehnungsbeschränkt ist, bildet die Menge* $\mathfrak{S}$ *auf sich ab.*

Beweis. Es sei $S_1 \in \mathfrak{S}$. Wir zeigen zunächst, daß auch $S_2 = f(S_1)$ zu $\mathfrak{S}$ gehört; f_i $(i = 1, 2)$ sei wieder die durch

$$f_i\{x; \|x\| \leq 1\} = S_i$$

definierte Abbildung der Form (1). Dann gilt $f_2 = f f_1$, $f_2^{-1} = f_1^{-1} f^{-1}$. f ist nach Voraussetzung dehnungsbeschränkt, ebenso f^{-1}; f_1 und f_1^{-1} sind nach unserem Satz dehnungsbeschränkt, weil $S_1 \in \mathfrak{S}$. Also sind auch f_2 und f_2^{-1} dehnungsbeschränkt, und aus dem obigen Beweis dafür, daß die Bedingung **(B)** not-

wendig ist, folgt $S_2 \in \mathfrak{S}$. — Nun bleibt noch zu zeigen, daß jedes $S' \in \mathfrak{S}$ als Bild $f(S)$ eines $S \in \mathfrak{S}$ auftritt. Da f^{-1} als dehnungsbeschränkt vorausgesetzt ist, gilt nach dem eben Bewiesenen aber tatsächlich $f^{-1}(S') = S \in \mathfrak{S}$, womit alles bewiesen ist.

HAUPT [1] hat eine Kennzeichnung derjenigen Bereiche im euklidischen Raum angegeben, die als in allen Richtungen homothetische Bilder der Vollkugel auftreten. Wir erhalten hier allgemeiner:

Korollar 2. *Notwendig und hinreichend dafür, daß S Bild von $\{x; \|x\| \leq 1\}$ bei einer in allen Richtungen homothetischen, zusammen mit ihrer Umkehrung dehnungsbeschränkten Abbildung des normierten Raumes auf sich sei, ist $S \in \mathfrak{S}$.*

Literatur

[1] HAUPT, O.: Bemerkung zu einem Abbildungssatz von Herrn BÉLA SZ.-NAGY. Sitzgsber. math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1951**, 147—161 (1952). — [2] KLEE, V. L.: On a theorem of BÉLA SZ.-NAGY. Amer. Math. Monthly **60**, 618—619 (1953). — [3] LAUGWITZ, D.: Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume. Math. Z. **61**, 235—244 (1954). — [4] VINCZE, ST., u. P. SZÜSZ: Beweis eines Abbildungssatzes von BÉLA SZ.-NAGY. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 96—100 (1951).

Göttingen, Nußanger 70

(Eingegangen am 9. April 1955)

RINGEL, G.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 79—102 (1956)

Teilungen der Ebene durch Geraden oder topologische Geraden*)

Herrn E. SPERNER zum 50. Geburtstag am 9. Dezember 1955 gewidmet

Von

GERHARD RINGEL

Einleitung

Die euklidische Ebene wird durch m Geraden dann und nur dann in möglichst viele Zellen zerlegt, wenn diese m Geraden sich paarweise schneiden und alle ihre $\binom{m}{2}$ Schnittpunkte verschieden sind. Solche m Geraden bilden eine *einfache Konfiguration*; wir sagen auch, sie haben *allgemeine Lage*. Wie J. STEINER[1]) bemerkte, wird die Ebene durch die m Geraden g_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ einer einfachen Konfiguration $\mathfrak{K}$ in genau $\frac{m(m+1)}{2}+1$ Zellen Z_i $\left(i=1, 2, \ldots, \frac{m(m+1)}{2}+1\right)$ zerlegt, von denen $2m$ unbeschränkt sind. Die gegenseitige Lage dieser Zellen kann man in folgender Weise kombinatorisch beschreiben. Es sei jede Gerade g_k mit einer Richtung (Orientierung) versehen, damit wir in bezug auf jedes g_k von einer rechten und einer linken Halbebene sprechen können. Der betrachteten einfachen Konfiguration $\mathfrak{K}$ wird nun eine rechteckige Matrix $S=(e_{ik})$ zugeordnet, wobei $e_{ik}=+1$ oder -1 zu setzen ist, je nachdem die Zelle Z_i rechts oder links von der Geraden g_k liegt. Wie üblich sei k der Spaltenindex, so daß jede Zelle durch eine Zeile von S repräsentiert wird (vgl. Fig. 1, S. 84).

Zwei einfache Konfigurationen heißen *äquivalent*, wenn die beiden zugehörigen Matrizen durch mehrmaliges Ausführen der drei folgenden Operationen zur Übereinstimmung gebracht werden können.

1. Vertauschung zweier Zeilen,
2. Vertauschung zweier Spalten,
3. Multiplikation einer Spalte mit -1.

So geht z. B. eine einfache Konfiguration durch Spiegelung an einer Geraden in eine äquivalente über. Da dieser Äquivalenzbegriff reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, führt er zu einer Klasseneinteilung aller einfachen Konfigurationen. Es sei hier bemerkt, daß die Anzahl A_m dieser Klassen für

*) Diese Arbeit wurde angeregt und in fruchtbaren Gesprächen beeinflußt durch Herrn E. SPERNER.

[1]) STEINER, J.: Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes. Crelles J. reine u. angew. Math. 1, 349—364 (1826). Ges. Werke I, S. 77—94. Berlin 1881.

$m \leq 7$ durch R. KLEE[2]) bestimmt worden ist. Er fand die Werte

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1, \quad A_5 = 6, \; A_6 = 43, \; A_7 = 922.$$

Das Problem, einen systematischen Überblick über alle nicht äquivalenten einfachen Konfigurationen zu erhalten, wird durch einen bisher unbemerkt gebliebenen Umstand außerordentlich erschwert. Es stellt sich nämlich in § 4 heraus, daß die ebenen Schließungssätze nicht ohne Einfluß auf die einfachen Konfigurationen sind. Um diesen Zusammenhang zu erkennen und zu erforschen, ist es zweckvoll, zunächst die einfachen Konfigurationen etwas zu verallgemeinern, indem man auch „verbogene" Geraden zuläßt. Eine doppelpunktfreie Kurve heißt *Pseudogerade*[3]), wenn sie aus einer Geraden g dadurch hervorgeht, daß man eine endliche Teilstrecke von g durch einen einfachen Bogen[4]) ersetzt, dessen Endpunkte mit denen der Teilstrecke übereinstimmen. m Pseudogeraden, von denen sich je zwei in genau einem Punkte schneiden, bilden eine *einfache Konfiguration von Pseudogeraden*, wenn ihre $\binom{m}{2}$ Schnittpunkte alle verschieden sind. Für diese naheliegende Verallgemeinerung der einfachen Konfigurationen läßt sich der oben definierte Äquivalenzbegriff sofort übertragen. Eine kombinatorische Kennzeichnung der durch einfache Konfigurationen von Pseudogeraden realisierbaren Matrizen wird in dieser Arbeit durchgeführt. Das Ergebnis wird in Satz 1 am Ende der Einleitung formuliert und in den §§ 1 bis 3 bewiesen.

Wir sagen, eine einfache Konfiguration von Pseudogeraden läßt sich *strecken*, wenn eine zu ihr äquivalente aus lauter Geraden bestehende einfache Konfiguration existiert. Wir stellen die Frage: *Kann man jede einfache Konfiguration von m Pseudogeraden strecken?* Für niedrige Zahlen m ist sie ohne weiteres zu bejahen. R. KLEE behauptete dies sogar allgemein. Indessen ist sein Beweis nach F. LEVI „nicht völlig überzeugend". Die überraschende Antwort auf die gestellte Frage ist jedoch verneinend, was im § 4 durch Beispiele, bei denen Schließungssätze eine Rolle spielen, demonstriert wird. Einige offene Fragen, die sich auch auf die geradlinige Realisierbarkeit beziehen, werden am Ende der Arbeit aufgezählt.

Wir betrachten hier ausnahmslos nur rechteckige Matrizen, die aus Zahlen $+1$ oder -1 gebildet sind. Eine solche Matrix S fassen wir stets als Zeilenmenge auf, d.h. von der speziellen Reihenfolge der Zeilen sehen wir ab. An Stelle von Matrix verwenden wir des öfteren auch das Wort Schema. Die Zeilen werden als Vektoren geschrieben; z.B.

$$\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, \qquad -\mathfrak{a} = \{-a_1, -a_2, \ldots, -a_m\}.$$

---

[2]) KLEE, R.: Über die einfachen Konfigurationen der euklidischen und projektiven Ebene. Dresden: Focken und Oltmanns 1938.

[3]) Die Ergebnisse dieser Arbeit ändern sich nicht, wenn man noch allgemeiner topologische Geraden zuläßt. *Topologische Gerade* ist das Bild einer Geraden bei einer topologischen Abbildung der Ebene auf sich. Die Beweise sind jedoch gelegentlich bequemer, wenn man Pseudogeraden verwendet.

[4]) Topologisches Bild einer Strecke.

Eine Zeile $\mathfrak{a}$ von S heiße *unbeschränkt* in S, wenn auch die Zeile $-\mathfrak{a}$ in S liegt. Mit $U(S)$ wird die Untermenge aller unbeschränkten Zeilen von S bezeichnet. Wenn ein Schema S so beschaffen ist, daß stets genau q verschiedene Zeilen übrig bleiben, wenn man alle bis auf p beliebige Spalten in S streicht, so sagen wir, S hat die *Eigenschaft* $[p, q]$. Ein Schema S heiße *realisierbar*, wenn eine zugehörige einfache Konfiguration von Pseudogeraden existiert. Nun können wir das Hauptergebnis der Arbeit aussprechen in

Satz 1. *Notwendig und hinreichend für die Realisierbarkeit eines Schemas S mit einer Spaltenanzahl $\neq 4$ ist die gleichzeitige Gültigkeit der drei Bedingungen:*

I. Das Schema S hat die Eigenschaft $[3, 7]$.

II. Das Schema $U(S)$ hat die Eigenschaft $[3, 6]$.

III. Wenn man zu S eine Zeile $\notin S$ hinzufügt, so wird die Eigenschaft $[3, 7]$ *verletzt, d.h. S ist bezüglich der Eigenschaft* $[3, 7]$ *maximal.*

§ 1. Über realisierbare Schemata

Es sei $\mathfrak{R}$ eine einfache Konfiguration mit den m Pseudogeraden $g_1, \ldots, g_m$ und S die zugehörige Matrix. Wenn wir in $\mathfrak{R}$ etwa die letzte Pseudogerade g_m entfernen, so erhalten wir eine einfache Konfiguration $\mathfrak{R}'$ mit $m-1$ Pseudogeraden. Die zugehörige Matrix S' entsteht natürlich aus S, indem man die letzte Spalte streicht und danach jede etwa doppelt vorkommende Zeile nur einmal zählt. Streicht man also nacheinander $m-3$ beliebige Spalten aus S, so bleibt eine durch drei Pseudogeraden realisierbare Matrix übrig. Eine einfache Konfiguration von drei Pseudogeraden zerlegt die euklidische Ebene in sieben Gebiete. Hiermit ist die Bedingung I von Satz 1, d.h. die Eigenschaft $[3, 7]$ als notwendig für die Realisierbarkeit von S erkannt.

Wenn D ein rechteckiges Schema ist, so bezeichnen wir allgemein das aus D durch Streichung der ersten bzw. letzten Spalte hervorgehende Schema mit $'D$ bzw. D'. Für die Zeilen benützen wir analoge Bezeichnungen:

$$\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m\} = \{\mathfrak{a}', a_m\} = \{a_1, {}'\mathfrak{a}\},$$
$$\mathfrak{a}' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}, \qquad {}'\mathfrak{a} = \{a_2, \ldots, a_m\}.$$

Wir schreiben spezielle Zeilen, z.B. $\{+1, +1, +1, -1, +1\}$, meist in der kürzeren Form $\{+++-+\}$. Die in der Einleitung gegebene kombinatorische Definition der unbeschränkten Zeilen eines Schemas wird nun gerechtfertigt durch

Satz 2. *$\mathfrak{R}$ sei eine einfache Konfiguration von m Pseudogeraden mit dem zugehörigen Schema S. Jeder unbeschränkten Zelle der Zerlegung der Ebene durch $\mathfrak{R}$ entspricht eine unbeschränkte Zeile von S und umgekehrt.*

Beweis. Es sei P_1 ein Punkt einer unbeschränkten Zelle. Deren Rand enthält einen Halbstrahl h, der zu einer Pseudogeraden g von $\mathfrak{R}$ gehört. Einen Punkt $Q_1 \in h$ verbinden wir mit P_1 durch einen einfachen Bogen b_1, der mit $\mathfrak{R}$ keinen Schnittpunkt außer Q_1 hat. Auf g wählen wir derart einen weiteren Punkt Q_2, daß alle $m-1$ Schnittpunkte von g mit den übrigen

$m-1$ Pseudogeraden von $\mathfrak{R}$ im Innern des durch Q_1 und Q_2 bestimmten Teilbogens b von g liegen. In einer ε-Umgebung von Q_2 wählen wir einen Punkt $P_2 \notin g$, der nicht auf derselben Seite (Pseudohalbebene) von g liegt wie P_1. Wenn ε klein genug ist, läßt sich Q_2 und P_2 durch einen Bogen b_2 verbinden, der mit $\mathfrak{R}$ nur den einzigen Schnittpunkt Q_2 hat. Der hiermit konstruierte Weg längs b_1, b, b_2 führt von P_1 zu P_2 und überschreitet dabei jede der m Pseudogeraden genau einmal. P_1 und P_2 liegen daher in verschiedenen Zellen, denen reziproke Zeilen $\mathfrak{a}$ und $-\mathfrak{a}$ von S zugeordnet sind. Einer unbeschränkten Zelle entspricht also eine unbeschränkte Zeile von S.

Nun wollen wir umgekehrt aus $\mathfrak{a}, -\mathfrak{a} \in S$ die Unbeschränktheit der Zelle $\mathfrak{a}$ der Zerlegung durch $\mathfrak{R}$ folgern. Für ein zweispaltiges Schema ist das richtig. Es sei für $(m-1)$-spaltige Schemata schon bewiesen. Für ein m-spaltiges Schema S nehmen wir gegenteilig an, daß $\mathfrak{a} = \{++\cdots++\}$, $-\mathfrak{a} \in S$, aber die Zelle $\mathfrak{a}$ beschränkt sei. Entfernen wir aus $\mathfrak{R}$ etwa die letzte Pseudogerade g_m, so erhalten wir eine einfache Konfiguration $\mathfrak{R}'$ von $m-1$ Pseudogeraden mit dem Schema S'. In der Zerlegung durch $\mathfrak{R}'$ sei die Zelle $\mathfrak{a}'$ beschränkt. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $-\mathfrak{a}' = (-\mathfrak{a})' \notin S'$, folglich auch $-\mathfrak{a} \notin S$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist die Zelle $\mathfrak{a}'$ unbeschränkt und wird somit durch g_m in die beschränkte Zelle $\mathfrak{a}$ und die notwendigerweise unbeschränkte Zelle $\mathfrak{b} = \{++\cdots+-\}$ zerlegt; daher $\mathfrak{b}$, $-\mathfrak{b} \in S$. Diese Überlegung gilt auch, wenn wir an Stelle der m-ten Spalte eine beliebige betrachten. Wir führen diesen Schluß etwa bezüglich jeder der drei letzten Spalten durch und erhalten in S die vier Zeilen

$$\begin{array}{l} ++\cdots+++ \\ ++\cdots++- \\ ++\cdots+-+ \\ ++\cdots-++ \end{array}$$

und die vier dazu reziproken. Wenn man die ersten $m-3$ Spalten streicht, bleiben diese acht Zeilen verschieden entgegen der schon bewiesenen Eigenschaft [3, 7] von S. Die Annahme, daß die Zelle $\mathfrak{a}$ beschränkt ist, führt also zum Widerspruch. Satz 2 ist bewiesen.

Satz 3. *Für ein realisierbares Schema S gilt $U(S)' = U(S')$.*

Beim Beweis beachten wir, daß das kombinatorisch definierte Schema $U(S)$ nach Satz 2 auch als die Menge aller Zeilen, die unbeschränkten Zellen entsprechen, aufgefaßt werden kann. In jeder unbeschränkten Zelle der Zerlegung durch $\mathfrak{R}'$ liegt eine unbeschränkte Zelle der Zerlegung durch $\mathfrak{R}$, d.h. $U(S') \subset U(S)'$. Die umgekehrte Relation folgt kombinatorisch: Aus $\mathfrak{a}' \in U(S)'$ folgt $\mathfrak{a} \in U(S)$, also $\mathfrak{a}, -\mathfrak{a} \in S$ und $\mathfrak{a}', -\mathfrak{a}' \in S'$, daher $\mathfrak{a}' \in U(S')$.

Entsprechend der anschaulichen Bedeutung heißen zwei Zeilen *benachbart*, wenn sie sich nur in einer einzigen Komponente unterscheiden.

Satz 4. *Wenn in einer realisierbaren Matrix S zwei Zeilen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ vorkommen, die sich in genau zwei Komponenten unterscheiden, so existiert in S auch eine „Zwischenzeile" $\mathfrak{c}$, die zu $\mathfrak{a}$ und zu $\mathfrak{b}$ benachbart ist.*

Beweis. $\mathfrak{R}$ sei eine durch die m Pseudogeraden $g_1, g_2, \ldots, g_m$ gebildete einfache Konfiguration mit der zugehörigen Matrix S, die etwa die Zeilen $\mathfrak{a} = \{+++\cdots+\}$ und $\mathfrak{b} = \{--+\cdots+\}$ enthalten möge. Von einem Punkt P aus der Zelle $\mathfrak{a}$ zu einem Punkt Q aus der Zelle $\mathfrak{b}$ sei ein einfacher Bogen b gezogen, der mit $\mathfrak{R}$ zwar möglichst wenig Punkte gemein hat, aber durch keinen der $\binom{m}{2}$ Schnittpunkte von $\mathfrak{R}$ gehen soll. b hat mit $g_3, g_4, \ldots, g_m$ keinen Schnittpunkt, weil P und Q in derselben Zelle der von $g_3, g_4, \ldots, g_m$ gebildeten Konfiguration liegen. Mit g_1 und g_2 hat b nur je einen Schnittpunkt, sonst könnte man die Anzahl der Schnittpunkte von b mit $\mathfrak{R}$ durch passende Deformation von b verringern. Der Bogen b muß also durch eine Zelle hindurchgehen, dessen zugehörige Zeile $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{a}$ und zu $\mathfrak{b}$ benachbart ist.

Wir wollen jetzt zeigen, daß auch die Bedingungen II und III von Satz 1 der Einleitung für die Realisierbarkeit eines Schemas notwendig sind.

Zu II. Es ist zu beweisen, daß $U(S)$ die Eigenschaft [3, 6] hat, wenn S realisierbar ist. Für ein Schema mit höchstens drei Spalten stimmt dies. Es sei für alle $(m-1)$-spaltigen Schemata schon bewiesen ($m \geqq 4$). Streichen wir in $U(S)$ eine Spalte, so erhalten wir nach Satz 3 ein Schema $U(S)' = U(S')$, das nach Induktionsvoraussetzung die Eigenschaft [3, 6] hat, also besitzt $U(S)$ selbst schon diese Eigenschaft.

Zu III. Durch Hinzufügen einer Zeile etwa $\mathfrak{a} = \{+++\cdots++\} \notin S$ entstehe aus dem m-spaltigen Schema S das neue Schema $T = S \cup \mathfrak{a}$, von dem wir zeigen wollen, daß es nicht die Eigenschaft [3, 7] besitzt. Für drei Spalten ist dies und für $m-1$ Spalten sei dies richtig ($m \geqq 4$). Es sind zwei Fälle denkbar.

α) Die Zeile $\mathfrak{z} = \{++\cdots+-\}$ liege nicht in S. Beim Streichen der letzten Spalte erhält man $\mathfrak{a}' = \mathfrak{z}' = \{+\cdots+\} \in T'$, aber $\mathfrak{a}' \notin S$. Die $(m-1)$-spaltige Matrix S' ist realisierbar, daher hat T' nach Induktionsvoraussetzung nicht die Eigenschaft [3, 7]. Man kann also $m-4$ Spalten aus T' derart auswählen, daß bei ihrem Streichen acht verschiedene Zeilen übrigbleiben. T' ist aber bereits durch Streichung einer Spalte aus T entstanden, somit ist auch für T die Eigenschaft [3, 7] nicht zutreffend, w. z. b. w. Dieser Schluß geht analog auch dann, wenn in der Zeile $\mathfrak{z}$ das einzige Minuszeichen an einer beliebigen anderen Stelle steht.

β) Es sei daher jetzt angenommen, daß die m Zeilen

$$
\begin{array}{l}
-++\cdots++ \\
+-+\cdots++ \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+++\cdots+-
\end{array}
$$

in S liegen. Wenn man auf alle $\binom{m}{2}$ möglichen Paare dieser m Zeilen den Satz 4 anwendet, erhält man wegen $\mathfrak{a} \notin S$ für das Schema S die Existenz *aller* $\binom{m}{2}$ Zeilen, die genau zwei Minuszeichen besitzen. Nun kann keine Zeile

mit mindestens drei Minuszeichen in S liegen, weil sonst die für S bereits nachgewiesene Eigenschaft [3, 7] verletzt wäre. S besteht also aus allen Zeilen der Länge m, die mindestens ein und höchstens zwei Minuszeichen enthalten. Für $m > 4$ folgte, daß $U(S)$ leer ist im Widerspruch zu Satz 2. Für $m = 4$ folgte, daß $U(S)$ nur aus sechs Zeilen besteht, die untereinander überhaupt nicht benachbart sind, was ebenfalls dem Satz 2 widerspricht.

Die drei Bedingungen I, II, III von Satz 1 sind hiermit als notwendig erkannt (auch für $m = 4$).

Das Standardschema. Es sei Σ_m die Menge *aller* Zeilen $\mathfrak{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ mit der Eigenschaft, daß aus $z_i = z_{i+k} = -1$ stets folgt, daß sogar $z_i = z_{i+1} = \cdots = z_{i+k} = -1$ ist. Dieses Schema Σ_m heiße das Standardschema. Streicht man in Σ_m alle bis auf drei Spalten, so verbleibt nicht die Zeile $\{-+-\}$, aber alle sieben anderen Möglichkeiten; daher besitzt Σ_m die Eigenschaft [3, 7]. Auch die beiden Bedingungen II, III könnten wir für Σ_m leicht direkt nachweisen. Statt dessen wollen wir sogleich die geradlinige Realisierbarkeit von Σ_m zeigen.

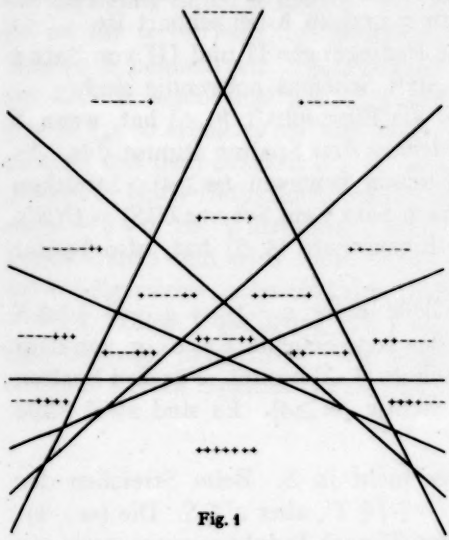


Fig. 1

An einen Kreisbogen, der kleiner als ein zugehöriger Halbkreis ist, seien m verschiedene Tangenten gezogen (Fig. 1). Durch die Orientierung des Kreisbogens im Sinne des Uhrzeigers werden die m Tangenten in natürlicher Weise numeriert und orientiert. Wir zeigen, daß das Schema S der aus den m Tangenten gebildeten einfachen Konfiguration identisch mit Σ_m ist. Für $m = 3$ ist das richtig. S kann keine Zeile von der Form $\{\cdots - \cdots + \cdots - \cdots\}$ haben, da man sonst durch Streichen der durch Punkte angedeuteten Spalten einen Widerspruch zum Fall $m = 3$ erhält. Also gilt $S < \Sigma_m$. S ist als realisierbares Schema maximal bezüglich der Eigenschaft [3, 7]. Weil aber Σ_m diese Eigenschaft [3, 7] auch besitzt, folgt sogar $S = \Sigma_m$. Das Standardschema Σ_m ist also geradlinig realisierbar.

§ 2. Über kombinatorisch definierte Schemata

Auch im folgenden werden die Bedingungen von Satz 1 der Einleitung immer wieder zitiert.

Satz 5. *Wenn ein Schema S den beiden Bedingungen I und II genügt, so gelten diese auch für das Schema S'.*

Beweis. Mit S hat natürlich auch S' die Eigenschaft [3, 7], d.h. Bedingung I ist erfüllt. Wir wollen für $U(S')$ auch die Eigenschaft [3, 6] zeigen.

Aus $\mathfrak{a} \in U(S)$ folgt $\mathfrak{a}, -\mathfrak{a} \in S$, also auch $\mathfrak{a}', -\mathfrak{a}' \in S'$, daher $\mathfrak{a}' \in U(S')$. Es gilt somit $U(S)' < U(S')$. Mit $U(S)$ hat auch $U(S)'$ die Eigenschaft [3, 6]. Wenn wir also in $U(S')$ alle bis auf drei Spalten streichen, so erhalten wir mindestens sechs verschiedene Zeilen. Mehr als sechs können es aber nie sein; da in $U(S')$ alle Zeilen zu Paaren auftreten, würden sonst sogar alle acht Zeilen nach dem Streichen vorkommen. Das widerspräche der Eigenschaft [3, 7] von $S' > U(S')$. Für S' gilt also Bedingung II.

Satz 6. *Wenn ein Schema S den Bedingungen I und II genügt, so ist $U(S)$ minimal bezüglich der Eigenschaft* [3, 6], *d.h. wenn man aus $U(S)$ eine beliebige Zeile entfernt, so geht die Eigenschaft* [3, 6] *verloren.*

Beweis. Es sei m die Spaltenanzahl von S. Für $m \leq 2$ ist Satz 6 inhaltslos, also richtig. Nach Bedingung I besteht S für $m = 3$ aus genau sieben Zeilen, von denen eine beschränkt ist, daher ist für $m = 3$ Satz 6 auch richtig. Wir nehmen an, Satz 6 gelte für jedes $(m-1)$-spaltige Schema. Es sei S ein m-spaltiges Schema und $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \in U(S)$. Der Beweis von Satz 5 ergab $\mathfrak{a}' \in U(S)' < U(S')$. Da S' den Bedingungen I und II genügt, gibt es nach Induktionsvoraussetzung zu der Zeile $\mathfrak{a}'$ ein Spaltentripel — etwa die ersten drei —, so daß $\mathfrak{a}'$ die einzige Zeile aus $U(S')$ ist, die in diesen drei Spalten mit $\mathfrak{a}'$ übereinstimmt. Dies gilt erst recht in der Untermenge $U(S)'$, d.h. aus

$$\mathfrak{z}' = \{a_1, a_2, a_3, x_4, \ldots, x_{m-1}\} \in U(S)' \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{z}' = \mathfrak{a}'.$$

Wir behaupten, daß diese Aussage noch verschärft werden kann, indem eines der drei a_i auch noch durch eine Unbestimmte ersetzt wird, etwa a_3 durch x_3. Wäre das nicht möglich, so müßten drei Zeilen von der Form

$$\mathfrak{z}'_{3} = \{a_1, a_2, -a_3, \ldots\}$$
$$\mathfrak{z}'_{2} = \{a_1, -a_2, a_3, \ldots\}$$
$$\mathfrak{z}'_{1} = \{-a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

in $U(S)'$ existieren. Dann wären aber die acht Zeilen $\pm\mathfrak{a}', \pm\mathfrak{z}'_1, \pm\mathfrak{z}'_2, \pm\mathfrak{z}'_3$ in S' vorhanden. Beim Streichen der letzten $m-4$ Spalten würde der Widerspruch zu Eigenschaft [3, 7] ersichtlich. Also gilt, aus

$$\mathfrak{z}' = \{a_1, a_2, x_3, x_4, \ldots, x_{m-1}\} \in U(S)' \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{z}' = \mathfrak{a}'.$$

Das bedeutet, aus

$$\mathfrak{z} = \{a_1, a_2, x_3, x_4, \ldots, x_{m-1}, a_m\} \in U(S) \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{a}.$$

Daher geht beim Entfernen der Zeile $\mathfrak{a}$ aus $U(S)$ die Eigenschaft [3, 6] tatsächlich verloren.

Satz 7. *Wenn S den Bedingungen I und II genügt, so gilt $U(S)' = U(S')$.*

Beim Beweis von Satz 5 erhielten wir die Relation $U(S)' < U(S')$. Die Zeilenmenge $U(S)'$ hat mit $U(S)$ auch die Eigenschaft [3, 6]. Da aber $U(S')$ nach Satz 6 keine echte Teilmenge enthalten kann, die auch noch Eigenschaft [3, 6] besitzt, folgt $U(S)' = U(S')$.

Satz 8. *Ein m-spaltiges Schema D mit der Eigenschaft [2, 3], das die beiden Zeilen $\mathfrak{a}=\{+++\cdots++\}$ und $-\mathfrak{a}$ enthält, läßt sich nur durch geeignete Spaltenvertauschungen auf die Dreiecksform*

$$\Delta_m=\begin{pmatrix} +++\cdots++ \\ -++\cdots++ \\ --+\cdots++ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ ---\cdots-+ \\ ---\cdots-- \end{pmatrix}$$

bringen.

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach der Spaltenanzahl. Für $(m-1)$-spaltige Schemata sei Satz 8 richtig. Wir wollen ihn auch für das m-spaltige Schema D beweisen. Durch eventuelle Spaltenvertauschung können wir zunächst erreichen, daß die letzte Spalte von D eine Spalte mit den meisten Pluszeichen ist. Das $(m-1)$-spaltige Schema D' erfüllt die Voraussetzungen von Satz 8 und läßt sich daher nach Induktionsvoraussetzung durch Spaltenvertauschungen auf die Form Δ_{m-1} bringen. Wir können uns die dabei möglichen Vertauschungen bereits vorher in D so ausgeführt denken, daß $D'=\Delta_{m-1}$ ist. Es gibt also Einheiten $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, so daß

$$(1)\quad \{\underbrace{---\cdots--}_{i\text{-mal}}+\cdots+, x_i\}=\{e_i, x_i\}\in D \qquad (i=0,1,\ldots,m-1)$$

ist. Wir behaupten, daß dann

$$(2)\qquad +1\geqq x_0\geqq x_1\geqq\cdots\geqq x_{m-1}\geqq -1$$

gilt. Wäre nämlich etwa $x_j<x_{j+1}$, d.h. $x_j=-1$, $x_{j+1}=+1$, so enthielte D die vier Zeilen

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}&=\{+\cdots+++\cdots++\},\\ \{e_j,-1\}&=\{-\cdots-++\cdots+-\},\\ \{e_{j+1},+1\}&=\{-\cdots--+\cdots++\},\\ -\mathfrak{a}&=\{-\cdots---\cdots--\}. \end{aligned}$$

Streichen wir hierin alle Spalten bis auf die $(j+1)$-te und die letzte, so sehen wir, daß die Eigenschaft [2, 3] für D verletzt wäre. Also ist (2) richtig. Nach (1) enthält die vorletzte also auch die letzte Spalte von D mindestens $m-1$ positive Einheiten. Die m Zeilen (1) können aber noch nicht das ganze Schema D ausmachen, da sonst $1=x_0=x_1=\cdots=x_{m-2}$, $x_{m-1}=-1$ folgte und bei D nach Streichung der ersten $m-2$ Spalten nur zwei verschiedene Zeilen verblieben. Daher muß für mindestens einen Index t auch $\{e_t,-x_t\}\in D$ gelten. Da aber aus (1) stets (2) folgt, kann nur ein einziger Index t mit $\{e_t,-x_t\}\in D$ existieren. Es sei x_t von vornherein so gewählt, daß $x_t>-x_t$ ist. Die Annahme $t\leqq m-2$ würde bedeuten, daß in der vorletzten Spalte von D nur

ein einziges, aber in der letzten Spalte zwei Minuszeichen stehen. Also muß $t = m - 1$ sein, d.h. D hat bereits die Dreiecksform Δ_m.

Die in der Einleitung[5]) definierte Äquivalenz zweier Schemata A, B wird durch $A \sim B$ bezeichnet, während $A = B$ Übereinstimmung bis auf Zeilenvertauschung bedeuten soll. Wir gehen jetzt auf den Fall $m = 4$ näher ein. Es sei S ein vierspaltiges Schema, das den Bedingungen I und II genügt. Weil S' nach Satz 5 auch die Bedingungen I, II erfüllt und ein dreispaltiges Schema durch I und II bereits bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist, folgt $S' \sim \Sigma_3$. Wir können also S von vornherein so normiert denken, daß

$$U(S') = U(\Sigma_3) = \begin{pmatrix} +++ \\ -++ \\ --+ \\ --- \\ +-- \\ ++- \end{pmatrix} = U(S)'$$

ist (Satz 7). Wenn wir die vierte Spalte noch passend normieren, müssen also zwei Zeichen x, y existieren, so daß die drei Zeilen

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} ++++ \\ -++x \\ --+y \end{cases}$$

in $U(S)$ liegen. Bei spezieller Wahl von x, y stoßen wir auf zwei wesentlich verschiedene Fälle.

α) Es sei $x = -1$, $y = +1$. $U(S)$ besteht dann aus den drei Zeilen (3) und den drei dazu reziproken, denn für diese sechs Zeilen ist bereits die Eigenschaft [3, 6] erfüllt (Satz 6). Es gibt sogar ein dazu passendes Schema S, nämlich

$$\text{(4)} \qquad \begin{pmatrix} ++++ \\ -++- \\ --++ \\ ---- \\ +--+ \\ ++-- \\ ---+ \\ -+-- \\ -+-+ \\ -+++ \\ ++-+ \end{pmatrix},$$

das allen drei Bedingungen I, II, III gerecht wird. Trotzdem ist das Schema (4) nicht realisierbar, weil es nur sechs unbeschränkte Zeilen enthält, die paarweise nicht benachbart sind.

[5]) Die dort nur für einfache Konfigurationen erklärte Äquivalenz ist sinngemäß auch für Schemata zu verstehen.

β) Im Falle $x=y=+1$ muß wegen der Bedingung II außer den drei Zeilen (3) und ihrer reziproken noch eine siebente also auch eine achte Zeile in $U(S)$ vorhanden sein. Indem wir die drei ersten Spalten eventuell umnormieren und vertauschen, können wir annehmen, daß die Zeile $\{+++-\}$ noch zu $U(S)$ gehört. Es folgt

$$U(S)=U(\Sigma_4)=\begin{pmatrix}++++\\ -+++\\ --++\\ ---+\\ ----\\ +---\\ ++--\\ +++-\end{pmatrix}.$$

Auch die anderen beiden Möglichkeiten $x=y=-1$ und $x=-y=+1$ führen bei passender Normierung auf den vorstehenden Fall. Wir wollen das Schema $U(\Sigma_4)$ durch Hinzufügen weiterer Zeilen zu einem Schema S ergänzen, das den Bedingungen I und II genügen soll. Es zeigt sich, daß dies im wesentlichen nur auf eine Art, nämlich $S\sim\Sigma_4$, möglich ist. Von den 16 denkbaren Zeilen kommen in $U(\Sigma_4)$ die 8 Zeilen

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_1&=\{--+-\},\ -\mathfrak{a}_1,\\ \mathfrak{a}_2&=\{-++-\},\ -\mathfrak{a}_2,\\ \mathfrak{a}_3&=\{-+--\},\ -\mathfrak{a}_3,\\ \mathfrak{a}_4&=\{-+-+\},\ -\mathfrak{a}_4\end{aligned}$$

nicht vor. Es läßt sich leicht zeigen, daß jedesmal ein Schema mit I und II entsteht, wenn zu $U(S)$ noch die drei Zeilen

$$\begin{array}{llllllll}\mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3 & \text{oder} & -\mathfrak{a}_1, & -\mathfrak{a}_2, & -\mathfrak{a}_3 & \text{oder}\\ \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3, & \mathfrak{a}_4 & \text{oder} & -\mathfrak{a}_2, & -\mathfrak{a}_3, & -\mathfrak{a}_4 & \text{oder}\\ \mathfrak{a}_3, & \mathfrak{a}_4, & -\mathfrak{a}_1 & \text{oder} & -\mathfrak{a}_3, & -\mathfrak{a}_4, & \mathfrak{a}_1, & \text{oder}\\ \mathfrak{a}_4, & -\mathfrak{a}_1, & -\mathfrak{a}_2 & \text{oder} & -\mathfrak{a}_4, & \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_2 & \end{array}$$

hinzugefügt werden. In allen diesen acht Fällen entsteht aus $U(\Sigma_4)$ ein Schema, das zu Σ_4 äquivalent ist. Dies kann man kombinatorisch ausprobieren. Bequemer erkennen wir es, wenn wir mit Hilfe von Zeichnungen alle realisierbaren Schemata aufsuchen. Es läßt sich auch leicht zeigen, daß keine weitere Möglichkeit, das Schema $U(\Sigma_4)$ zu einem Schema S zu ergänzen, existiert. Die zwei Zeilen $\mathfrak{a}_2$ und $-\mathfrak{a}_3$ dürfen z. B. nicht gleichzeitig in S liegen, weil dies gegen Eigenschaft [3, 7] verstößt, was wir beim Streichen der dritten Spalte sehen.

Hiermit ist gezeigt: *Wenn ein vierspaltiges Schema den Bedingungen I und II genügt, so hat es entweder nur sechs unbeschränkte Zeilen oder es ist äquivalent zu* Σ_4. Für später brauchen wir noch

Satz 9. *Wenn ein fünfspaltiges Schema S den Bedingungen I, II, III genügt, so ist S' äquivalent zu Σ_4.*

Beweis. Nach Satz 5 erfüllt S' die Bedingungen I und II. Wir haben daher nur zu zeigen, daß $U(S')$ mehr als sechs Zeilen enthält. Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. für S' soll der Fall α) zutreffen. S sei so normiert, daß die drei Zeilen (3) mit $x=-y=1$ in $U(S')$ enthalten sind. Es gibt also drei Einheiten x_1, x_2, x_3, so daß

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} +++++x_1 \\ -++-x_2 \\ --++x_3 \end{pmatrix} \subset U(S).$$

1. Wenn wir annehmen, daß $U(S)$ auch nur aus sechs Zeilen besteht, so wären die x_i durch (5) eindeutig bestimmt. Aus $x_1=+1$ folgte $x_2=-1$, sonst blieben in $U(S)$ beim Streichen der ersten und vierten Spalte nur vier verschiedene Zeilen stehen. Ebenso folgt $x_3=-1$, wenn wir die ersten beiden Spalten streichen. Bei $-x_1=x_2=x_3$ bleiben aber nach Streichung der zweiten und vierten Spalte wieder nur vier Zeilen stehen entgegen der Eigenschaft [3, 6].

2. Wenn wir jedoch annehmen, daß in (5) mindestens eines der drei $x_i=+1$ *und* -1 gesetzt werden darf, so können wir jedesmal zwei passende Spalten streichen, wonach entgegen der Eigenschaft [3, 6] sogar *acht* verschiedene Zeilen stehenbleiben. Wir zählen diese Fälle genau auf:

Bei $x_1=+1$, $x_2=+1$, $x_3=\pm 1$ streiche man die 2-te und 3-te Spalte.
Bei $x_1=+1$, $x_2=-1$, $x_3=\pm 1$ streiche man die 1-te und 4-te Spalte.
Bei $x_1=+1$, $x_2=\pm 1$, $x_3=+1$ streiche man die 3-te und 4-te Spalte.
Bei $x_1=+1$, $x_2=\pm 1$, $x_3=-1$ streiche man die 1-te und 2-te Spalte.
Bei $x_1=\pm 1$, $x_2=+1$, $x_3=+1$ streiche man die 1-te und 3-te Spalte.
Bei $x_1=\pm 1$, $x_2=+1$, $x_3=-1$ streiche man die 2-te und 4-te Spalte.

Die Annahme, daß $U(S')$ nur aus sechs Zeilen besteht, führt also in jedem Falle zum Widerspruch, womit Satz 9 bewiesen ist.

Satz 10. *Für ein den Bedingungen I und II genügendes Schema S mit der Spaltenanzahl $m \neq 4$ ist $U(S)$ äquivalent zu $U(\Sigma_m)$.*

Beweis. Für $m \leq 3$ ist Satz 10 richtig. Da S' nach Satz 5 den Bedingungen I und II genügt, können wir als Induktionsvoraussetzung annehmen, daß $U(S') \sim U(\Sigma_{m-1})$ ist. Für $m=5$ ist dies nach Satz 9 tatsächlich erfüllt, so daß der folgende Induktionsschluß den Induktionsanfang $m=5$ mitliefert. Wir können annehmen, daß das Schema S bereits so normiert ist, daß sogar $U(S')=U(\Sigma_{m-1})$ ist und somit aus den $2m-2$ Zeilen $\pm\mathfrak{e}_0, \pm\mathfrak{e}_1, \ldots, \pm\mathfrak{e}_{m-2}$ besteht, wobei

$$\mathfrak{e}_i = \{\underbrace{-- \cdots -}_{i\text{-mal}} + + \cdots +\}$$

gesetzt ist. Wegen $U(S') = U(S)'$ gibt es Einheiten $x_0, x_1, \ldots, x_{m-2}$, so daß

$$\{e_i, x_i\} \in U(S) \quad (i = 0, 1, \ldots, m-2). \tag{6}$$

Wir behaupten, daß ein Index $t \leq 3$ existiert mit $x_t = x_{t+1}$. Träfe das Gegenteil zu, so folgte

$$\{e_0, x_0\}, \{e_1, -x_0\}, \{e_2, x_0\}, \{e_3, -x_0\} \in U(S),$$

also auch

$$\{-e_0, -x_0\}, \{-e_1, x_0\}, \{-e_2, -x_0\}, \{-e_3, x_0\} \in U(S).$$

Wenn man alle Spalten bis auf die zweite, vorletzte und letzte streicht, so bleiben diese acht Zeilen verschieden im Widerspruch zu Eigenschaft [3, 6]. Es gibt also ein t mit

$$\{e_t, x_t\}, \{e_{t+1}, x_t\} \in U(S),$$

d.h. *in $U(S)$ existieren zwei zueinander benachbarte Zeilen.*

Das Schema S werde jetzt neu normiert, so daß $\{++\cdots+++\}$ und $\{++\cdots++-\}$ als die beiden benachbarten Zeilen in $U(S)$ liegen. Es sei P die Menge aller Zeilen von $U(S)$, deren letzte Komponente $= +1$ ist. Wenn wir in P alle Spalten bis auf die letzte und zwei beliebige andere streichen, so bleiben genau drei verschiedene Zeilen übrig, weil $U(S)$ die Eigenschaft [3, 6] hat. Also hat P' die Eigenschaft [2, 3] und enthält die Zeilen $\mathfrak{a} = \{+++\cdots+\}$ und $-\mathfrak{a}$. Nach Satz 8 läßt sich P' durch passende Spaltenvertauschung auf die Dreiecksform Δ_{m-1} bringen. Aus

$$P \sim \begin{pmatrix} ++\cdots+++ \\ -+\cdots+++ \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ --\cdots-++ \\ --\cdots--+ \end{pmatrix}$$

folgt dann sofort, daß $U(S) \sim U(\Sigma_m)$ ist.

Bemerkung. Aus obigem Beweis geht noch hervor, daß man bei der Überführung von $U(S)$ in $U(\Sigma_m)$ die letzte Spalte unberührt an ihrer Stelle lassen kann.

Satz 11. *Wenn ein Schema S den drei Bedingungen I, II, III genügt, so gelten diese auch für S'.*

Ist S vierspaltig, so ist $S' \sim \Sigma_3$. Wir dürfen also für S mehr als vier Spalten voraussetzen. Wegen Satz 5 ist für S' nur noch die Bedingung III zu zeigen. Nach Satz 10 und obiger Bemerkung dürfen wir annehmen, daß S bereits so normiert ist, daß $U(S) = U(\Sigma_m)$ ist. Dann läßt sich die Eigenschaft [3, 7] in folgender schärferer Form aussprechen. Wenn wir $m-3$ beliebige Spalten von S streichen, so fehlt sicher entweder nur die Zeile $\{+-+\}$ oder nur die Zeile $\{-+-\}$, weil die anderen sechs Möglichkeiten durch Zeilen von $U(\Sigma_m) \subset S$ realisiert sind. Durch S ist also für jedes Indextripel i, j, k ein a_{ijk} so definiert, daß nur die Zeile $\{a_{ijk}, -a_{ijk}, a_{ijk}\}$ fehlt,

wenn wir alle Spalten mit Ausnahme der i-ten, j-ten und k-ten streichen $(i<j<k)$. Es gibt also in S keine Zeile $\mathfrak{z}=\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ mit $z_i=-z_j=z_k=a_{ijk}$ für alle $\binom{m}{3}$ möglichen Indextripel. Alle anderen Zeilen, die nicht unter dieses Verbot fallen, sind in S wegen Bedingung III vorhanden.

Zwischen den a_{ijk} gelten die nachfolgenden Beziehungen. Es sei $1\leq i<j<k<l\leq m$.

(7) Aus $a_{ijk}=-a_{ijl}$ folgt $a_{ijl}=a_{jkl}$.

(8) Aus $a_{ijk}=-a_{ijl}$ folgt $a_{ijl}=a_{ikl}$.

(9) Aus $a_{jkl}=-a_{ikl}$ folgt $a_{ikl}=a_{ijk}$.

(10) Aus $a_{jkl}=-a_{ikl}$ folgt $a_{ikl}=a_{ijl}$.

Beweis zu (7) und (8). Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_{ijk}=+1$ setzen, da wir nötigenfalls das ganze S mit -1 multiplizieren dürfen ohne die Gleichung $U(S)=U(\Sigma_m)$ zu zerstören. Durch Streichen aller Spalten bis auf die i-te, j-te, k-te, l-te erhalten wir aus S ein vierspaltiges Schema S^*, das die Eigenschaft [3, 7] besitzt. Es sei also $a_{ijk}=-a_{ijl}=1$. Wegen $a_{ijk}=1$ sind die beiden Zeilen

(11) $$\{+-+\pm\}\notin S^*,$$

jedoch gibt es wegen der Eigenschaft [3, 7] ein Zeichen x, so daß

$$\{-+-x\}\in S^*$$

ist. Aus $a_{ijl}=-1$ folgt ebenso, daß die beiden Zeilen

(12) $$\{-+\pm-\}\notin S^*$$

sind, aber für passendes y die Zeile

$$\{+-y+\}\in S^*$$

ist. Aus (11) folgt $y=-1$ und aus (12) $x=+1$. Wegen $\{-+-+\}\in S^*$ ist $a_{jkl}=-1$, also gilt (7). Da $\{+--+\}\in S^*$ ist, gilt $a_{ikl}=-1$; daher ist auch (8) bewiesen.

Der Beweis zu (9) und (10) ergibt sich, wenn man im Schema S die h-te mit der $(m+1-h)$-ten Spalte $\left(h=1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ vertauscht, also um die senkrechte Achse spiegelt, und dann (7) und (8) anwendet.

Um nun für S' die Bedingung III nachzuweisen, nehmen wir eine Zeile $\mathfrak{a}'=\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$, die nicht in S' liegt. Wir haben zu zeigen, daß das Schema $S'\cup\mathfrak{a}'$ nicht die Eigenschaft [3, 7] hat. Wir nehmen das Gegenteil an. Es sei also kein Indextripel i, j, k mit $1\leq i<j<k<m$ vorhanden, so daß $a_{ijk}=a_i=-a_j=a_k$ ist, d.h.

(13) aus $a_i=-a_j=a_k$ folgt $-a_i=a_{ijk}$, wenn $1\leq i<j<k<m$ ist.

Es sei $a_m=+1$ oder -1. Da $\mathfrak{a}'\notin S'$, ist auch $\mathfrak{a}_1=\{\mathfrak{a}', a_m\}\notin S$ und $\mathfrak{a}_2=\{\mathfrak{a}', -a_m\}\notin S$. Wegen der Bedingung III für S ist im Schema $S\cup\mathfrak{a}_1$ die

Eigenschaft [3, 7] verletzt. Es gibt also drei Spaltenindizes e, f, t, so daß beim Streichen der übrigen Spalten vom Schema $S \cup \mathfrak{a}_1$ noch acht verschiedene Zeilen übrigbleiben. Für die Zeile $\mathfrak{a}_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m\}$ bedeutet das, daß

$$a_e = -a_f = a_t = a_{eft} \qquad (e < f < t \leq m)$$

ist. Nach (13) muß hier $t = m$ sein. Auch bezüglich der Zeile

$$\mathfrak{a}_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, -a_m\} \notin S$$

existieren ebenso drei Indizes g, h, m, so daß

$$a_g = -a_h = -a_m = a_{ghm} \qquad (g < h < m)$$

ist. Es gilt also

$$a_{efm} = -a_{ghm} = a_e = -a_f = -a_g = a_h, \tag{14}$$

woraus $e \neq g$ und $f \neq h$ folgt. Der Wert von a_m, über den wir noch verfügen dürfen, läßt sich jetzt so wählen, daß $e < g$ wird. Bei Änderung von a_m vertauscht sich nämlich $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{a}_2$ und somit e mit g. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall. $f < h$. Es ist also $e < f < h < m$ und $e < g < h < m$. Aus (14) folgt $a_e = -a_g = a_h$ und $a_e = -a_f = a_h$, somit nach (13) die Gleichung $-a_e = a_{egh} = a_{efh}$. Wegen (14) ist daher $a_{efh} = -a_{efm}$. Nach (8) folgt daraus $a_{efm} = a_{ehm}$. Aus (14) folgt $a_{ghm} = -a_{ehm}$. Die Anwendung von (9) ergibt $a_{ehm} = a_{egh}$ und somit $-a_e = a_{egh} = a_{ehm} = -a_{ghm} = a_e$, was nicht sein kann.

2. Fall. $e < g < h < f < m$. Nach (14) ist $a_e = -a_g = a_h$ und $a_g = -a_h = a_f$, woraus nach (13) folgt $a_{egh} = -a_e = a_g = -a_{ghf}$. Wegen (14) ist

$$a_{ghf} = -a_{ghm}, \tag{15}$$

also nach (8) auch $a_{ghm} = a_{gfm}$. Auf Grund von (14) können wir dafür schreiben $a_{gfm} = -a_{efm}$. Nach (9) und (10) folgt $a_{efm} = a_{egf} = a_{egm}$, somit auch $a_{egh} = -a_{egf}$ und $a_{egh} = -a_{egm}$. Nach (7) ergibt sich $a_{egf} = a_{ghf}$ und $a_{egm} = a_{ghm}$, daher $a_{ghf} = a_{egh} = a_{ghm}$ im Gegensatz zu (15).

Die Annahme, daß S nicht der Bedingung III genügt, führt also zum Widerspruch.

§ 3. Zurückführung auf das Standardschema

In allen Sätzen dieses Paragraphen wird vorausgesetzt, daß das betrachtete m-spaltige Schema S den Bedingungen I, II, III genügt und daß $S \sim \Sigma_4$ ist, falls $m = 4$ ist. Wegen Satz 9 und 11 gelten diese Voraussetzungen dann auch für S', so daß die Induktionsschlüsse nicht, wie bisher, bei $m = 4$ steckenbleiben.

Satz 12. *Wenn sich zwei Zeilen* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *des* m*-spaltigen Schemas* S *nur in zwei Komponenten unterscheiden, so existiert in* S *auch eine Zwischenzeile* $\mathfrak{c}$, *die zu* $\mathfrak{a}$ *und zu* $\mathfrak{b}$ *benachbart ist.*

Beweis. Für $m \leq 4$ ist $S \sim \Sigma_m$ realisierbar, somit ist wegen Satz 4 auch Satz 12 richtig. Er sei bereits für alle $(m-1)$-spaltigen Schemata bewiesen

und soll auch für m gezeigt werden ($m \geq 5$). Es sei $\mathfrak{a} = \{+++\cdots+\}$, $\mathfrak{b} = \{--++\cdots+\} \in S$. Wir nehmen das Gegenteil von Satz 12 an, nämlich daß beide Zeilen $\mathfrak{c}_1 = \{-+++\cdots+\}$ und $\mathfrak{c}_2 = \{+-++\cdots+\}$ nicht in S liegen. Wenn wir die letzte Spalte streichen, folgt unter Benützung der Induktionsvoraussetzung der Reihe nach:

$$\mathfrak{a}', \mathfrak{b}' \in S'; \quad \mathfrak{c}_1' \text{ oder } \mathfrak{c}_2' \in S'; \quad \{\mathfrak{c}_1', -1\} \text{ oder } \{\mathfrak{c}_2', -1\} \in S.$$

Diese Überlegung gilt natürlich nicht nur bezüglich der letzten Spalte, sondern auch in bezug auf die vor- und drittletzte. Diese sind nämlich bei $m \geq 5$ verschieden von den ersten beiden. Es folgt also

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{p} = \{-++\cdots+++-\} \text{ oder } \{+-+\cdots+++-\} \in S, \\ \mathfrak{q} = \{-++\cdots++-+\} \text{ oder } \{+-+\cdots++-+\} \in S, \\ \quad\; \{-++\cdots+-++\} \text{ oder } \{+-+\cdots+-++\} \in S. \end{cases}$$

Mindestens zwei Zeilen von (16), die in den ersten $m-3$ Komponenten übereinstimmen, liegen in S, etwa $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. In S existieren also die vier Zeilen

$$(17) \quad \begin{cases} -++\cdots+++- \\ -++\cdots++-+ \\ +++\cdots++++ \\ --+\cdots++++ \end{cases}.$$

Nach Bedingung III muß aber dann auch die Zeile

$$\mathfrak{c}_1 = \{-++\cdots++++\}$$

in S vorhanden sein, denn jedes Komponententripel von $\mathfrak{c}_1$ ist bereits in einer der vier Zeilen (17) realisiert. Das widerspricht der Voraussetzung $\mathfrak{c}_1 \notin S$.

Eine Zeile $\mathfrak{a}$ heiße zur i-ten Spalte *benachbart*, wenn eine Zeile $\mathfrak{z}$ im Schema S existiert, die sich nur in der i-ten Komponente von $\mathfrak{a}$ unterscheidet.

Satz 13. *Wenn eine Zeile $\mathfrak{a}$ aus S zu genau r Spalten, aber nicht zur letzten, benachbart ist, so hat $\mathfrak{a}'$ in S' auch genau r benachbarte Spalten.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ zu den ersten r Spalten benachbart ist ($r < m$). Wenn $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r$ die r zu $\mathfrak{a}$ benachbarten Zeilen sind, so hat natürlich $\mathfrak{a}'$ die r verschiedenen Nachbarn $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots, \mathfrak{a}_r'$ in S'. Es ist nur zu zeigen, daß $\mathfrak{a}'$ keinen weiteren Nachbarn $\mathfrak{b}'$ in S' besitzen kann. Nehmen wir an, dies sei doch der Fall und $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ unterscheiden sich nur in der $(r+1)$-ten Komponente. Es folgt $r+1 < m$ und $\mathfrak{b} = \{\mathfrak{b}', -a_m\}$, da $\{\mathfrak{b}', a_m\} \notin S$ ist. Die Zeilen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ unterscheiden sich nur in der $(r+1)$-ten und letzten Komponente. Nach Satz 12 existiert dann doch noch eine zu $\mathfrak{a}$ benachbarte Zeile, die verschieden von den Zeilen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ ist.

Satz 14. *Jede beschränkte Zeile des Schemas S besitzt mindestens drei benachbarte Zeilen in S.*

Beweis. Für weniger als drei Spalten ist Satz 14 richtig. Wir nehmen ihn für alle $(m-1)$-spaltigen Schemata als bewiesen an. Es sei $\mathfrak{a} = \{++\cdots++\}$

eine beschränkte Zeile des m-spaltigen Schemas S. Wenn $\mathfrak{a}$ zu allen Spalten benachbart ist, ist nichts mehr zu beweisen. $\mathfrak{a}$ sei also etwa zur letzten Spalte nicht benachbart. Falls $\mathfrak{a}' \in U(S')$ ist, so gilt $\mathfrak{a}' \in U(S') = U(S)'$ wegen Satz 7, und weil $\{\mathfrak{a}', -1\} \notin S$ ist, folgt $\mathfrak{a} \in U(S)$. Also muß die Zeile $\mathfrak{a}'$ in S' beschränkt sein. Nach Induktionsvoraussetzung hat $\mathfrak{a}'$ mindestens drei benachbarte Zeilen in S'. Wegen Satz 13 besitzt aber die Zeile $\mathfrak{a}$ ebenso viele Nachbarn in S, w. z. b. w.

Eine beschränkte Zeile von S, die genau drei benachbarte Zeilen besitzt, heiße eine *Dreieckszeile*. Nach Satz 13 und dem Beweis zu Satz 14 ergibt sich sofort

Satz 15. *Wenn $\mathfrak{d}$ im Schema S mit mehr als drei Spalten eine zu den ersten drei Spalten benachbarte Dreieckszeile ist, so ist $\mathfrak{d}'$ in S' auch eine Dreieckszeile.*

Satz 16. *Wenn $\mathfrak{d} = \{++++\cdots+\}$ eine Dreieckszeile von S ist mit den drei Nachbarzeilen*

$$\mathfrak{d}_1 = \{-+++\cdots+\},$$
$$\mathfrak{d}_2 = \{+-++\cdots+\},$$
$$\mathfrak{d}_3 = \{++-+\cdots+\},$$

so existieren in S auch die drei Zeilen

$$\mathfrak{d}_{23} = \{+--+\cdots+\},$$
$$\mathfrak{d}_{13} = \{-+-+\cdots+\},$$
$$\mathfrak{d}_{12} = \{--++\cdots+\}.$$

Beweis. Satz 16 gilt für weniger als fünf Spalten, da er für realisierbare Schemata richtig ist. Für $m-1$ Spalten sei er schon bewiesen ($m \geq 5$). Wir nehmen an, daß Satz 16 für das m-spaltige Schema S nicht zutrifft, daß also etwa $\mathfrak{d}_{12} \notin S$, aber $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3 \in S$ sei. Dann ist $\mathfrak{d}'$ nach Satz 15 eine Dreieckszeile mit den Nachbarn $\mathfrak{d}_1', \mathfrak{d}_2', \mathfrak{d}_3'$ in S'. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $\mathfrak{d}_{12}'$ in S'. Da $\mathfrak{d}_{12} \notin S$ ist, muß $\{\mathfrak{d}_{12}', -1\}$ in S liegen. Diesen Schluß führen wir nicht nur in bezug auf die letzte Spalte durch, sondern noch einmal bezüglich der vorletzten, die ja wegen $m \geq 5$ auch von den drei ersten verschieden ist. Wir erhalten

$$(18) \qquad \begin{cases} \{--++\cdots++-\} \in S, \\ \{--++\cdots+-+\} \in S. \end{cases}$$

Weil S maximal bezüglich der Eigenschaft [3, 7] ist, zeigt sich jetzt, daß die Zeile

$$\mathfrak{d}_{12} = \{--++\cdots+++\}$$

doch in S liegen muß, weil jedes Komponententripel von $\mathfrak{d}_{12}$ bereits in einer der sechs Zeilen $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$ und (18) vorkommt. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß in S auch $\mathfrak{d}_{23}$ und $\mathfrak{d}_{13}$ liegen muß.

Das Schema S möge die Dreieckszeile $\mathfrak{d} = \{++++\cdots+\}$, die etwa zu den ersten drei Spalten benachbart sei, enthalten. Wegen Satz 16 und Eigenschaft [3, 7] ist dann die Zeile $\bar{\mathfrak{d}} = \{---+\cdots+\}$ *nicht* in S. Wenn wir

im Schema S die Zeile $\mathfrak{d}$ durch die Zeile $\overline{\mathfrak{d}}$ ersetzen, so entsteht ein neues Schema $\overline{S}$. Ein solcher Übergang von S zu $\overline{S}$ heiße eine *Dreieckstransformation*. Zu beachten ist, daß in S im allgemeinen mehrere Dreieckszeilen vorhanden und somit verschiedene Dreieckstransformationen möglich sind.

Satz 17. *Durch eine Dreieckstransformation entsteht aus S ein Schema $\overline{S}$, das wieder den drei Bedingungen I, II, III genügt.*

Die Bezeichnungen seien wie bei Satz 16 gewählt. Wir zeigen zunächst, daß die Dreieckszeile $\mathfrak{d} = \{+++\cdots+\}$ die einzige Zeile in S ist, die mit drei Pluszeichen beginnt. Gäbe es nämlich noch so eine Zeile $\mathfrak{p}$, so müßte diese — etwa als vierte Komponente — ein Minuszeichen enthalten, also $\mathfrak{p} = \{+++-\cdots\}$ sein. Beim Streichen der letzten $m-4$ Spalten bliebe $\mathfrak{d}$ nach Satz 15 eine Dreieckszeile; anderseits hätte sie aber einen vierten Nachbarn $\mathfrak{p}^* = \{+++-\}$ erhalten. Also ist $\mathfrak{d}$ doch die einzige mit drei Pluszeichen beginnende Zeile von S. Beim Entfernen der letzten $m-1$ Spalten bleibt daher bei $\overline{S}$ die Zeile $\{+++\}$ nicht übrig, dafür aber die Zeile $\{---\}$. Beim Streichen irgend dreier anderer Spalten ist im Ergebnis zwischen S und $\overline{S}$ kein Unterschied, weil die betreffenden Komponententripel von $\mathfrak{d}$ oder $\overline{\mathfrak{d}}$ bereits auch in mindestens einer der sechs Zeilen $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_{23}, \mathfrak{d}_{13}, \mathfrak{d}_{12}$ vorkommen. Hiermit ist für S die Eigenschaft $[3, 7]$ gezeigt.

Um zunächst auch die Bedingung III nachzuweisen, sei

$$\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\} \notin \overline{S}.$$

Es soll gezeigt werden, daß das Schema $\overline{S} \cup \mathfrak{a}$ nicht die Eigenschaft $[3, 7]$ hat. Wir unterscheiden drei Fälle.

α) Falls $\mathfrak{a} \in S$ ist, folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$, und die Eigenschaft $[3, 7]$ ist für $\overline{S} \cup \mathfrak{d} = S \cup \overline{\mathfrak{d}}$ tatsächlich verletzt, da ja für S die Bedingung III vorausgesetzt ist.

β) Wenn $\mathfrak{a} \notin S$ ist, so ist die Eigenschaft $[3, 7]$ für das Schema $S \cup \mathfrak{a}$ gestört, und zwar bezüglich mindestens eines Spaltentripels. Wenn dies nicht gerade *nur* die drei ersten Spalten sind, so ist auch für $\overline{S} \cup \mathfrak{a}$ bezüglich dieses Spaltentripels die Eigenschaft $[3, 7]$ verletzt.

γ) Es sei keine Zeile in S, die in den drei ersten Komponenten mit $\mathfrak{a} \notin S$ übereinstimmt, d.h. $\mathfrak{a} = \{-1, -1, -1, a_4, \ldots, a_m\}$, während alle anderen Komponententripel von $\mathfrak{a}$ durch mindestens eine Zeile von S realisiert sind. Da für das Schema $'S = '\overline{S}$, das durch Streichen der ersten Spalte aus S oder $\overline{S}$ hervorgeht, die Bedingung III gilt, folgt $'\mathfrak{a} \in 'S$ und somit

$$\{+1, -1, -1, a_4, \ldots, a_m\} \in S.$$

Analog folgt

$$\{-1, +1, -1, a_4, \ldots, a_m\} \in S,$$
$$\{-1, -1, +1, a_4, \ldots, a_m\} \in S.$$

Wegen $\mathfrak{a} \notin S$ liegen dann nach Satz 12 auch die drei Zeilen

$$\{+1, +1, -1, a_4, \ldots, a_m\},$$
$$\{+1, -1, +1, a_4, \ldots, a_m\},$$
$$\{-1, +1, +1, a_4, \ldots, a_m\}$$

in S. Wegen Bedingung III gehört somit auch die Zeile

$$\{+1, +1, +1, a_4, \ldots, a_m\}$$

zu S, da auch $\mathfrak{d} \in S$ ist. Weil aber $\mathfrak{d}$ die einzige Zeile aus S ist, die mit drei Pluszeichen beginnt, folgt $\overline{\mathfrak{d}} = \mathfrak{a}$ entgegen der Annahme $\mathfrak{a} \notin \overline{S}$.

Hiermit ist gezeigt, daß S die Bedingung III erfüllt. Wegen der Bedingung I kann die Zeile $-\overline{\mathfrak{d}} = \{+++-\cdots-\}$ nicht in S liegen, also ist $U(S) = U(\overline{S})$, d.h. die Bedingung II gilt auch.

Satz 18. *Der Übergang von $\overline{S}$ zurück zu S ist ebenfalls eine Dreiecks-transformation.*

Es ist nur zu zeigen, daß $\overline{\mathfrak{d}}$ eine Dreieckszeile von $\overline{S}$ ist. Daß $\overline{\mathfrak{d}}$ beschränkt ist, wurde oben schon bemerkt. In S gibt es nach Satz 16 und Bedingung I keine mit drei Minuszeichen beginnende Zeile, also hat $\overline{\mathfrak{d}}$ in $\overline{S}$ nur die drei Nachbarzeilen $\mathfrak{d}_{23}, \mathfrak{d}_{13}, \mathfrak{d}_{12}$.

Satz 19. *Durch eine Dreieckstransformation geht ein realisierbares Schema S wieder in ein realisierbares Schema $\overline{S}$ über.*

Beweis. Das realisierbare Schema S genügt den drei Bedingungen I, II und III. Neben der Dreieckszeile $\mathfrak{d}$ existieren nach Satz 16 auch die sechs Zeilen $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_{23}, \mathfrak{d}_{13}, \mathfrak{d}_{12}$ in S. Es sei

Q_1 ein Punkt im Inneren der Trennlinie zwischen den Zellen $\mathfrak{d}_{12}$ und $\mathfrak{d}_1$,

Q_2 ein Punkt im Inneren der Trennlinie zwischen den Zellen $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_{13}$,

Q_3 ein Punkt im Inneren der Trennlinie zwischen den Zellen $\mathfrak{d}_{13}$ und $\mathfrak{d}_3$,

Q_4 ein Punkt im Inneren der Trennlinie zwischen den Zellen $\mathfrak{d}_3$ und $\mathfrak{d}_{23}$.

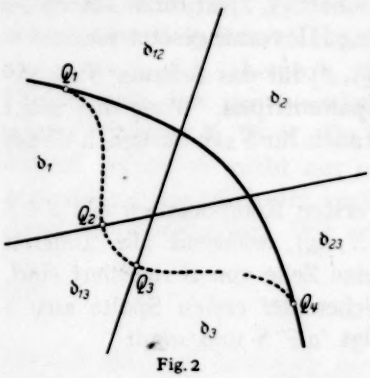


Fig. 2

Nun wird Q_i mit Q_{i+1} durch einen einfachen Bogen b_i verbunden, der bis auf seine Endpunkte mit $\mathfrak{R}$ keinen Schnittpunkt hat ($i = 1, 2, 3$). Den durch Q_1 und Q_2 bestimmten Teilbogen von g_2 ersetzen wir jetzt durch den Bogen $b_1 b_2 b_3$. Dabei geht g_2 in die neue Pseudogerade $\bar{g}_2$ und $\mathfrak{R}$ in eine einfache Konfiguration $\overline{\mathfrak{R}}$ über. Das Schema $\overline{S}$ von $\overline{\mathfrak{R}}$ muß die Zeile $\overline{\mathfrak{d}} = \{---+\cdots+\}$ enthalten, weil die Zelle $\mathfrak{d}_{13}$ durch $\bar{g}_2$ in zwei Zellen zerlegt wird. Da die sechs Zeilen $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_{23}, \mathfrak{d}_{13}, \mathfrak{d}_{12}$ in $\overline{S}$ wieder vorhanden sind, kann das realisierbare Schema $\overline{S}$ wegen Eigenschaft [3, 7] die Zeile $\mathfrak{d}$ nicht mehr enthalten. Der Übergang von S zu $\overline{S}$ ist daher tatsächlich die in Satz 17 betrachtete Dreieckstransformation.

In den folgenden Sätzen werden vom m-spaltigen Schema S wieder lediglich die drei Bedingungen I, II, III vorausgesetzt und daß im Falle $m = 4$ überdies $S \sim \Sigma_4$ ist.

Satz 20. *Wenn $\mathfrak{d}'$ eine Dreieckszeile von S' ist, so ist $\mathfrak{d} = \{\mathfrak{d}', +1\}$ oder $\mathfrak{d}_0 = \{\mathfrak{d}', -1\}$ eine Dreieckszeile von S.*

Beim Beweis wollen wir annehmen, daß $\mathfrak{d}' = \{++\cdots+\}$ etwa zu den ersten drei Spalten benachbart ist. Die Zeilen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_0$ sind in S jedenfalls beschränkt, da sogar $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}_0'$ in S' beschränkt ist. Falls etwa $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{d}_0$ nicht in S liegt, so hat $\mathfrak{d}_0$ oder $\mathfrak{d}$ nur drei benachbarte Zeilen in S, ist also Dreieckszeile. Wir nehmen also an, daß beide Zeilen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_0$ in S liegen. Da $\mathfrak{d}'$ Dreieckszeile in S' ist, so ist sowohl $\mathfrak{d}$ als auch $\mathfrak{d}_0$ höchstens zur 1-ten, 2-ten, 3-ten und letzten Spalte benachbart. Hier kann man das Wort „höchstens" nicht durch „genau" ersetzen, sonst würde man beim Streichen der $m-4$ Spalten mit den Indizes 4 bis $m-1$ ein 4-spaltiges Schema erhalten, in dem zwei zueinander benachbarte Zeilen existieren, die beide zu allen vier Spalten benachbart sind. In Σ_4 kommt das jedoch nicht vor. Also ist $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{d}_0$ nach Satz 14 zu drei Spalten benachbart, w. z. b. w.

Satz 21. *Ein m-spaltiges Schema S sei gegeben. Wenn sich durch eine Dreieckstransformation das Schema S' in das $(m-1)$-spaltige Schema V überführen läßt, so kann man durch höchstens zwei aufeinanderfolgende Dreieckstransformationen aus Schema S ein Schema T derart erhalten, daß $T' = V$ ist.*

Es sei $\mathfrak{d} = \{+++++\cdots++\} \in S$ so gewählt, daß beim Ersetzen der Dreieckszeile $\mathfrak{d}'$ durch $\bar{\mathfrak{d}}' = \{---+\cdots+\}$ das Schema S' in V übergeht. Zwei Fälle sind zu unterscheiden.

α) Die Zeile $\mathfrak{d}_0 = \{++++\cdots+-\}$ sei nicht in S vorhanden. $\mathfrak{d}$ ist wegen $U(S)' = U(S')$ beschränkt und besitzt nach Satz 14 mindestens drei Nachbarzeilen in S. Weil $\mathfrak{d}'$ Dreieckszeile von S' und $\mathfrak{d}_0 \notin S$ ist, hat $\mathfrak{d}$ genau drei Nachbarn, und zwar $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$. Ersetzen wir $\mathfrak{d}$ durch $\bar{\mathfrak{d}}$, so entsteht das Schema $\bar{S} = T$ mit $T' = V$, denn hierbei wird in S' tatsächlich $\mathfrak{d}'$ durch $\bar{\mathfrak{d}}'$ ersetzt.

β) Jetzt sei auch $\mathfrak{d}_0 \in S$. Nach Satz 20 ist dann $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{d}_0$ eine Dreieckszeile von S. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß etwa $\mathfrak{d}_0$ Dreieckszeile ist, die zur 2-ten, 3-ten und m-ten Spalte benachbart ist. Wir ersetzen nun $\mathfrak{d}_0$ durch $\bar{\mathfrak{d}}_0 = \{+--++\cdots++\}$ und erhalten dabei das Schema R. In R ist die Zeile $\mathfrak{d}$ nicht mehr zur letzten Spalte benachbart, daher eine Dreieckszeile von R, die zu den ersten drei Spalten benachbart ist. Vom Schema R gehen wir nun zu einem Schema T über, indem wir $\mathfrak{d}$ durch $\bar{\mathfrak{d}} = \{---+\cdots++\}$ ersetzen. Weil nach Satz 16 die Zeile $\bar{\mathfrak{d}}_0'$ in S' liegt, ist $S' = R'$. Beim Übergang von R zu T wird in $S' = R'$ die Zeile $\mathfrak{d}'$ durch $\bar{\mathfrak{d}}'$ ersetzt. Also ist $T' = V$.

Mit $N_i(S)$ bezeichnen wir die Menge aller Zeilen von S, die als i-te Komponente den Wert -1 haben.

Ergänzung zu Satz 21. *Wenn von S zusätzlich vorausgesetzt wird, daß $N_m(S) \subset U(S)$ ist, so wird auch $N_m(T) \subset U(T)$.*

Beweis. Wegen $N_m(S) \subset U(S)$ gilt $\mathfrak{d}_0 \notin S$, daher ist nur Fall α) zu betrachten; aus $\bar{\mathfrak{d}} \notin N_m(S)$ folgt sofort $N_m(T) \subset U(T) = U(S)$.

Satz 22. *Wenn $N_1(S') \subset U(S')$ und $\mathfrak{c} \in N_1(S)$ eine beschränkte Zeile von S ist, so ist $\mathfrak{c}$ zur 1-ten, zur letzten und zu höchstens zwei weiteren Spalten benachbart.*

α) Wäre $\mathfrak{c}$ nicht zur letzten Spalte benachbart, so folgte, daß mit $\mathfrak{c}' \in N_1(S)' = N_1(S') < U(S') = U(S)'$ auch $\mathfrak{c}$ unbeschränkt in S wäre.

β) Wäre $\mathfrak{c} = \{-+++\cdots++\}$ zu drei Spalten, die verschieden von der ersten und letzten sind, benachbart — etwa zur 2-ten, 3-ten und 4-ten —, so folgte für S' die Existenz der vier Zeilen

$$\begin{array}{l} -+++\cdots+ \\ --++\cdots+ \\ -+-+\cdots+ \\ -++-\cdots+ \end{array}$$

und wegen $N_1(S') < U(S')$ auch die der vier dazu reziproken. Streicht man alle Spalten bis auf die 2-te, 3-te und 4-te, so bleiben diese acht Zeilen verschieden entgegen der Eigenschaft [3, 7].

γ) Wäre $\mathfrak{c} = \{-+++\cdots++\}$ nicht zur ersten Spalte benachbart, so wäre die beschränkte Zeile $\mathfrak{c}$ nach α) und β) eine Dreieckszeile, die zur letzten und etwa zur 2-ten und 3-ten benachbart sei. Es folgte nach Satz 16, daß in S' die vier Zeilen

$$\begin{array}{l} -+++\cdots+ \\ --++\cdots+ \\ -+-+\cdots+ \\ ---+\cdots+ \end{array}$$

und wegen $N_1(S') < U(S')$ auch die vier dazu reziproken Zeilen vorkommen. Beim Streichen der $m-4$ letzten Spalten wird der Widerspruch mit Eigenschaft [3, 7] ersichtlich. Satz 22 ist bewiesen.

Satz 23. *Wenn $N_1(S) \not< U(S)$ aber $N_1(S') < U(S')$ gilt, so existiert eine Dreieckszeile im Schema S, die in $N_1(S)$ liegt und zur ersten und letzten Spalte benachbart ist.*

Für das realisierbare Schema Σ_4 ist Satz 23 gültig. Er sei bewiesen für die Spaltenanzahl $m-1$. Wegen $N_1(S) \not< U(S)$ existiert eine beschränkte Zeile $\mathfrak{c} = \{-1, c_2, c_3, \ldots, c_m\}$ im m-spaltigen Schema S. Wegen $m \geq 5$ gibt es nach Satz 22 eine Spalte — angenommen die vorletzte —, zu der $\mathfrak{c}$ nicht benachbart ist. Das Streichen dieser $(m-1)$-ten Spalte wird jetzt mit $*$ symbolisiert. Wegen $U(S^*) = U(S)^*$ ist mit $\mathfrak{c}$ in S auch $\mathfrak{c}^*$ in S^* beschränkt, d. h.

$$N_1(S^*) \not< U(S^*).$$

Außerdem folgt aus $N_1(S') < U(S')$, daß auch

$$N_1(S^{*\prime}) = N_1(S')^* < U(S')^* = U(S^{*\prime})$$

ist. Die Voraussetzungen von Satz 23 sind daher für das $(m-1)$-spaltige Schema S^* erfüllt. Nach Induktionsvoraussetzung ist also eine Dreieckszeile $\{-1, d_2, \ldots, d_{m-2}, d_m\}$ in S vorhanden. Nach Satz 20 ist sodann eine der beiden Zeilen $\{-1, d_2, \ldots, d_{m-2}, \pm 1, d_m\}$ eine Dreieckszeile, die nach Satz 22 tatsächlich zur ersten und letzten Spalte benachbart ist.

Satz 24. *Mit Hilfe von endlich vielen aufeinanderfolgenden Dreieckstransformationen kann man jedes Schema S in ein Schema T mit $N_1(T) < U(T)$ verwandeln.*

Der Beweis wird wieder durch vollständige Induktion gewonnen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine aus Schemata V_i gebildete Kette $S' = V_0, V_1, \ldots, V_r$, wobei V_i aus V_{i-1} durch eine Dreieckstransformation hervorgeht und $N_1(V_r) < U(V_r)$ ist. Nach r-maliger Anwendung von Satz 21 gewinnen wir eine Kette $S = S_0, S_1, \ldots, S_t$, wobei $S_t' = V_r$ ist und S_i aus S_{i-1} durch eine Dreieckstransformation erhalten wird ($r \leq t \leq 2r$). Für dieses S_t gilt $N_1(S_t') < U(S_t')$.

α) Falls $N_1(S_t) < U(S_t)$ ist, so setzen wir $S_t = T$ und es ist nichts mehr zu beweisen.

β) Falls $N_1(S_t) \not< U(S_t)$ ist, so ist für S_t der Satz 23 anwendbar; es existiert also eine Dreieckszeile $\mathfrak{d}_t$ in S_t, die mit -1 beginnt und zur ersten und letzten Spalte benachbart ist. Bezüglich dieser Dreieckszeile führen wir eine Dreieckstransformation von S_t in das neue Schema S_{t+1} aus. Da $\mathfrak{d}_t$ zur letzten Spalte benachbart war, gilt $S_t' = S_{t+1}'$ und daher wieder

$$N_1(S_{t+1}') < U(S_{t+1}').$$

Je nachdem ob $N_1(S_{t+1}) < U(S_{t+1})$ gilt oder nicht, tritt für S_{t+1} der Fall α) oder der Fall β) ein. Im Falle β) liefert Satz 23 wieder eine Dreieckszeile $\mathfrak{d}_{t+1} \in S_{t+1}$ und hiermit ein neues S_{t+2} usw. Bei diesem Verfahren muß nach endlich vielen Schritten der Fall α) eintreten, weil bei jedem Schritt die Anzahl der mit -1 beginnenden Zeilen abnimmt. Hiermit ist Satz 24 bewiesen.

Satz 25. *Wenn S ein Schema mit $N_1(S) < U(S) = U(\Sigma_m)$ und $'S = \Sigma_{m-1}$ ist, so gilt sogar $S = \Sigma_m$.*

Wir führen wieder vollständige Induktion nach m durch, wobei wir schon bei $m = 2$ beginnen können. Aus der Voraussetzung des zu beweisenden Satzes folgt

$$N_1(S') = N_1(S)' < U(S)' = U(S') = U(\Sigma_m)' = U(\Sigma_m') = U(\Sigma_{m-1})$$

und

$$'S' = \Sigma_{m-1}' = \Sigma_{m-2}.$$

Daher ist für das $(m-1)$-spaltige S' die Voraussetzung von Satz 25 erfüllt, somit wegen der Induktionsannahme auch $S' = \Sigma_{m-1}$. Wir behaupten zunächst, daß

$$S < \Sigma_m \tag{19}$$

gilt. Es sei das Gegenteil von (19) richtig, also eine Zeile $\mathfrak{z} \in S$ mit $\mathfrak{z} \notin \Sigma_m$ vorhanden. In $\mathfrak{z}$ muß ein Pluszeichen zwischen zwei Minuszeichen stehen, d. h. $\mathfrak{z}$ hat die Form $\mathfrak{z} = \{\cdots - \cdots + \cdots - \cdots\}$. Die Zeilen $\mathfrak{z}'$ und $'\mathfrak{z}$ sind jedoch nicht von dieser Form wegen $'S = \Sigma_{m-1} = S'$. Also folgt $\mathfrak{z} = \{- + + \cdots + + -\}$.

In S liegen somit die vier Zeilen (die vierte wegen $'S = \Sigma_{m-1}$ und $S' = \Sigma_{m-1}$):

$$\begin{array}{l} -++\cdots++- \\ -++\cdots+++ \\ ---\cdots--- \\ --+\cdots+++. \end{array}$$

Wegen $N_1(S) < U(S)$ sind auch die vier hierzu reziproken Zeilen in S. Wenn man die dritte bis $(m-1)$-te Spalte streicht, bleiben diese acht Zeilen verschieden. Hiermit ist (19) bewiesen. Weil für S und Σ_m die Bedingungen I und III gelten, folgt aus (19) sogar $S = \Sigma_m$, w. z. b. w.

Satz 26. *Ein Schema S mit $U(S) = U(\Sigma_m)$ läßt sich durch Anwendung endlich vieler Dreieckstransformationen in das Standardschema Σ_m überführen.*

Wir beweisen wieder mit Hilfe vollständiger Induktion nach m. Zunächst führen wir S nach Satz 24 durch Dreieckstransformationen in ein Schema T über mit $N_1(T) < U(T)$. Da hierbei alle unbeschränkten Zeilen unberührt bleiben, ist $U(T) = U(S) = U(\Sigma_m)$. Wegen

$$U('T) = 'U(T) = 'U(\Sigma_m) = U('\Sigma_m) = U(\Sigma_{m-1})$$

läßt sich $'T$ nach Induktionsvoraussetzung durch etwa r Dreieckstransformationen in das Schema Σ_{m-1} überführen. Nach r-maliger Anwendung von Satz 21 ergibt sich, daß man T durch Dreieckstransformationen in ein Schema V überführen kann mit $'V = \Sigma_{m-1}$. Wegen $N_1(T) < U(T)$ folgt mit Hilfe der Ergänzungsbemerkung von Satz 21, daß auch $N_1(V) < U(V)$ gilt. Wegen Satz 25 ist $V = \Sigma_m$, w. z. b. w.

Aus den Sätzen 10, 26, 18 und 19 folgt endlich, daß die drei Bedingungen I, II, III von Satz 1 der Einleitung tatsächlich auch hinreichend sind für die Realisierbarkeit eines Schemas $S (m \neq 4)$.

§ 4. Bemerkungen, geradlinige Realisierbarkeit, offene Fragen

Es sei zunächst kurz darauf hingewiesen, daß man in Satz 1 nicht etwa eine der drei Bedingungen weglassen darf. Mit Ω bezeichnen wir die Menge aller Zeilen mit der Länge $m > 4$, die höchstens zwei Minuszeichen enthalten. Für dieses Ω sind die beiden Bedingungen I und III erfüllt, auch Satz 12 von der Existenz der Zwischenzeile gilt, und Ω hat überdies die Eigenschaft $\left[h, \frac{h(h+1)}{2} + 1\right]$ für $h = 1, 2, \ldots, m$. Trotzdem ist Ω kein realisierbares Schema, weil $U(\Omega)$ leer ist. Wenn man aus einem realisierbaren Schema eine beschränkte Zeile, die keine Dreieckszeile ist, entfernt, so erhält man ein Schema, das zwar den Bedingungen I und II genügt, aber nicht realisierbar ist.

Die drei Bedingungen von Satz 1 lassen sich leicht auf die Zerlegungen des n-dimensionalen Raumes durch Pseudohyperebenen in allgemeiner Lage übertragen, indem man einfach die Eigenschaften [3, 7] bzw. [3, 6] durch die Eigenschaften $[n+1, 2^{n+1}-1]$ bzw. $[n+1, 2^{n+1}-2]$ ersetzt. Für $n > 2$ sind die drei Bedingungen jedoch nur notwendig, nicht hinreichend. Bereits

bei Satz 6 erkennt man, daß sich auch die Beweismethoden nicht ohne weiteres ins n-dimensionale übertragen lassen. Bleiben wir wieder bei $n=2$.

Vom geometrischen Standpunkt erscheint es nunmehr wünschenswert, notwendige und hinreichende Bedingungen auch für die geradlinig realisierbaren Matrizen zu finden. Dieses Problem hängt augenscheinlich eng zusammen mit der Gewinnung eines Überblicks über alle ebenen Schließungssätze und dürfte daher schwierig sein. Wir begnügen uns hier damit, an Beispielen zu zeigen, daß es einfache Konfigurationen von Pseudogeraden gibt, die sich nicht strecken lassen.

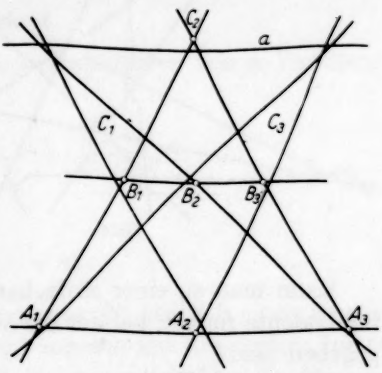


Fig. 3

Die durch Fig. 3 mitgeteilte Konfiguration von 9 Pseudogeraden läßt sich durch Hinzunahme von weiteren Schnittpunkten (die außerhalb des Zeichenblattes fielen und sowieso hier nicht interessieren) zu einer einfachen Konfiguration von 9 Pseudogeraden ergänzen. Diese Verlängerung der Pseudogeraden sei in irgendeiner Weise vorgenommen. Wir behaupten, die entstehende einfache Konfiguration läßt sich nicht strecken. Zum Beweis nehmen wir im Gegenteil an, daß 9 Geraden existieren, die die Ebene kombinatorisch wie in Fig. 3 zerlegen. Die Streckung sei also schon vollzogen und Fig. 3 stelle bereits 9 Geraden dar. Wir betrachten die 6 Schnittpunkte $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Die Verbindungsgerade der beiden Punkte A_i, B_k werde mit (A_i, B_k) bezeichnet.

Der Schnittpunkt von (A_1, B_1) mit (A_3, B_3) heiße C_2,
der Schnittpunkt von (A_2, B_3) mit (A_1, B_2) heiße C_3,
der Schnittpunkt von (A_3, B_2) mit (A_2, B_1) heiße C_1.

Der Punkt C_2 ist zugleich auch ein Schnittpunkt der Konfiguration. Der Punkt C_3 bzw. C_1 muß dem mit C_3 bzw. C_1 bezeichneten viereckigen Gebiet (Durchschnitt von vier Halbebenen) angehören. Nach dem Satz von PAPPUS-PASCAL liegen die drei Punkte C_1, C_2, C_3 auf einer Geraden.

Die drei Geraden a, (A_1, B_1), (A_3, B_3) zerlegen die Ebene in sieben Gebiete. Drei dieser Gebiete sind als Durchschnitt von nur *zwei* Halbebenen darstellbar. Jede beliebige vierte Gerade ist fremd zur abgeschlossenen Hülle eines dieser drei Gebiete. Es kann also keine Gerade durch C_1, C_2, C_3 existieren.

Ebenso ist die in Fig. 4 dargestellte Konfiguration nicht streckbar, was man in ähnlicher Weise durch Zurückführung auf den Satz von DESARGUES beweisen kann.

Außer den Aufgaben, die durch den bisherigen Inhalt der Arbeit berührt wurden, sei nun auf folgende noch offene Fragen hingewiesen.

Wenn man die Ebene an einer beliebigen Geraden a spiegelt, so geht eine einfache Konfiguration $\mathfrak{K}$ in eine äquivalente Konfiguration $\mathfrak{K}^a$ über. Es seien $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ zwei äquivalente einfache Konfigurationen von Pseudogeraden. Es ist nicht schwer, zu zeigen, daß sich $\mathfrak{K}$ durch eine stetige Deformation in die Konfiguration $\mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{L}^a$ überführen läßt, d.h. daß für jede reelle Zahl t mit $0 \leq t \leq 1$ eine sich mit t stetig ändernde Konfiguration $\mathfrak{K}_t$ derart gefunden werden kann, daß $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{L}^a$ ist. Wenn $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ geradlinige einfache Konfigurationen sind, erhebt sich die Frage, ob sich dann die Deformation geradlinig durchführen läßt, d.h. so, daß alle $\mathfrak{K}_t$ auch geradlinig sind.

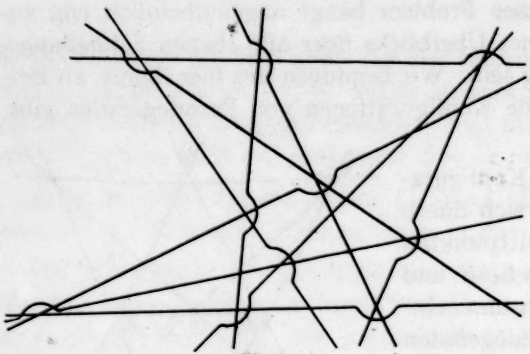


Fig. 4

Kann man zu einer einfachen Konfiguration $\mathfrak{K}$ von m Geraden eine dazu äquivalente finden, bei der die Winkel zwischen den m Geraden beliebig vorgegeben sind?

Läßt sich zu $\mathfrak{K}$ und zu m vorgegebenen Punkten $P_1, \ldots, P_m$ eine mit $\mathfrak{K}$ äquivalente Konfiguration von Geraden $g_1, \ldots, g_m$ derart finden, daß P_i auf g_i liegt? Diese Frage könnte auch unter Verzicht auf die Reihenfolge der Punkte gestellt werden.

Bonn, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 16. April 1955)

PERRON, O.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 103—114 (1956)

Über Potenzsummen

Von
OSKAR PERRON

§ 1. Ziel der Arbeit

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die symmetrischen Grundfunktionen von n Variabeln (Unbestimmten) $x_1, \ldots, x_n$, also

$$\prod_{\nu=1}^{n}(1 - x_\nu t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \tag{1.1}$$

und seien s_ν die Potenzsummen

$$s_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu + \cdots + x_n^\nu. \tag{1.2}$$

Im Anschluß an eine Arbeit von Herrn PÓLYA habe ich kürzlich einen Beweis für den Satz erbracht, daß die ersten n Potenzsummen mit ungeradem Index $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ ein Fundamentalsystem für die symmetrischen Funktionen bilden, d.h., daß die a_ν und folglich alle symmetrischen Funktionen sich rational durch sie darstellen lassen, habe explizite Formeln für die a_ν hergeleitet und außerdem die irreduzible zwischen den $n+1$ Polynomen $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}, s_{2n+1}$ bestehende Abhängigkeit angegeben[1]). An Literatur war mir außer PÓLYA nur noch eine von PÓLYA zitierte Arbeit von LAGUERRE bekannt. Inzwischen hat mich aber Herr OSTROWSKI darauf aufmerksam gemacht, daß das Problem schon mehrfach behandelt worden ist. Zunächst hat bereits BORCHARDT den obigen Satz über $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ bewiesen[2]). Sodann hat VAHLEN einen neuen Beweis dafür erbracht und zugleich die folgende Verallgemeinerung bewiesen[3]): Ist k eine ganze Zahl ≥ 2 und sind $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ die ersten n natürlichen Zahlen, die keine Multipla von k sind, so bilden die Polynome $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$ ein Fundamentalsystem für die symmetrischen Funktionen. Ein weiteres Fundamentalsystem hat B. VON LUDWIG angegeben[4]) und schließlich hat KAKEYA das folgende abschließende Ergebnis gewonnen[5]): Die n Potenzsummen $s_{\mu_1}, \ldots, s_{\mu_n}$ bilden dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn die nach Weglassen von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ verbleibende

[1]) PERRON, O.: Über die Abhängigkeit von Potenzsummen und einen Satz von Pólya. Math. Z. **63**, 19—30 (1955).

[2]) BORCHARDT, C. W.: Über eine Eigenschaft der Potenzsummen ungerader Ordnung. Monatsberichte der Berliner Akademie 1857 = Gesammelte Werke, S. 107—118.

[3]) VAHLEN, K. TH.: Über Fundamentalsysteme für symmetrische Funktionen. Acta Mathematica **23**, 91—120 (1900).

[4]) LUDWIG, BERNHARD V.: Ein neues Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen. Math. Ann. **83**, 67—69 (1921).

[5]) KAKEYA, SÔICHI: On fundamental systems of symmetric functions. I, II. Jap. J. Math. **2**, 69—80 (1925); **4**, 77—85 (1927).

Menge natürlicher Zahlen so beschaffen ist, daß die Summe von je zweien auch dazu gehört (modern ausgedrückt: wenn diese Menge eine additive Halbgruppe bildet).

Bis zur formelmäßigen Darstellung der a_ν ist keiner der Autoren vorgedrungen. Der Beweis von KAKEYA ist als reiner Existenzbeweis besonders einfach und elegant, aber ich sehe keine Möglichkeit, ihn so zu modifizieren, daß er zu expliziten Formeln führt. Dagegen ist mir für den Spezialfall von VAHLEN ein neuer Beweis gelungen, der auch fertige Formeln für die a_ν liefert. Er soll im folgenden dargestellt werden.

Anschließend wird in § 5 ein damit zusammenhängendes Gleichungssystem und die Vielfachheit seiner verschiedenen Lösungen untersucht.

§ 2. Die Irreduzibilität gewisser Polynome

I. In diesem Paragraphen bedeuten die s_ν keine Potenzsummen, sondern Unbestimmte über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen, die erst in § 4 zu Potenzsummen spezialisiert werden.

Sei k eine ganze Zahl ≥ 2 und seien $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ die der Größe nach geordneten natürlichen Zahlen, die nach Ausschluß der Multipla von k verbleiben, also die Zahlen

$$1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, 2k-1, 2k+1, \ldots, 3k-1, 3k+1, \ldots.$$

Um für ν_m einen Ausdruck zu finden, bezeichnen wir mit a die größte in dem Bruch $\frac{m-1}{k-1}$ enthaltende ganze Zahl

$$a = \left[\frac{m-1}{k-1}\right]$$

und setzen

$$m - 1 = a(k-1) + \varrho,$$

wo dann $0 \leq \varrho < k-1$ ist. Dann ist

$$\nu_{a(k-1)} = ak - 1, \quad \nu_{a(k-1)+1} = ak + 1, \ldots,$$
$$\nu_m = \nu_{a(k-1)+1+\varrho} = ak + 1 + \varrho = m + a,$$

und somit allgemein

$$\nu_m = m + \left[\frac{m-1}{k-1}\right]. \tag{2.1}$$

Insbesondere ist natürlich $\nu_1 = 1$ bei jedem k.

II. Nun sei ε eine primitive k-te Einheitswurzel und seien $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, s_{\nu_3}, \ldots$ Unbestimmte über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen. Wir bilden von ihnen Polynome $w_1, w_2, w_3, \ldots$ rekurrent mittels der Formeln:

$$\left\{\begin{aligned}
&w_1 = s_1(1-\varepsilon),\\
&2w_2 = w_1 s_1(1-\varepsilon) + s_2(1-\varepsilon^2),\\
&3w_3 = w_2 s_1(1-\varepsilon) + w_1 s_2(1-\varepsilon^2) + s_3(1-\varepsilon^3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&m w_m = w_{m-1} s_1(1-\varepsilon) + w_{m-2} s_2(1-\varepsilon^2) + \cdots + w_1 s_{m-1}(1-\varepsilon^{m-1}) + s_m(1-\varepsilon^m),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

Hier kommen wirklich bloß die s mit den Indizes $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ vor und kein s mit einem andern, also durch k teilbaren Index, weil ja bei $s_{\alpha k}$ der Faktor $1-\varepsilon^{\alpha k}=0$ steht. Die so definierten w_m sind hiernach Polynome der $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, s_{\nu_3}, \ldots$, und offenbar ist w_m isobar vom Gewicht m, d.h., in jedem Glied ist die Summe der Indizes der vorkommenden s gleich m. Augenscheinlich enthält w_m das Glied $\frac{1}{m} \cdot s_m(1-\varepsilon^m)$, welches aber nur dann von Null verschieden ist, wenn m kein Multiplum von k ist. Wenn zur Abkürzung

$$s_\nu(1-\varepsilon^\nu)=\sigma_\nu \tag{2.3}$$

gesetzt wird, ist z.B.

$$\begin{cases} w_1=\sigma_1, \quad w_2=\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2), \quad w_3=\frac{1}{6}(\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2+2\sigma_3), \\ w_4=\frac{1}{24}(\sigma_1^4+6\sigma_1^2\sigma_2+8\sigma_1\sigma_3+3\sigma_2^2+6\sigma_4). \end{cases} \tag{2.4}$$

Dabei ist natürlich

$$\sigma_k=0, \quad \sigma_{2k}=0, \quad \sigma_{3k}=0, \ldots. \tag{2.5}$$

Nun bilden wir für jede natürliche Zahl m die m-reihige Determinante W_m, deren r-te Zeile so aussieht:

$$w_{\nu_r}, w_{\nu_r-1}, w_{\nu_r-2}, w_{\nu_r-3}, \ldots,$$

wobei also die Indizes der w von ν_r angefangen der Reihe nach jeweils um 1 abnehmen und wobei nach w_1 (falls $\nu_r<m$) noch $1-\varepsilon^{\nu_r}$ kommen soll und danach (falls $\nu_r<m-1$) noch $m-1-\nu_r$ Nullen. Für $k=3$ ist z.B. $\nu_1=1$, $\nu_2=2$, $\nu_3=4$, $\nu_4=5$, $\nu_5=7$ und

$$W_1=w_1, \quad W_3=\begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 \\ w_4 & w_3 & w_2 \end{vmatrix}, \quad W_5=\begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon & & & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 & & \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^4 \\ w_5 & w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \\ w_7 & w_6 & w_5 & w_4 & w_3 \end{vmatrix},$$

wo die leeren Felder durch Nullen zu besetzen sind. W_m ist ein Polynom von $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{\nu_m}$, also mittelbar von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$, und zwar beidemal isobar vom Gewicht

$$G_m=\nu_1+(\nu_2-1)+(\nu_3-2)+(\nu_4-3)+\cdots+(\nu_m-m+1).$$

Wegen (2.1) ist dann

$$G_m=\left(1+\left[\frac{0}{k-1}\right]\right)+\left(1+\left[\frac{1}{k-1}\right]\right)+\left(1+\left[\frac{2}{k-1}\right]\right)+\cdots+\left(1+\left[\frac{m-1}{k-1}\right]\right).$$

Setzt man wieder $m-1=a(k-1)+\varrho$, wo $0\leq\varrho<k-1$, so ist also

$$\begin{aligned} G_m &= m+(k-1)\cdot 0+(k-1)\cdot 1+\cdots+(k-1)\cdot(a-1)+(\varrho+1)\cdot a \\ &= m+(k-1)\cdot\frac{a(a-1)}{2}+(m-a(k-1))\cdot a \\ &= m(a+1)-(k-1)\cdot\frac{a(a+1)}{2}, \end{aligned}$$

somit schließlich

$$G_m = m \cdot \left(\left[\frac{m-1}{k-1}\right]+1\right) - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m-1}{k-1}\right] \cdot \left(\left[\frac{m-1}{k-1}\right]+1\right) \cdot (k-1). \tag{2.6}$$

III. Es soll jetzt bewiesen werden, daß W_m ein nicht identisch verschwindendes und *absolut irreduzibles* Polynom von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$ ist. Für $W_1 = w_1 = s_1(1-\varepsilon)$ ist das klar. Nun hängt von den in der Determinante W_m vorkommenden w_λ nur das links unten stehende w_{ν_m} von s_{ν_m} ab, und zwar linear, indem es das Glied $\frac{1}{\nu_m} \cdot s_{\nu_m}(1-\varepsilon^{\nu_m})$ enthält; dieses ist von Null verschieden, weil ε eine *primitive* k-te Einheitswurzel und ν_m nicht durch k teilbar ist. Alle andern in W_m vorkommenden w_λ sind von s_{ν_m} unabhängig. Infolgedessen hat W_m die Gestalt

$$W_m = (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{\nu_m} s_{\nu_m}(1-\varepsilon^{\nu_m}) P_m + Q_m, \tag{2.7}$$

wo P_m und Q_m von s_{ν_m} frei sind und speziell P_m eine $(m-1)$-reihige Unterdeterminante ist. Diese reduziert sich für $m \leq k$ auf ihr Diagonalglied

$$\prod_{\lambda=1}^{m-1}(1-\varepsilon^\lambda),$$

das von Null verschieden ist, weil ε eine *primitive* k-te Einheitswurzel ist. Für $m \leq k$ tritt also s_{ν_m} in W_m nur linear mit einem konstanten von Null verschiedenen Koeffizienten auf und infolgedessen ist W_m absolut irreduzibel.

Für $m > k$ ist in den obersten $k-1$ Zeilen von P_m nur eine einzige von Null verschiedene Determinante enthalten und diese reduziert sich auf ihr Diagonalglied $\prod_{\lambda=1}^{k-1}(1-\varepsilon^\lambda)$. Daher ist

$$P_m = \prod_{\lambda=1}^{k-1}(1-\varepsilon^\lambda) \cdot D_m, \tag{2.8}$$

wo D_m eine $(m-k)$-reihige Dcterminante ist, deren r-te Zeile aus den Elementen

$$w_{\nu_{r+k-1}-k},\ w_{\nu_{r+k-1}-k-1},\ w_{\nu_{r+k-1}-k-2},\ w_{\nu_{r+k-1}-k-3}, \ldots$$

besteht, wobei nach w_1 (falls $\nu_{r+k-1}-k < m-k$) noch $1-\varepsilon^{\nu_{r+k-1}}$ kommt und dann nur noch Nullen. Vermöge (2.1) ist aber $\nu_{r+k-1}-k = \nu_r$, so daß das die Elemente

$$w_{\nu_r},\ w_{\nu_r-1},\ w_{\nu_r-2},\ w_{\nu_r-3}, \ldots$$

sind, und nach w_1 kommt

$$1-\varepsilon^{\nu_{r+k-1}} = 1-\varepsilon^{\nu_{r+k-1}-k} = 1-\varepsilon^{\nu_r}.$$

Infolgedessen ist D_m gerade die Determinante W_{m-k}, also

$$P_m = \prod_{\lambda=1}^{k-1}(1-\varepsilon^\lambda) \cdot W_{m-k}. \tag{2.9}$$

Somit ist W_m in bezug auf s_{ν_m} linear, und s_{ν_m} hat den Koeffizienten cW_{m-k}, wo c eine von Null verschiedene Konstante ist. Daher müßte, wenn W_m in zwei Faktoren zerfiele, der eine zugleich ein Teiler von W_{m-k} sein.

Nun können wir vollständige Induktion anwenden und annehmen, daß W_{m-k} bereits als absolut irreduzibel erkannt ist. Dann ergibt sich, daß W_m, falls reduzibel, durch W_{m-k} teilbar sein muß. Wir werden zeigen, daß letzteres nicht zutrifft, womit die Irreduzibilität von W_m bewiesen sein wird.

Nun enthält die Determinante W_m, wie sich durch Entwicklung nach den Unterdeterminanten der vorderen zwei Spalten ergibt, den Bestandteil

$$(2.10) \qquad (-1)^m \begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon \\ w_{\nu_m} & w_{\nu_m-1} \end{vmatrix} \frac{P_m}{1-\varepsilon}.$$

Dieser ist nach (2.9) durch W_{m-k} teilbar, und wir brauchen nur noch zu zeigen, daß der Restbestandteil nicht durch W_{m-k} teilbar ist. Zu dem Zweck prüfen wir, in welcher Weise s_{ν_m-1} in W_m vorkommt. Zunächst kommt s_{ν_m-1} in w_{ν_m} und in w_{ν_m-1}, also in dem uns nicht mehr interessierenden Bestandteil (2.10) vor. Außerdem kommt s_{ν_m-1} nur noch in w_{ν_m-1} vor, und zwar linear. Nun kommt aber, falls ν_m nicht von der Form $\alpha k+1$, also $\nu_{m-1}=\nu_m-1$ ist, w_{ν_m-1} in dem Restbestandteil von W_m nur linear vor, weil das Produkt $w_{\nu_m-1}\cdot w_{\nu_m-1}=w_{\nu_m-1}^2$ in W_m als Koeffizienten eine $(m-2)$-reihige Unterdeterminante hat, deren erste Zeile aus lauter Nullen besteht. Falls aber ν_m von der Form $\alpha k+1$, also $\nu_{m-1}=\alpha k-1=\nu_m-2$ ist, dann hat in W_m das Produkt

$$w_{\nu_m-1}\cdot(1-\varepsilon)\cdot w_{\nu_m-2}=w_{\nu_m-1}^2\cdot(1-\varepsilon),$$

wenn wir zunächst vom Fall $k=2$ absehen, als Koeffizienten eine $(m-3)$-reihige Unterdeterminante, deren erste Zeile aus lauter Nullen besteht[6]).

Es tritt also in jedem Fall (abgesehen vom Fall $k=2$) s_{ν_m-1} in W_m außer in dem Bestandteil (2.10) nur linear auf und hat in dem Restbestandteil augenscheinlich den Koeffizienten

$$(-1)^m\cdot\frac{1}{\nu_{m-1}}\cdot(1-\varepsilon^{\nu_m-1})\cdot P_m',$$

wo P_m' analog wie vorhin P_m die Gestalt

$$P_m'=\prod_{\lambda=1}^{k-1}(1-\varepsilon^\lambda)\cdot D_m'$$

hat, und es genügt, zu zeigen, daß D_m' nicht durch W_{m-k} teilbar ist. Dabei ist aber D_m' eine $(m-k)$-reihige Determinante, die sich von D_m nur durch ihre letzte Zeile unterscheidet, wo jetzt die Elemente

$$w_{\nu_m-k},\ w_{\nu_m-k-1},\ w_{\nu_m-k-2},\ \dots,\ w_{\nu_m-m+1}$$

stehen, oder, was dasselbe ist, die Elemente

$$w_{\nu_{m-k+1}},\ w_{\nu_{m-k+1}-1},\ w_{\nu_{m-k+1}-2},\ \dots,\ w_{\nu_{m-k+1}-(m-k-1)}.$$

[6]) Auch der Fall $m=k=3$ wäre hier auszuschließen. Aber der interessiert nicht, weil der Fall $m=k$ ja schon erledigt ist.

Daher ist D'_m linear in $s_{\nu_{m-k+1}}$, und der Koeffizient von $s_{\nu_{m-k+1}}$ ist,

falls $m \leqq 2k$: $\quad (-1)^{m-k-1} \cdot \frac{1}{\nu_{m-k+1}} \cdot (1-\varepsilon^{\nu_{m-k+1}}) \cdot \prod_{\lambda=1}^{m-k-1} (1-\varepsilon^{\lambda})$,

falls $m > 2k$: $\quad (-1)^{m-k-1} \cdot \frac{1}{\nu_{m-k+1}} \cdot (1-\varepsilon^{\nu_{m-k+1}}) \cdot \prod_{\lambda=1}^{k-1} (1-\varepsilon^{\lambda}) \cdot W_{m-2k}$,

also gewiß nicht durch W_{m-k} teilbar. Daher ist auch D'_m nicht durch W_{m-k} teilbar, w. z. b. w.

Es bleibt noch der Fall $k=2$ zu erledigen. Hier ist zunächst

$$W_2 = \begin{vmatrix} w_1 & 2 \\ w_3 & w_2 \end{vmatrix} = w_1 w_2 - 2w_3 = \frac{4}{3}(s_1^3 - s_3),$$

und das ist irreduzibel. Für $m > 2$ aber ist

$$W_m = \begin{vmatrix} w_1 & 2 & & \\ w_3 & w_2 & w_1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{2m-3} & w_{2m-4} & w_{2m-5} & w_{2m-6} \cdots w_{m-2} \\ w_{2m-1} & w_{2m-2} & w_{2m-3} & w_{2m-4} \cdots w_m \end{vmatrix}.$$

Daher tritt in W_m das Quadrat w_{2m-3}^2 auf und folglich auch das Quadrat s_{2m-3}^2. Wäre nun W_m durch $W_{m-k} = W_{m-2}$ teilbar, so müßte auch der Koeffizient von s_{2m-3}^2 durch W_{m-2} teilbar sein. Er ist aber, wie man sofort erkennt, für $m=3$ und $m=4$ eine von Null verschiedene Konstante und für $m>4$ bis auf einen von Null verschiedenen Zahlenfaktor gleich W_{m-4}, also gewiß nicht durch W_{m-2} teilbar.

§ 3. Ein Desideratum

Da ε als primitive k-te Einheitswurzel einer irreduzibeln Gleichung vom Grad $\varphi(k)$ genügt, läßt sich W_m in der Gestalt

$$W_m = U_{m0} + U_{m1}\varepsilon + U_{m2}\varepsilon^2 + \cdots + U_{mr}\varepsilon^r \qquad (r = \varphi(k) - 1) \tag{3.1}$$

schreiben, wo die $U_{m\nu}$ Polynome von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$ mit *rationalen* Koeffizienten sind. W_m hängt also insbesondere auch von ε ab und wird sich ändern, wenn man für ε eine andere primitive k-te Einheitswurzel wählt. Wir werden in § 4 sehen, daß die Gleichung $W_m = 0$ eine von ε ganz unabhängige Beziehung zwischen den $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$ zum Ausdruck bringt, woraus folgt, daß die obigen Polynome $U_{m0}, U_{m1}, \ldots, U_{mr}$ sich nur um rationale Zahlenfaktoren unterscheiden können, so daß es für W_m auch eine Darstellung in der Form

$$W_m = U_m \cdot f_m(\varepsilon) \tag{3.2}$$

gibt, wo U_m ein Polynom von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_m}$ mit rationalen Koeffizienten und $f_m(\varepsilon)$ eine Zahl aus dem Körper der k-ten Einheitswurzeln ist. Es ist mir aber nicht gelungen, W_m in diese (nicht nur vermutete, sondern sicher

existierende) Form überzuführen, und die Rechnung ist selbst für kleine Werte von k und m schon ziemlich mühsam. Man findet z. B.

$$\text{für } k=2\colon\ W_3=\begin{vmatrix} w_1 & 2 & \\ w_3 & w_2 & w_1 \\ w_5 & w_4 & w_3 \end{vmatrix}=\frac{8}{45}(s_1^6-5s_1^3s_3-5s_3^2+9s_1s_5),$$

$$\text{für } k=3\colon\ W_3=\begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 \\ w_4 & w_3 & w_2 \end{vmatrix}=\frac{3}{8}(s_1^4-2s_1^2s_2-s_2^2+2s_4)\cdot(1-\varepsilon),$$

$$\text{für } k>3\colon\ W_3=\begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 \\ w_3 & w_2 & w_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3)(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3).$$

Für $m<k$, in welchem Fall $\nu_r=r$ für $1\leq r\leq m$ ist, werden wir in § 4 ganz allgemein schließen können, daß

$$(3.3)\qquad W_m=\begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-1} & s_{m-2} & s_{m-3} & s_{m-4}\cdots s_1 & m-1 \\ s_m & s_{m-1} & s_{m-2} & s_{m-3}\cdots s_2 & s_1 \end{vmatrix}\cdot\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^m)}{m!}\qquad(\text{für } m<k)$$

ist. Doch ist es mir selbst in diesem Fall nicht gelungen, die Determinante W_m durch irgendwelche Umformungen in die neue Gestalt überzuführen.

§ 4. Potenzsummen

I. Wir spezialisieren jetzt die s_ν zu den Potenzsummen von n Unbestimmten $x_1,\ldots,x_n$, deren symmetrische Grundfunktionen wir mit $a_1,\ldots,a_n$ bezeichnen. Dann gelten die Formeln (1.1) und (1.2), und wenn wir das Polynom in (1.1) zur Abkürzung mit $F(t)$ bezeichnen, ergibt sich durch logarithmische Ableitung die formale Potenzreihenentwicklung

$$(4.1)\qquad \frac{F'(t)}{F(t)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{-x_\nu}{1-x_\nu t}=-(s_1+s_2t+s_3t^2+s_4t^3+\cdots).$$

Setzt man, unter ε wieder eine primitive k-te Einheitswurzel verstehend,

$$(4.2)\qquad \frac{F(\varepsilon t)}{F(t)}=1+w_1t+w_2t^2+w_3t^3+\cdots,$$

so erhält man durch logarithmische Ableitung die Formel

$$(4.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{w_1+2w_2t+3w_3t^2+\cdots}{1+w_1t+w_2t^2+w_3t^3+\cdots}=\dfrac{\varepsilon F'(\varepsilon t)}{F(\varepsilon t)}-\dfrac{F'(t)}{F(t)} \\ \qquad=s_1(1-\varepsilon)+s_2(1-\varepsilon^2)t+s_3(1-\varepsilon^3)t^2+s_4(1-\varepsilon^4)t^3+\cdots \end{cases}$$

Indem man hier mit dem Nenner heraufmultipliziert und gleiche Potenzen von t beiderseits vergleicht, erhält man das Formelsystem (2.2) und erkennt so, daß die durch (4.2) definierten w_λ gerade diejenigen Polynome der s_ν sind, die schon in § 2 so bezeichnet wurden. Insbesondere kommen also nur diejenigen s vor, deren Index nicht durch k teilbar ist, also $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, s_{\nu_3}, \ldots$.

Nun folgt aus (4.2), indem man mit dem Nenner heraufmultipliziert und speziell die Koeffizienten von t^{ν_r} links und rechts einander gleich setzt,

$$(4.4) \qquad w_{\nu_r} + a_1 w_{\nu_r - 1} + a_2 w_{\nu_r - 2} + \cdots + a_{\nu_r - 1} w_1 + a_{\nu_r}(1 - \varepsilon^{\nu_r}) = 0,$$

wobei diejenigen a_ν, deren Index größer als n ist, durch 0 zu ersetzen sind. Schreibt man diese Gleichung für $r = 1, 2, \ldots, n$ hin, so hat man ein lineares Gleichungssystem für $a_1, a_2, \ldots, a_n$, aus dem sich diese Größen, also die symmetrischen Grundfunktionen von $x_1, \ldots, x_n$, sofort als Determinantenquotienten ergeben. Der gemeinsame Nenner ist dabei gerade die zum Element $w_{\nu_{n+1}}$ gehörige Unterdeterminante von W_{n+1}, also nach den Feststellungen des § 2 (mit m an Stelle von $n+1$) im Fall $n+1 \leq k$ eine Konstante und im Fall $n+1 > k$ bis auf einen konstanten Faktor gleich W_{n+1-k} und somit unabhängig von

$$s_{\nu_{n+1-k}}, \; s_{\nu_{n+1-k}}, \; \ldots, \; s_{\nu_n}.$$

Damit ist der Satz von VAHLEN *erneut bewiesen und zugleich eine formelmäßige Darstellung der $a_1, \ldots, a_n$ durch $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$ gewonnen.* Das Gewicht der Nennerdeterminante W_{n+1-k} (im Fall $n+1 > k$) ist nach § 2 gleich

$$G_{n+1-k} = (n+1-k) \cdot \left[\frac{n-1}{k-1}\right] - \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{n-1}{k-1}\right] - 1\right) \cdot \left[\frac{n-1}{k-1}\right] \cdot (k-1),$$

und wegen der Irreduzibilität von W_{n+1-k} *gibt es keine Darstellung mit einem gemeinsamen Nenner von kleinerem Gewicht.*

II. Schreibt man die Gl. (4.4) für $r = 1, 2, \ldots, n+1$ auf, so kann man aus diesen $n+1$ Gleichungen die Größen $a_1, \ldots, a_n$ eliminieren und erhält

$$W_{n+1} = 0.$$

Das ist nun die Abhängigkeit, die zwischen den $n+1$ Potenzsummen $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_{n+1}}$ besteht. Sie ist von der Höhe (dem Gewicht)

$$G_{n+1} = (n+1) \cdot \left(\left[\frac{n}{k-1}\right] + 1\right) - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{n}{k-1}\right] \cdot \left(\left[\frac{n}{k-1}\right] + 1\right) \cdot (k-1),$$

und wegen der Irreduzibilität von W_{n+1} gibt es keine Abhängigkeit von kleinerer Höhe. Insbesondere für $k = 2$ kommt die Höhe

$$(n+1)(n+1) - \tfrac{1}{2} n (n+1) = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

in Übereinstimmung mit meiner oben zitierten Arbeit. Dort konnte ich übrigens a priori zeigen, daß eine Abhängigkeit von kleinerer Höhe nicht existiert, und daraus die Irreduzibilität von W_m folgern. Für $k > 2$ ist mir ein analoger a-priori-Beweis nicht gelungen. Sobald er gelingt, wird der ganze Irreduzibilitätsbeweis des § 2 entbehrlich.

III. Wenn zwischen irgendwelchen Polynomen mit rationalen Koeffizienten eine Abhängigkeit besteht, so besteht gewiß auch eine mit rationalen Koeffizienten[7]). Insbesondere muß also die irreduzible Abhängigkeit zwischen $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_{n+1}}$ rationale Koeffizienten haben. Da diese Abhängigkeit aber durch die Gleichung $W_{n+1}=0$ gegeben ist, in der die k-te Einheitswurzel ε auftritt, so ergibt sich, daß das Polynom W_{n+1} die in § 3 (mit m an Stelle von $n+1$) angegebene Eigenschaft hat. Ebenso muß sich in den für $a_1, \ldots, a_n$ gefundenen Determinantenquotienten ein gemeinsamer dem Körper der k-ten Einheitswurzeln angehöriger Faktor wegheben, so daß sich eine Darstellung mit rationalen Koeffizienten ergibt, die ich aber formelmäßig nicht allgemein angeben kann.

Wenn speziell $n+1<k$, also $\nu_\tau=\tau$ für $\tau=1, 2, \ldots, n+1$ ist, so folgt aus den Newtonschen Formeln

$$\begin{aligned}
&s_1 \quad + a_1 = 0,\\
&s_2 \quad + a_1 s_1 \quad + 2a_2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&s_n \quad + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + a_{n-1} s_1 + n a_n = 0,\\
&s_{n+1} + a_1 s_n \quad + a_2 s_{n-1} + \cdots + a_{n-1} s_2 + a_n s_1 = 0
\end{aligned}$$

durch Elimination der a_ν:

$$\begin{vmatrix}
s_1 & 1 & & & \\
s_2 & s_1 & 2 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \cdots & s_1 \quad n \\
s_{n+1} & s_n & s_{n-1} & \cdots & s_2 \quad s_1
\end{vmatrix} = 0. \tag{4.5}$$

Das ist also jetzt die offenbar irreduzible (weil in bezug auf s_{n+1} linear) Abhängigkeit zwischen $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$. Anderseits ist diese Abhängigkeit auch die folgende:

$$W_{n+1} = \begin{vmatrix}
w_1 & 1-\varepsilon & & & \\
w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
w_n & w_{n-1} & w_{n-2} & \cdots & 1-\varepsilon^n \\
w_{n+1} & w_n & w_{n-1} & \cdots & w_1
\end{vmatrix} = 0.$$

Daher kann sich W_{n+1} von der Determinante (4.5) nur um einen dem Körper der k-ten Einheitswurzeln angehörenden Zahlenfaktor unterscheiden, der sich ohne weiteres daraus ergibt, daß s_{n+1} in der Determinante (4.5) den Koeffizienten $(-1)^n \cdot n!$ und in W_{n+1} den Koeffizienten

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}(1-\varepsilon^{n+1}) \cdot \prod_{\lambda=1}^{n}(1-\varepsilon^\lambda)$$

[7]) Vgl. etwa mein Buch: Algebra, Bd. 1, Satz 60 (1. Aufl. S. 138, 2. und 3. Aufl. S. 134).

hat. Schreibt man m an Stelle von $n+1$, so erhält man die Formel (3.3), die sich wohl nicht leicht durch irgendwelche Umformungen der Determinanten gewinnen läßt.

§ 5. Das Gleichungssystem $x_1^{\nu_r} + \cdots + x_n^{\nu_r} = s_{\nu_r}$

I. Wir verstehen unter $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$ jetzt n Unbestimmte über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen und betrachten das Gleichungssystem

$$x_1^{\nu_r} + x_2^{\nu_r} + \cdots + x_n^{\nu_r} = s_{\nu_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.1}$$

Die Anzahl der Lösungen ist nach dem BÉZOUTschen Satz entweder gleich dem Produkt $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \cdots \cdot \nu_n$ oder unendlich. Nun sind die symmetrischen Grundfunktionen $a_1, \ldots, a_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ nach dem Bewiesenen durch die s_{ν_r} eindeutig bestimmt. Bezeichnet man dann die Wurzeln der Gleichung

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{5.2}$$

mit $\xi_1, \ldots, \xi_n$, so hat das System (5.1) offenbar die $n!$ Lösungen

$$x_1 = \xi_{\mu_1}, \quad x_2 = \xi_{\mu_2}, \ldots, x_n = \xi_{\mu_n},$$

wobei mit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ die $n!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet sind. Diese Lösungen sind *einfach*; denn die Funktionaldeterminante ist bis auf einen nicht verschwindenden Zahlenfaktor gleich

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{\nu_1-1} & \xi_2^{\nu_1-1} & \ldots & \xi_n^{\nu_1-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^{\nu_n-1} & \xi_2^{\nu_n-1} & \ldots & \xi_n^{\nu_n-1} \end{vmatrix}, \tag{5.3}$$

also von Null verschieden, weil z. B. das Diagonalglied sich gegen kein anderes weghebt[8]).

Beim BÉZOUTschen Satz müssen aber auch die Lösungen „im Unendlichen" mitgezählt werden, d. h. die Lösungen des homogenen Systems

$$x_1^{\nu_r} + x_2^{\nu_r} + \cdots + x_n^{\nu_r} = s_{\nu_r} x_0^{\nu_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

mit $x_0 = 0$, also die nicht trivialen Lösungen des Systems

$$x_1^{\nu_r} + x_2^{\nu_r} + \cdots + x_n^{\nu_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei sind nun vier Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: $n < k$. Hier ist $\nu_r = r$, also handelt es sich um das System

$$x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Die NEWTONschen Formeln lehren jetzt, daß die symmetrischen Grundfunktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sämtlich verschwinden. Man hat also nur die triviale Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, und somit keine Lösungen „im Unend-

[8]) Die $a_1, \ldots, a_n$ und ebenso die $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sind ja ebenfalls Unbestimmte über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen. Von den drei Körpern $\mathfrak{R}(\mathfrak{k}, s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{k}, a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{k}, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ sind die ersten beiden dieselben und der dritte ist ein Oberkörper $(n!)$-ten Grades darüber.

lichen". In der Tat ist ja auch die Anzahl $n!$ der bereits angegebenen Lösungen jetzt gleich $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \cdots \cdot \nu_n$, also gleich der Gesamtanzahl *aller* Lösungen.

Zweiter Fall: $k \leqq n < 2k-1$. Jetzt handelt es sich um das System

$$x_1^r + \cdots + x_n^r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, n+1).$$

Die NEWTONschen Formeln lehren diesmal, daß die Gleichung mit den Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ diese ist:

$$t^n + 0 \cdot t^{n-1} + \cdots + 0 \cdot t^{n-k+1} + a_k \cdot t^{n-k} + 0 \cdot t^{n-k-1} + \cdots + 0 \cdot t + 0 = 0.$$

Man hat also, wenn $a_k = -\varrho^k$ gesetzt wird, die Lösung

$$x_1 = \varrho,\ x_2 = \varepsilon\varrho, \ldots, x_k = \varepsilon^{k-1}\varrho,$$
$$x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0 \qquad (\text{falls } n > k)$$

mit willkürlichem ϱ und alle daraus durch Permutation hervorgehenden. Das sind $\binom{n}{k} \cdot (k-1)!$ verschiedene Lösungen[9]). Aus Symmetriegründen hat jede die gleiche Vielfachheit v und aus dem BÉZOUTschen Satz folgt dann

$$n! + v \cdot \binom{n}{k} \cdot (k-1)! = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \cdots \cdot \nu_n = \frac{(n+1)!}{k},$$

und hieraus

$$v = (n+1-k)!.$$

Dritter Fall: $n = 2k-1$. Jetzt handelt es sich um das System

$$x_1^r + \cdots + x_n^r = 0 \qquad (r = 1, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, 2k-1,\ 2k+1).$$

Die Gleichung mit den Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ ist wieder dieselbe wie im zweiten Fall, und auch die Lösungen sind dieselben; ihre Anzahl ist dementsprechend $\binom{2k-1}{k} \cdot (k-1)!$. Für ihre Vielfachheit v hat man aber diesmal

$$(2k-1)! + v \cdot \binom{2k-1}{k} \cdot (k-1)! = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \cdots \cdot \nu_n = \frac{(2k+1)!}{k \cdot 2k},$$

und daraus folgt

$$v = (k-1)!\,(k+1).$$

Vierter Fall: $n \geqq 2k$. Jetzt gibt es unendlich viele Lösungen, z.B.

$$x_1 = \varrho,\ x_2 = \varepsilon\varrho, \ \ldots, \ x_k = \varepsilon^{k-1}\varrho,$$
$$x_{k+1} = \sigma,\ x_{k+2} = \varepsilon\sigma, \ \ldots, \ x_{2k} = \varepsilon^{k-1}\sigma,$$
$$x_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu > 2k$$

mit willkürlichem ϱ, σ.

II. Wenn die $s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n}$ keine Unbestimmten, sondern irgendwie spezialisiert sind, so ändert sich an der angegebenen Anzahl und Vielfachheit der

[9]) Nicht etwa $\binom{n}{k} \cdot k!$, weil durch *zyklische* Vertauschung der nicht verschwindenden x_ν nur eine proportionale, also *dieselbe* Lösung entsteht.

Lösungen nichts, so lange die bei der Berechnung der a_ν auftretende Nennerdeterminante W_{n+1-k} von Null verschieden bleibt und auch die Determinante (5.3) nicht verschwindet. Wenn aber letztere verschwindet, also insbesondere, wenn die Gl. (5.2) mehrfache Wurzeln hat, ändern sich die Vielfachheiten. Wenn W_{n+1-k} verschwindet und es verschwinden nicht gleichzeitig alle n-reihigen Determinanten der Matrix, die zu dem aus (4.4) für $r=1, 2, \ldots, n$ entstehenden linearen Gleichungssystem für die a_ν gehört, so gibt es keine solchen a_ν. Das Gleichungssystem (5.1) hat also dann keine Lösung im Endlichen. Wenn aber alle diese Determinanten verschwinden, so gibt es unendlich viele Möglichkeiten für die a_ν, so daß unser System jetzt schon im Endlichen unendlich viele Lösungen hat.

Beispiel. $k=2$, $n=3$ (vgl. dazu den Schluß meiner zitierten Arbeit):

$$x_1 + x_2 + x_3 = c,$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = c^3,$$
$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = s_5.$$

Für $s_5 \neq c^5$ gibt es keine zugehörigen a_ν, also keine Lösung im Endlichen. Wohl aber gibt es im Unendlichen, wie man leicht sieht, die Lösung

$$x_1 = \varrho,\ x_2 = -\varrho,\ x_3 = 0$$

und die durch Permutation daraus hervorgehenden, aber keine weiteren. Das sind drei verschiedene Lösungen, die aus Symmetriegründen die gleiche Vielfachheit v haben müssen; und zwar ist nach dem BÉZOUTschen Satz $3v = 1 \cdot 3 \cdot 5$, also $v=5$. Ist aber $s_5 = c^5$, so gibt es schon im Endlichen unendlich viele Lösungen, z. B.

$$x_1 = c,\ x_2 = \varrho,\ x_3 = -\varrho$$

mit willkürlichem ϱ.

München 27, Friedrich-Herschel-Str. 11

(Eingegangen am 23. September 1955)

WEIER, J.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 115—122 (1956)

Über Zerlegung eindimensionaler Nullstellengebilde

Von
JOSEF WEIER

Sind V eine r-dimensionale offene Vollkugel in dem r-dimensionalen Euklidischen Raum R^r, $r>1$, und $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ ganze Zahlen mit $\zeta=\sum\zeta_i$, ferner a ein Punkt in V und f eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^r, a die einzige Nullstelle von f und der Index von a bei f gleich ζ, so gibt es eine stetige Abbildung f' von $\overline{V}$ in den R^r mit den Eigenschaften: für $p\in\overline{V}-V$ ist $f(p)=f'(p)$; die Abbildung f' hat nur endlich viele Nullstellen, und diese lassen sich derart mit $a_1, \ldots, a_m$ bezeichnen, daß für $i=1, \ldots, m$ der Index von a_i bei f' gleich ζ_i ist. Diese Zerlegbarkeitseigenschaft von Nullstellen soll in der vorliegenden Arbeit folgenden allgemeineren Satz, die Zerlegung eindimensionaler singulärer Gebilde betreffend, liefern.

Es seien: P eine r-dimensionale endliche Euklidische Mannigfaltigkeit, $r>1$, in dem n-dimensionalen Euklidischen Raum R^n; weiter a^τ, $0\leq\tau\leq1$, von τ stetig abhängende Punkte aus P; und A die aus den Punkten (a^τ, τ) des R^{n+1} mit $0<\tau<1$ bestehende Menge; $(f^\tau, 0\leq\tau\leq1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von P in sich; U eine A enthaltende offene Menge des R^{n+1}, so daß jeder Punkt (p, τ) aus U, für den $p=f^\tau(p)$ ist, in der Menge A liegt; ε eine positive Zahl; und $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ ganze Zahlen mit $\zeta=\sum\zeta_i$; ferner der Punkt a^τ für $0<\tau<1$ Fixpunkt mit dem Index ζ von f^τ.

Hierauf gibt es für $i=1, \ldots, m$ von τ stetig abhängende Punkte a_i^τ, $0\leq\tau\leq1$, aus P und eine Schar $(g^\tau, 0\leq\tau\leq1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich, über die gilt: für $i=1, \ldots, m$ ist $a_i^0=a^0$ und $a_i^1=a^1$; für alle (i, τ) mit $i=1, \ldots, m$ und $0<\tau<1$ liegt (a_i^τ, τ) in U; für $0<\tau<1$ sind die Punkte $a_1^\tau, \ldots, a_m^\tau$ paarweis verschieden; für $(p, \tau)\notin U$ ist $f^\tau(p)=g^\tau(p)$; für $(p, \tau)\in\overline{U}$ ist die Entfernung $\varrho\left(f^\tau(p), g^\tau(p)\right)$ der Punkte $f^\tau(p)$ und $g^\tau(p)$ kleiner als ε; ist (p, τ) ein Punkt aus U mit $p=g^\tau(p)$, so kommt (p, τ) unter den Punkten $(a_1^\tau, \tau), \ldots, (a_m^\tau, \tau)$ vor; für alle (i, τ) mit $i=1, \ldots, m$ und $0<\tau<1$ ist der Punkt a_i^τ Fixpunkt von g^τ und der Index von a_i^τ bei g^τ gleich ζ_i.

Einige Bemerkungen in Abschnitt 1 dienen dem Zweck, eine in Abschnitt 3 bewiesene Verschärfung des vorstehenden Satzes vorzubereiten. Abschnitt 2 enthält einen Hilfssatz, der in Abschnitt 3 Anwendung findet.

1. Der Zylinder über einer Mannigfaltigkeit

Bedeutet $p=(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ einen Punkt des R^n, $n>0$, und τ irgendeine Zahl, so bezeichnen wir den Punkt $(\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau)$ des R^{n+1} auch mit (p, τ). Bis zum Schluß der Arbeit bezeichne P wie in der Einleitung eine r-dimensionale endliche Euklidische Mannigfaltigkeit, $r>1$, im R^n. Ist dann Q die

Menge der Punkte (p, τ) des R^{n+1} mit $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$, also der zu $[0, 1]$ gehörige Zylinder über P und F eine stetige Abbildung von Q in P, so heißt F eine Abbildungsschar. Mit $f^\tau(p) = F(p, \tau)$, $p \in P$, ist $F = (f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$.

Es sei A die Menge aller Punkte (p, τ) von Q mit $p = f^\tau(p)$. Wir wollen im folgenden annehmen, A sei ein endliches homogen eindimensionales Polyeder und für $0 \leq \tau \leq 1$ habe f^τ höchstens endlich viele Fixpunkte. Diese Annahme wird durch folgenden Satz, den ich an anderer Stelle beweisen werde, gerechtfertigt. Sind F_1 eine stetige Abbildung von Q in P und ε eine positive Zahl, so gibt es eine stetige Abbildung $F_2 = (f_2^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von Q in P mit $\varrho(F_1, F_2) < \varepsilon$ und den Eigenschaften: die Menge aller Punkte (p, τ) von Q, in denen $p = F_2(p, \tau)$, ist entweder leer oder ein endliches homogen eindimensionales Polyeder; für $0 \leq \tau \leq 1$ hat f_2^τ höchstens endlich viele Fixpunkte.

Sind α_0, α_1 Zahlen mit $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 \leq 1$ und a^τ, $\alpha_0 \leq \tau \leq \alpha_1$, von τ stetig abhängende Punkte aus P, so wollen wir die Menge A_{01}, die sich aus den Punkten (a^τ, τ) des R^{n+1} mit $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ zusammensetzt, auch mit $(a^\tau, a_0 < \tau < \alpha_1)$ bezeichnen und sie eine eindimensionale „*Singularität*" von F nennen, wenn gilt: die Menge A_{01} ist in A gelegen und in A offen; sind β_0, β_1 Zahlen mit $0 \leq \beta_0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 \leq \beta_1 \leq 1$ und b^τ, $\beta_0 \leq \tau \leq \beta_1$, von τ stetig abhängende Punkte aus P, weiter B die Menge $(b^\tau, \beta_0 < \tau < \beta_1)$, schließlich $A_{01} \subset B \subset A$ und B in A offen, so ist $A_{01} = B$.

An anderer Stelle werde ich zeigen: sind $A_1, \ldots, A_m$ die Singularitäten von F, so ist $\sum A_i = A$ und $A_j \cdot A_k = 0$ für $j \neq k$; es existiert eine ganze Zahl ζ, der „*Grad*" von A_{01}, derart, daß für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ die Zahl ζ der Index von a^τ bei f^τ ist. Dann wird in Abschnitt 3 bewiesen, daß jede Singularität von F die in der Einleitung erklärte Zerlegungseigenschaft besitzt. Die Abbildungsschar F bezeichnen wir als „*endlich*". Eine offene Menge $> A_{01}$ des R^{n+1} heiße eine „*Umgebung*" von A_{01}.

2. Ein Hilfssatz

Sind V eine offene r-dimensionale Vollkugel im R^r, $r > 0$, und a^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, von τ stetig abhängende Punkte von V, ferner $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^r, so bestätigt man leicht: wenn für $0 \leq \tau \leq 1$ der Punkt a^τ der einzige Fixpunkt von f^τ und ζ der Index von a^0 bei f^0, so ist für $0 \leq \tau \leq 1$ der Index von a^τ bei f^τ gleich ζ. Diese Bemerkung sei dem folgenden Hilfssatz voraufgeschickt.

Hilfssatz. *Es seien U, U' und V offene r-dimensionale Vollkugeln im R^r, $r > 1$, mit $\overline{U} \subset V$; f eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^r mit nur endlich vielen Fixpunkten $q_1, \ldots, q_m$ und ζ_i für $i = 1, \ldots, m$ der Index von q_i bei f. Ferner sei $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^r mit den Eigenschaften: für $p \in \overline{V} - V$ ist $f^0(p) = f(p)$, in den (p, τ) mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist $p \neq f^\tau(p)$, für $p \in \overline{V} - U$ ist $p \neq f^1(p)$, es ist $f^1(\overline{U}) \subset U'$.*

Dann existieren Kurven $(q_i^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, von Punkten q_i^τ aus V und eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in den R^r, so daß gilt: $g^0 = f$; in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist $g^\tau(p) = f^\tau(p)$; für

$0 \leq \tau \leq 1$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von g^τ; für alle (i, τ) mit $i = 1, \ldots, m$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist ζ_i der Index von q_i^τ bei g^τ; $g^1(p) = f^1(p)$ für $p \in \overline{V} - U$ und $g^1(\overline{U}) < U'$.

Beweis. Bedeutet W eine offene r-dimensionale Vollkugel mit $q_i \in W$, $i = 1, \ldots, m$, und $\overline{U} < W$ sowie $\overline{W} < V$, so gibt es zunächst, wie man leicht bestätigt, eine für alle (p, τ) mit $p \in \overline{W}$ und $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$ erklärte stetige Abbildung F in den R^r und Kurven $(q_i^\tau, 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2})$, $i = 1, \ldots, m$, von Punkten q_i^τ aus W mit den Eigenschaften: für $p \in \overline{W}$ ist $F(p, 0) = f(p)$; für $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von F^τ, falls F^τ die durch $F^\tau(p) = F(p, \tau)$, $p \in \overline{W}$, bestimmte Abbildung von $\overline{W}$ in den R^r bedeutet; der Index von q_i^τ bei F^τ ist ζ_i; die Punkte $q_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, q_m^{\frac{1}{2}}$ liegen in U.

Es sei nun $g^0(p) = f(p)$ für $p \in \overline{V}$. In den (p, τ) mit $p \in \overline{W}$ und $0 < \tau \leq \frac{1}{2}$ sei $g^\tau(p) = F(p, \tau)$. Es sei $g^\tau(p) = f^\tau(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V} - V$ und $0 < \tau \leq 1$ oder $p \in \overline{V} - U$ und $\tau = 1$.

Die Menge aller Punkte (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V} - W$ und $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$ oder $p \in \overline{V} - U$ und $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$ ist, werde mit B bezeichnet; mit A die Menge aller (p, τ), in denen der Punkt $g^\tau(p)$ bereits erklärt ist. Dann existiert, wie man leicht bestätigt, eine stetige Abbildung w von B auf $A \cdot B$ derart, daß $w(p, \tau) = (p, \tau)$ für alle Punkte (p, τ) aus $A \cdot B$. Und es ist $p_1 \neq g^{\tau_1}(p_1)$ in allen Punkten (p, τ) aus B, falls (p_1, τ_1) den Punkt $w(p, \tau)$ bedeutet.

Setzen wir $g^\tau(p) = p + \left(g^{\tau_1}(p_1) - p_1\right)$ in den Punkten (p, τ) aus B, wobei wieder (p_1, τ_1) den Punkt $w(p, \tau)$ bezeichnet, so ist $p \neq g^\tau(p)$ in allen (p, τ) aus B. Verbleibt, $g^\tau(p)$ auf der Menge C aller (p, τ) mit $p \in U$ und $\frac{1}{2} < \tau \leq 1$ zu definieren.

Zunächst gibt es eine stetige Abbildung G von $\overline{C}$ in den R^r mit den Eigenschaften: für alle Punkte (p, τ) aus $(A + B) \cdot \overline{C}$ ist $G(p, \tau) = g^\tau(p)$; bedeutet G^τ für $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$ die durch $G^\tau(p) = G(p, \tau)$, $p \in \overline{U}$, bestimmte Abbildung von $\overline{U}$ in den R^r, so sind die Punkte $q_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, q_m^{\frac{1}{2}}$ die Fixpunkte von G^τ.

Wegen $G(p, 1) \in U'$, $p \in \overline{U} - U$, gibt es eine stetige Abbildung λ von $\overline{U}$ in $(0, 1]$, über die gilt: für $p \in \overline{U} - U$ ist $\lambda(p) = 1$, für $p \in U$ ist

$$(*) \qquad p + \lambda(p)\left(G(p, 1) - p\right) \in U'.$$

Somit existiert weiter eine stetige Abbildung μ von $\overline{C}$ in $(0, 1]$ mit den Eigenschaften: für $p \in \overline{U}$ ist $\mu(p, 1) = \lambda(p)$, für $(p, \tau) \in (A + B) \cdot \overline{C}$ ist $\mu(p, \tau) = 1$. Mit

$$g^\tau(p) = p + \mu(p, \tau)\left(G(p, \tau) - p\right),$$

$(p, \tau) \in \overline{C}$, ist dann $g^1(p) = p + \lambda(p)\left(G(p, 1) - p\right)$ für $p \in \overline{U}$, nach $(*)$ also $g^1(\overline{U}) < U'$. Wegen $\mu(p, \tau) > 0$, $(p, \tau) \in \overline{C}$, sind für $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$ die Punkte $q_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, q_m^{\frac{1}{2}}$ die Fixpunkte von g^τ auf U. Setzen wir daher noch $q_i^\tau = q_i^{\frac{1}{2}}$ in allen (i, τ) mit $i = 1, \ldots, m$ und $\frac{1}{2} < \tau \leq 1$, so ist der Hilfssatz bewiesen.

3. Zerlegung von Singularitäten

Sind F eine endliche Abbildungsschar in P und A eine Singularität von F, so existiert, wie man sich leicht überlegt, eine offene Menge U im R^{n+1} derart, daß $A < U$ und $B \cdot \overline{U} = 0$ für jede Singularität $B \neq A$ von F. Ist

$A=(a^\tau, \alpha_0<\tau<\alpha_1)$, so gibt es weiter zu jeder Zahl τ aus dem Intervall (α_0, α_1) eine offene Menge U_0^τ im R^n und eine positive Zahl ε^τ derart, daß mit $U^\tau = P \cdot U_0^\tau$ gilt: die Menge aller Punkte (p, σ), für die $p \in U_0^\tau$ und $|\sigma-\tau|<\varepsilon^\tau$ ist, liegt in U; für alle Zahlen σ aus (α_0, α_1) mit $|\sigma-\tau|<\varepsilon^\tau$ ist der Punkt a^σ in U^τ gelegen und der einzige Fixpunkt von f^σ auf $\overline{U}^\tau$. Dann wollen wir zeigen:

Zerlegungssatz. *Es seien F eine endliche Abbildungsschar in P; A eine Singularität von F und U eine Umgebung von A derart, daß jede Singularität $\neq A$ von F zu $\overline{U}$ fremd ist; ferner ζ der Grad von A bei F und $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ ganze Zahlen mit $\zeta=\sum \zeta_i$; und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine endliche Abbildungsschar F' in P mit den folgenden Eigenschaften* I *bis* III.

I. *Für alle $(p, \tau) \notin U$ ist $F(p, \tau)=F'(p, \tau)$. Die Entfernung $\varrho(F, F')$ ist $<\varepsilon$.*

II. *Jede Singularität von F' ist entweder zu $\overline{U}$ fremd oder in U gelegen.*

III. *Die in U liegenden Singularitäten von F' lassen sich derart mit $A_i=(a_i^\tau, \alpha_{i0}<\tau<\alpha_{i1})$, $i=1, \ldots, m$, bezeichnen, daß, wenn $A=(a^\tau, \alpha_0<\tau<\alpha_1)$, gilt: für $i=1, \ldots, m$ ist $\alpha_{i0}=\alpha_0$ und $\alpha_{i1}=\alpha_1$; für τ gegen α_k ist $\lim a_i^\tau = \lim a^\tau$, wobei $i=1, \ldots, m$ und $k=0, 1$; für $i=1, \ldots, m$ ist der Grad von A_i bei F' gleich ζ_i.*

Beweis. Ist M eine Menge in einem Euklidischen Raum, so bezeichne $\Delta(M)$ ihren Durchmesser. Dann seien $F=(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$, α eine Zahl aus (α_0, α_1) und S, T in P offene Mengen mit den Eigenschaften: die Menge aller (p, α) mit $p \in \overline{S}$ liegt in U; der Durchmesser $\Delta(T)$ von T ist $<\varepsilon$; es ist $a^\alpha \in S$ der einzige Fixpunkt von f^α auf $\overline{S}$ und $\overline{S}+f^\alpha(\overline{S}) \subset T$; es existiert eine topologische Abbildung t von T auf den R^r, die S in eine offene r-dimensionale Vollkugel des R^r überführt.

Dann gibt es, wie schon in der Einleitung bemerkt, eine stetige Abbildung f von $\overline{S}$ in T mit $f(p)=f^\alpha(p)$, $p \in \overline{S}-S$, und der Eigenschaft: man kann die Fixpunkte von f auf S derart $a_1, \ldots, a_m$ nennen, daß für $i=1, \ldots, m$ der Index von a_i bei f gleich ζ_i ist.

Weiter existieren, einer einfachen Überlegung zufolge, in P offene Mengen Y_i, Z_i sowie Zahlen γ_i, $i=0, 1, \ldots$, mit $S=Y_0$, $T=Z_0$,

$$(1) \qquad \Delta(Z_i)<\varepsilon, \quad \lim \Delta(Z_i)=0, \quad \alpha=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots, \quad \lim \gamma_i=\alpha_1$$

und den weiteren Eigenschaften: die Menge aller (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_i$ und $\gamma_i \leq \tau \leq \gamma_{i+1}$ liegt in U; für $\gamma_i \leq \tau \leq \gamma_{i+1}$ ist $a^\tau \in Y_i$ der einzige Fixpunkt der Abbildung f^τ auf $\overline{Y}_i$ und

$$(2) \qquad \overline{Y}_i + f^\tau(\overline{Y}_i) \subset Z_i;$$

es existiert eine topologische Abbildung t_i von Z_i auf den R^r, die Y_i in eine offene r-dimensionale Vollkugel des R^r überführt.

Es sei j eine der Zahlen $0, 1, \ldots$; ferner h eine stetige Abbildung von $\overline{Y}_j$ in Z_j mit

$$(3) \qquad h(p)=f^{\gamma_j}(p), \quad p \in \overline{Y}_j - Y_j,$$

und der Eigenschaft: man kann die Fixpunkte von h derart mit $q_1, \ldots, q_m$ bezeichnen, daß für $i = 1, \ldots, m$ der Index von q_i bei h gleich ζ_i ist.

Für $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$ sei $f^\tau_{j0} = f^\tau | \overline{Y}_j$. Dann ist

$$p \neq f^\tau_{j0}(p) \tag{4}$$

in allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_j - Y_j$ und $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$.

Die Mengen X_j und X'_j bestimmen wir wie folgt. Da der Punkt $a^{\gamma_{j+1}}$ in $Y_j \cdot Y_{j+1}$ liegt und Fixpunkt der Abbildung $f^{\gamma_{j+1}}$ ist, existieren Teilmengen X_j und X'_j von $Y_j \cdot Y_{j+1}$ mit den Eigenschaften: $t_j(X_j)$ und $t_j(X'_j)$ sind offene r-dimensionale Vollkugeln im R^r, ferner ist $a^{\gamma_{j+1}} \in X_j \subset X'_j$ und

$$p \neq f^{\gamma_{j+1}}(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y}_j - X_j, \quad f^{\gamma_{j+1}}(\overline{X}_j) \subset X'_j. \tag{5}$$

Hierauf gibt es wegen (3), (4), (5) und dem obigen Hilfssatz eine Schar $(h^\tau, \gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1})$ stetiger Abbildungen h^τ von $\overline{Y}_j$ in Z_j sowie Kurven $(q^\tau_i, \gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1})$, $i = 1, \ldots, m$, von Punkten q^τ_i aus Y_j mit den Eigenschaften I_j und II_j.

I_j. Es ist $h^{\gamma_j} = h$. In allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{Y}_j - Y_j$ und $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$ oder $p \in \overline{Y}_j - X_j$ und $\tau = \gamma_{j+1}$ ist $h^\tau(p) = f^\tau(p)$; $h^{\gamma_{j+1}}(\overline{X}_j)$ liegt in X'_j.

II_j. Für $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$ sind die Punkte $q^\tau_1, \ldots, q^\tau_m$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von h^τ, ihre Indexe beziehungsweise $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

Aus $h^\tau(\overline{Y}_j) + f^\tau(\overline{Y}_j) \subset Z_j$, $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$, folgt:

III_j. Es ist $\varrho(h^\tau(p), f^\tau(p)) < \Delta(Z_j)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_j$ und $\gamma_j \leq \tau \leq \gamma_{j+1}$.

Bezeichnet h' die durch $h'(p) = f^{\gamma_{j+1}}(p)$, $p \in \overline{Y}_{j+1} - X_j$, und $h'(p) = h^{\gamma_{j+1}}(p)$, $p \in \overline{X}_j$, bestimmte Abbildung von $\overline{Y}_{j+1}$ in P, so gilt, wie wir zeigen wollen:

IV_j. Die Abbildung h' ist stetig. Es liegt $h'(\overline{Y}_{j+1})$ in Z_{j+1}. Die Punkte $q^{\gamma_{j+1}}_i$, $i = 1, \ldots, m$, sind die Fixpunkte von h'; die Indexe dieser Fixpunkte sind bzw. gleich $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

Beweis von IV_j. Zum Nachweis der Stetigkeit von h' genügt es zu zeigen, daß $f^{\gamma_{j+1}}(p) = h^{\gamma_{j+1}}(p)$ für $p \in \overline{X}_j - X_j$. Das folgt aber aus I_j und $X_j \subset Y_j$. — Es ist $h'(\overline{Y}_{j+1}) = h'(\overline{Y}_{j+1} - X_j) + h'(X_j) \subset f^{\gamma_{j+1}}(\overline{Y}_{j+1}) + h^{\gamma_{j+1}}(X_j)$, wegen (2) und I_j also $h'(\overline{Y}_{j+1}) \subset Z_{j+1} + X'_j$, wegen $X'_j \subset Y_{j+1} \subset Z_{j+1}$ daher $h'(\overline{Y}_{j+1}) \subset Z_{j+1}$, wie behauptet. — Da $a^{\gamma_{j+1}}$ in X_j liegt, h' auf $\overline{Y}_{j+1} - X_j$ mit $f^{\gamma_{j+1}}$ übereinstimmt und $a^{\gamma_{j+1}}$ der einzige Fixpunkt von $f^{\gamma_{j+1}}$ auf $\overline{Y}_{j+1}$ ist, hat h' auf $\overline{Y}_{j+1} - X_j$ keinen Fixpunkt. Auf X_j stimmen h' und $h^{\gamma_{j+1}}$ überein. Daher folgt der dritte Teil von IV_j aus $X_j \subset Y_j$ sowie $h^{\gamma_{j+1}}(p) = f^{\gamma_{j+1}}(p) \neq p$, $p \in \overline{Y}_j - X_j$, und II_j.

Aus I_j bis IV_j und der Erklärung von f, Y_i, Z_i, γ_i ergibt sich nun leicht folgendes.

Es existieren in P offene Mengen X_i, $i = 0, 1, \ldots$, mit $X_i \subset Y_i \cdot Y_{i+1}$ und Kurven $(c^\tau_k, \alpha \leq \tau < \alpha_1)$, $k = 1, \ldots, m$, von Punkten c^τ_k aus P sowie für

$i=0, 1, \ldots$ eine Schar $(h_i^\tau,\ \gamma_i \leq \tau \leq \gamma_{i+1})$ stetiger Abbildungen h_i^τ von $\overline{Y}_i$ in Z_i mit I_{1i} bis IV_{1i} und den weiteren Eigenschaften:

$$c_k^\tau \in Y_i \tag{6}$$

in allen (i, k, τ) mit $i=0, 1, \ldots, k=1, \ldots, m$ und $\gamma_i \leq \tau \leq \gamma_{i+1}$; es ist $c_k^\alpha = a_k$ für $k=1, \ldots, m$ und $h_0^\alpha = f$.

I_{1i}. In allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{Y}_i - Y_i$ und $\gamma_i \leq \tau \leq \gamma_{i+1}$ oder $p \in \overline{Y}_i - X_i$ und $\tau = \gamma_{i+1}$, ist $h_i^\tau(p) = f^\tau(p)$.

II_{1i}. Für $\gamma_i \leq \tau \leq \gamma_{i+1}$ sind die Punkte $c_1^\tau, \ldots, c_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von h_i^τ; ihre Indexe bei h_i^τ sind bzw. $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

III_{1i}. Es ist $\varrho\left(h_i^\tau(p), f^\tau(p)\right) < \Delta(Z_i)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_i$ und $\gamma_i \leq \tau \leq \gamma_{i+1}$.

IV_{1i}. Es ist $h_{i+1}^{\gamma_{i+1}}(p) = f^{\gamma_{i+1}}(p)$ für $p \in \overline{Y}_{i+1} - X_i$ und $h_{i+1}^{\gamma_{i+1}}(p) = h_i^{\gamma_{i+1}}(p)$ für $p \in \overline{X}_i$.

Eine bezüglich α_0 angestellte Überlegung, die fast wörtlich wie die oben bezüglich α_1 durchgeführte verläuft, zeigt folgendes.

Es gibt in P offene Mengen U_i, V_i, W_i sowie Zahlen β_i, $i=0, 1, \ldots$, mit $S=V_0$, $T=W_0$, $U_i \subset V_i \cdot V_{i+1}$,

$$\Delta(W_i) < \varepsilon, \quad \lim \Delta(W_i) = 0, \quad \cdots < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0 = \alpha, \quad \lim \beta_i = \alpha_0 \tag{1'}$$

und den weiteren Eigenschaften: die Menge aller (p, τ) mit $p \in \overline{V}_i$ und $\beta_{i+1} \leq \tau \leq \beta_i$ liegt in U; für $\beta_{i+1} \leq \tau \leq \beta_i$ ist $a^\tau \in V_i$ der einzige Fixpunkt f^τ auf $\overline{V}_i$ und

$$\overline{V}_i + f^\tau(\overline{V}_i) \subset W_i. \tag{2'}$$

Ferner gibt es Kurven $(b_k^\tau, \alpha_0 < \tau \leq \alpha)$, $k=1, \ldots, m$, von Punkten b_k^τ aus P sowie für $i=0, 1, \ldots$ eine Schar $(g_i^\tau,\ \beta_{i+1} \leq \tau \leq \beta_i)$ stetiger Abbildungen g_i^τ von $\overline{V}_i$ in W_i mit I_{0i} bis IV_{0i} und den weiteren Eigenschaften:

$$b_k^\tau \in V_i \tag{6'}$$

in allen (i, k, τ) mit $i=0, 1, \ldots, k=1, \ldots, m$ und $\beta_{i+1} \leq \tau \leq \beta_i$; es ist $b_k^\alpha = a_k$ für $k=1, \ldots, m$ und $g_0^\alpha = f$.

I_{0i}. In allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V}_i - V_i$ und $\beta_{i+1} \leq \tau \leq \beta_i$ oder $p \in \overline{V}_i - U_i$ und $\tau = \beta_{i+1}$, ist $g_i^\tau(p) = f^\tau(p)$.

II_{0i}. Für $\beta_{i+1} \leq \tau \leq \beta_i$ sind die Punkte $b_1^\tau, \ldots, b_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von g_i^τ, ihre Indexe beziehungsweise $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

III_{0i}. Es ist $\varrho\left(g_i^\tau(p), f^\tau(p)\right) < \Delta(W_i)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V}_i$ und $\beta_{i+1} \leq \tau \leq \beta_i$.

IV_{0i}. Es ist $g_{i+1}^{\beta_{i+1}}(p) = f^{\beta_{i+1}}(p)$ für $p \in \overline{V}_{i+1} - U_i$ und $g_{i+1}^{\beta_{i+1}}(p) = g_i^{\beta_{i+1}}(p)$ für $p \in \overline{U}_i$.

Sei nun τ eine Zahl aus $[0, 1]$. Ist *erstens* τ zu (α_0, α_1) fremd, so bezeichne f_1^τ die Abbildung f^τ. *Zweitens* liege τ in $(\alpha_0, \alpha]$. Dann existiert insonderheit eine Zahl i mit in $(\beta_{i+1}, \beta_i]$ gelegenem τ. Hier sei f_1^τ die durch $f_1^\tau | \overline{V}_i = g_i^\tau$

und $f_1^\tau|(P-V_i)=f^\tau|(P-V_i)$ bestimmte Abbildung. *Drittens* liege τ in (α,α_1). Dann gibt es im besonderen eine Zahl k, so daß τ in $[\gamma_k,\gamma_{k+1})$ liegt. Hier sei $f_1^\tau|\overline{Y}_k=h_k^\tau$ und $f_1^\tau|(P-Y_k)=f^\tau|(P-Y_k)$. In allen (p,τ) mit $p\in P$ und $0\leq\tau\leq 1$ nennen wir den Punkt $f_1^\tau(p)$ auch $F'(p,\tau)$. Dann ist F' eine eindeutige Abbildung.

Zum Beweis, daß die Abbildung F' stetig, bedeute c einen Punkt aus P und γ eine Zahl aus $[0,1]$. *Erstens* möge γ zu $[\alpha_0,\alpha_1]$ fremd sein. Dann folgt die Stetigkeit von F' in (c,γ) aus derjenigen von F in (c,γ). Liegt *zweitens* γ in einem (γ_i,γ_{i+1}), so folgt die Stetigkeit von F' in (c,γ) leicht aus I_{1i}. *Drittens* sei j eine der Zahlen $0,1,\ldots$ und $\gamma=\gamma_{j+1}$. Für $\gamma_j\leq\tau\leq\gamma_{j+1}$ bedeute dann h_-^τ die durch

$$h_-^\tau|\overline{Y}_j=h_j^\tau \quad \text{und} \quad h_-^\tau|(P-Y_j)=f^\tau|(P-Y_j) \tag{7}$$

bestimmte Abbildung von P in sich, ferner h_+^τ für $\gamma_{i+1}\leq\tau\leq\gamma_{i+2}$ die durch

$$h_+^\tau|\overline{Y}_{j+1}=h_{j+1}^\tau \quad \text{und} \quad h_+^\tau|(P-Y_{j+1})=f^\tau|(P-Y_{j+1}) \tag{8}$$

bestimmte Abbildung von P in sich. Zum Beweis, daß F' in (c,γ) stetig ist, genügt es zu zeigen, daß $f_1^\tau=h_-^\tau$ für $\gamma_j<\tau\leq\gamma_{j+1}$, $f_1^\tau=h_+^\tau$ für $\gamma_{j+1}<\tau<\gamma_{j+2}$ und $h_-^\tau=h_+^\tau$ für $\tau=\gamma_{j+1}$. Wegen der Erklärung von f_1^τ, h_-^τ, h_+^τ verbleibt daher nur der Nachweis, daß $h_-^\tau=h_+^\tau$ für $\tau=\gamma_{j+1}$. Auf $P-(Y_j+Y_{j+1})$ stimmen Abbildungen $h_-^{\gamma_{j+1}}$ und $h_+^{\gamma_{j+1}}$ überein. Nun sei p ein Punkt aus $(Y_j+Y_{j+1})-X_j$; dann ist $h_-^{\gamma_{j+1}}(p)=f^{\gamma_{j+1}}(p)$ wegen I_{1j} und $h_+^{\gamma_{j+1}}(p)=f^{\gamma_{j+1}}(p)$ wegen IV_{1j}. Für $p\in X_j$ ist $h_-^{\gamma_{j+1}}(p)=h_+^{\gamma_{j+1}}(p)$ wegen IV_{1j}.

Ist *viertens* c von dem Punkt $\lim a^\tau$, τ gegen α_1, verschieden und $\gamma=\alpha_1$, so gibt es eine Umgebung von (c,γ) derart, daß für jeden Punkt (p,τ) dieser Umgebung $F'(p,\tau)=F(p,\tau)$ ist.

Es sei *fünftens* $c=\lim a^\tau$, τ gegen α_1, und $\gamma=\alpha_1$. Dann ist $f_1^\gamma=f^\gamma$, wegen $c=f^\gamma(c)$ also $F'(c,\gamma)=c$. Zum Beweis, daß F' in (c,γ) stetig ist, genügt also, wenn δ eine positive Zahl bezeichnet, der Nachweis der Existenz einer positiven Zahl δ_1 derart, daß

$$\varrho\big(c,F'(p,\tau)\big)<\delta \tag{9}$$

für alle (p,τ) mit $\varrho\big((c,\gamma),(p,\tau)\big)<\delta_1$. Die Existenz einer solchen Zahl ergibt sich wie folgt. Da F stetig, existiert eine positive Zahl δ_0 der Eigenschaft, daß $\varrho\big(c,F(p,\tau)\big)<\delta/2$ in allen (p,τ) mit $\varrho\big((c,\gamma),(p,\tau)\big)<\delta_0$. Wegen $\lim\Delta(Z_i)=0$ gibt es eine natürliche Zahl j, so daß $\Delta(Z_i)<\delta/2$ für alle $i>j$. Hierauf seien δ_1 eine Zahl mit $0<\delta_1<\delta_0$, so daß $|\alpha_1-\tau|<\alpha_1-\gamma_j$ für alle (p,τ) mit $\varrho\big((c,\gamma),(p,\tau)\big)<\delta_1$; und (b,β) ein Punkt (p,τ) der letzteren Art. Dann ist

$$\varrho\big(c,F(b,\beta)\big)<\delta/2, \tag{10}$$

im Falle $F'(b,\beta)=F(b,\beta)$ also (9) richtig. Ist $F'(b,\beta)\neq F(b,\beta)$, so gibt es eine natürliche Zahl $l\geq j$ derart, daß $\beta\in[\gamma_l,\gamma_{l+1})$ und $b\in Y_l$ sowie $F'(b,\beta)=h_l^\beta(b)$. Nach III_{1l} ist $\varrho\big(h_l^\beta(b),F(b,\beta)\big)<\Delta(Z_l)<\delta/2$, daher (9) gleichfalls richtig. Alle Fälle, die von den bisher aufgezählten verschieden sind, erledigen sich wie diese. Damit ist die Stetigkeit von F' nachgewiesen.

Wenn $(\mathfrak{p}, \tau)$ ein Punkt $\notin U$, so befindet sich unter den Zahlen $i = 0, 1, \ldots$ keine derart, daß entweder $\mathfrak{p} \in \overline{V}_i$ und $\beta_{i+1} \leq \tau \leq \beta_i$ oder $\mathfrak{p} \in \overline{V}_i$ und $\gamma_i \leq \tau \leq \gamma_{i+1}$. Mithin ist $F'(\mathfrak{p}, \tau) = F(\mathfrak{p}, \tau)$ für $(\mathfrak{p}, \tau) \notin U$. Aus $\Delta(W_i) < \varepsilon$ und $\Delta(Z_i) < \varepsilon$, $i = 0, 1, \ldots$, folgt leicht, daß $\varrho(F, F') < \varepsilon$. Die übrigen von F' verlangten Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Erklärung von F'.

Zum Zerlegungssatz, der damit bewiesen ist, sei noch folgendes bemerkt. — Die Voraussetzung, P stelle eine endliche Euklidische Mannigfaltigkeit eine Dimension > 1 dar, läßt sich durch die schwächere ersetzen, es sei P ein endliches Euklidisches Polyeder, das in jedem seiner Punkte lokal eindimensional zusammenhängt. — Der Zerlegungssatz gestattet eine Umkehrung: *Es seien* $A_i = (a_i^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$, $i = 1, \ldots, m$, *Singularitäten der endlichen Abbildungsschar* F *derart, daß* $\lim a_i^\tau = \lim a_1^\tau$ *für* τ *gegen* α_k $(i = 2, \ldots, m, k = 0, 1)$ *ist; und* U *eine Umgebung von* $\sum A_i$ *so beschaffen, daß jede Singularität* $\neq A_1, \ldots, A_m$ *von* F *zu* $\overline{U}$ *fremd ist; ferner* $\varrho(\mathfrak{p}, F(\mathfrak{p}, \tau))$ *in allen Punkten* $(\mathfrak{p}, \tau)$ *aus* $\overline{U}$ *hinreichend klein. Dann kann man die* A_i *auf eine Singularität zusammenziehen.* Näherhin existiert eine endliche Abbildungsschar G mit den Eigenschaften: für alle $(\mathfrak{p}, \tau) \notin U$ ist $G(\mathfrak{p}, \tau) = F(\mathfrak{p}, \tau)$; jede Singularität von G ist entweder zu $\overline{U}$ fremd oder in U gelegen; in U liegt genau eine Singularität von G, und diese kann man derart mit $A = (a^\tau, \beta_0 < \tau < \beta_1)$ bezeichnen, daß $\alpha_0 = \beta_0$ und $\alpha_1 = \beta_1$ sowie $\lim a^\tau = \lim a_1^\tau$, τ gegen α_0 und α_1. — Natürlich gilt der Zerlegungssatz mit Umkehrung auch, wenn die eindimensionale Singularität statt von einer einzelnen Abbildung durch ein Abbildungspaar bestimmt wird.

Fulda, Marienstr. 9

(Eingegangen am 17. Dezember 1954)

ZELLER, K.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 123—130 (1956)

Über den perfekten Teil von Wirkfeldern

Von

KARL ZELLER

1. Einleitung

Wir betrachten Limitierungsverfahren der Form $\lim_n \sum_k a_{nk} x_k$ und verwenden Definitionen, Bezeichnungen und Ergebnisse einer früheren Arbeit des Verfassers [1951], die mit AELV zitiert wird. Das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ eines solchen Verfahrens läßt sich in natürlicher Weise als F-Raum („FK-Raum") auffassen. Ist A permanent oder konvergenztreu, enthält also $\mathfrak{A}$ die Menge $\mathfrak{S}_C$ der konvergenten Folgen, so interessiert die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{S}}_C$ von $\mathfrak{S}_C$ in $\mathfrak{A}$ (im Sinne der genannten F-Topologie). Ist $\overline{\mathfrak{S}}_C = \mathfrak{A}$, so heißt A perfekt. Dementsprechend nennen wir $\overline{\mathfrak{S}}_C$ auch den perfekten Teil des Wirkfeldes und verwenden für $\overline{\mathfrak{S}}_C$ auch die Bezeichnung $\mathfrak{A}_P$, wenn die Abhängigkeit von $\overline{\mathfrak{S}}_C$ von $\mathfrak{A}$ betont werden soll. Perfekte Verfahren haben besonders angenehme Eigenschaften, vor allem in bezug auf Vergleichs- und Verträglichkeitssätze. Entsprechende Eigenschaften besitzt der perfekte Teil des Wirkfeldes. Es erhebt sich daher die Frage, ob und wie man diesen Teil absondern kann. In dieser Richtung beweisen wir folgendes allgemeine Ergebnis:

Satz. *Zu jedem permanenten Matrixverfahren A gibt es ein permanentes Matrixverfahren B, dessen Wirkfeld der perfekte Teil von $\mathfrak{A}$ ist.*

B ist dann übrigens perfekt und mit A verträglich. Beim Beweis (im zweiten Abschnitt) verwenden wir unter anderem einen Gedanken von J. D. HILL. Der Beweis zeigt auch, daß man bei zeilenfinitem A die Matrix B zeilenfinit wählen kann.

Wir kommen dann im dritten Abschnitt auf Beispiele zu sprechen, in denen schon die Abtrennung des perfekten Teils gelungen ist oder bei denen der perfekte Teil gewisse ausgezeichnete Eigenschaften besitzt. Und zwar behandeln wir: Einfolgenverfahren, HUNTEMANN-Verfahren, Vergleichssätze mit Nebenbedingungen, Vergleich stetiger und unstetiger Verfahren desselben Typs, Indexverschiebung, MERCER-Sätze. Aus den Beispielen geht auch hervor, daß der perfekte Teil eine komplizierte Struktur haben kann, so daß unser Satz sicher nicht trivial ist.

Für diese Arbeit erhielt ich wertvolle Anregungen auf der Limitierungstagung in Oberwolfach (März 1955). Besonders bin ich Herrn D. GAIER und Herrn H. SALZMANN zu Dank verpflichtet.

2. Beweis des Satzes

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß A keine leeren Spalten hat. Das Nullwirkfeld $\mathfrak{A}_0$ (die Menge der zu Null limitierten Folgen) ist dann ein FK-Raum mit den Halbnormen

$$p_{-1}(\xi) = \sup_{m=0,1,..} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} x_k \right|, \qquad p_n(\xi) = \sup_{l=0,1,..} \left| \sum_{k=0}^{l} a_{nk} x_k \right| \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

(AELV, Satz 5.1).

Für jedes feste $m = -1, 0, \ldots$ fassen wir ferner $\mathfrak{A}_0$ als normierten Raum $\mathfrak{A}_0^m$ mit der Norm $p_{-1}(\xi) + \cdots + p_m(\xi)$ auf. Es stört dabei nicht, daß in gewissen Fällen diese Norm auch für andere Elemente als das Nullelement verschwindet. $\mathfrak{D}^m$ sei die Menge der $\xi \in \mathfrak{A}_0$, die in $\mathfrak{A}_0^m$ nicht Berührpunkt von $\mathfrak{S}_N$ (Menge der Nullfolgen) sind. $\mathfrak{D}^m$ ist separabel, da $\mathfrak{A}_0$ bezüglich jeder Halbnorm p_i separabel ist. Es gibt also abzählbar viele Punkte $\xi_i \in \mathfrak{D}^m$, die in $\mathfrak{D}^m$ dicht liegen (im Sinne der genannten Norm). Wir wählen stetige Linearformen f_i in $\mathfrak{A}_0^m$ mit

$$|f_i(\xi)| \leq p_{-1}(\xi) + \cdots + p_m(\xi) \qquad (\xi \in \mathfrak{A}_0^m),$$
$$f_i(\xi) = 0 \qquad (\xi \in \mathfrak{A}_0^m,\ \xi \notin \mathfrak{D}^m),$$
$$f_i(\xi_i) = \text{Abstand von } \xi_i \text{ zu } \mathfrak{S}_N \text{ in } \mathfrak{A}_0^m.$$

Aus den f_i bilden wir eine Folge g_j, in der jedes f_i und jedes $-f_i$ unendlich oft vorkommt. $\lim_j g_j(\xi)$ existiert genau dann, wenn $\xi (\in \mathfrak{A}_0)$ nicht zu $\mathfrak{D}^m$ gehört (vgl. HILL [1950]).

Dies führen wir für jedes m durch. Die so erhaltenen Linearformen ordnen wir zu einer Folge h_j an. Ist $\mathfrak{D}$ die Menge der ξ, die im F-Raum $\mathfrak{A}_0$ nicht Berührpunkt von $\mathfrak{S}_N$ sind ($\mathfrak{D}$ also das Komplement von $\overline{\mathfrak{S}}_N$), so gilt $\mathfrak{D} = \cup \mathfrak{D}^m$ (vgl. AELV, S. 469). Somit gilt folgendes:

$$h_j(\xi) = 0 \qquad (\xi \notin \mathfrak{D},\ \xi \in \mathfrak{A}_0,\ j = 0, 1, \ldots),$$
$$h_i(\xi) \text{ divergiert } (\xi \in \mathfrak{D}).$$

Jedes $h(\xi)$ gestattet eine Zerlegung (AELV, S. 468)

$$h(\xi) = h^{\wedge}(\xi) + h^{\vee}(\xi)$$

mit

$$|h^{\wedge}(\xi)| \leq p_{-1}(\xi), \qquad |h^{\vee}(\xi)| \leq p_0(\xi) + \cdots + p_m(\xi).$$

Nach AELV, S. 476, gelten Darstellungen

$$h^{\wedge}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n y_n \qquad \text{mit} \qquad \sum |\beta_n| \leq 1,$$

$$h^{\vee}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k.$$

Wegen $h(\xi) = 0$ für $\xi \notin \mathfrak{D}$ ist

$$\textstyle\sum_n \beta_n a_{nk} + \alpha_k = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

somit, da A beschränkte Zeilennormen, etwa $\leq K$ hat,

$$\sum |\alpha_k| \leq K.$$

Wir approximieren $h(\mathfrak{x})$ durch

$$C(\mathfrak{x}) = \sum_{n=0}^{m} \beta_n \gamma_n + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x_k,$$

wobei wir $m = m(j)$ so wählen, daß $h_j(\mathfrak{x}) - C_j(\mathfrak{x}) \to 0$ geht für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$. Aus dem Voranstehenden folgt

$$\sum |\gamma_k| \leq 2K.$$

Die Folge $C_j(\mathfrak{x})$ konvergiert nun für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{x} \notin \mathfrak{D}$, und divergiert für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$.

Die gesuchte Matrix B erhalten wir durch die Bedingungen

$$\mathfrak{b}_{2n} = \mathfrak{a}_n$$
$$\mathfrak{b}_{2n+1} = \mathfrak{c}_n + \Theta_n \mathfrak{a}_n,$$

wo $\mathfrak{a}_n$ bzw. $\mathfrak{b}_n$ die Zeilen von A bzw. B sind, und die Zeilen $\mathfrak{c}_n$ aus den Koeffizienten der Linearformen $C_n(\mathfrak{x})$ gebildet werden; ferner wählen wir dabei die Θ_n so, daß die Zeilensummen der Matrix B gegen Eins streben. Die Θ_n bilden eine beschränkte Zahlenfolge, weil die Zeilensummen von A gegen Eins streben und weil unabhängig von n für jede Linearform $C_n(\mathfrak{x})$ die Ungleichung $\sum |\gamma_k| \leq 2K$ gilt.

Man sieht: B limitiert die Folge $1, 1, \ldots$ zum Werte Eins (weil die Zeilensummen gegen Eins streben); B limitiert nur Folgen, die $\mathfrak{A}$ angehören (wegen der Zeilen $\mathfrak{a}_n$); ist $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{x} \notin \mathfrak{D}$, so wird $\mathfrak{x}$ limitiert zum Werte Null (weil dann $C_n(\mathfrak{x}) \to 0$ geht, und weil die Θ_n beschränkt sind, so daß der Beitrag von $\Theta_n \mathfrak{a}_n$ ebenso wie der von $\mathfrak{a}_n$ gegen Null geht); ist $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$, so wird $\mathfrak{x}$ nicht limitiert (da wieder der Beitrag von $\Theta_n \mathfrak{a}_n$ gegen Null geht, wogegen $C_n(\mathfrak{x})$ divergiert). Da jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N$ zwar $\mathfrak{A}_0$, aber nicht $\mathfrak{D}$ angehört, wird insbesondere jedes solche $\mathfrak{x}$ von B limitiert (zu Null). Aus diesen Bemerkungen liest man die Permanenz von B und die übrigen behaupteten Eigenschaften ab.

Als weiteres Ergebnis aus unserem Ideenkreis sei genannt: Es gibt ein konvergenzgleiches Matrixverfahren, das gewisse unbeschränkte Folgen in beschränkte transformiert. Dies widerlegt Vermutung 1 (d) aus WILANSKY-ZELLER [1955]. Der Beweis erfolgt am leichtesten mit Einfolgenverfahren, für Verallgemeinerungen zieht man die eben beschriebene Methode heran.

Vielleicht führt beim Beweis des Satzes auch die vom Verfasser [1953, S. 272–274], [1954, S. 345] angewandte Methode zum Ziel

Allgemeiner kann man fragen, welche separablen FK-Räume als Wirkfelder eines Matrixverfahrens dargestellt werden können. Dies ist noch nicht geklärt. Eine Einschränkung ergibt sich schon dadurch, daß der Dual eines Wirkfeldes separabel ist.

3. Beispiele

a) Einfolgenverfahren. Im Rahmen der Untersuchung des perfekten Teils eines Wirkfeldes, also der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{S}_C$ im F-Raum $\mathfrak{A}$, interessieren die beiden möglichen Extremfälle, nämlich $\overline{\mathfrak{S}}_C = \mathfrak{A}$ (perfektes Verfahren, s. oben) und $\overline{\mathfrak{S}}_C = \mathfrak{S}_C$. Letzteres tritt auch bei nicht konvergenzgleichen Verfahren, also bei $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{S}_C$, auf; die Abspaltung des perfekten Teiles ist dann trivial. Die einfachsten Beispiele werden gegeben durch die „Einfolgenverfahren", die im wesentlichen nur eine divergente Folge d_k limitieren, was genauer heißen soll, daß das Wirkfeld aus den Folgen der Form $a \cdot d_k +$ konvergente Folge besteht. (MAZUR [1928], DAREVSKY [1946]). Jedoch gibt es auch kompliziertere Verfahren mit $\overline{\mathfrak{S}}_C = \mathfrak{S}_C$, wie folgende Ergebnisse von WILANSKY-ZELLER [1955] zeigen:

Sind endlich viele Folgen gegeben, die über der Menge der beschränkten Folgen linear unabhängig sind, so existiert ein permanentes Verfahren, das im wesentlichen nur diese Folgen limitiert. Sind abzählbar viele Folgen mit derselben Unabhängigkeitseigenschaft gegeben, so existiert ein permanentes Verfahren, das diese Folgen, aber keine beschränkt-divergenten Folgen limitiert. Ein konvergenztreues Verfahren limitiert genau dann keine beschränkt-divergente Folge, wenn der perfekte Teil des Wirkfeldes gleich $\mathfrak{S}_C$ ist.

Das letztgenannte Ergebnis zeigt, daß die vorher konstruierten Verfahren minimalen perfekten Teil besitzen; außerdem ist es z. B. für den Beweis von Lückenumkehrsätzen wichtig. Das erste Resultat ermöglicht, Wirkfelder um wenige Folgen zu vergrößern, wobei der perfekte Teil ungeändert bleibt. Das zweite zeigt, daß der perfekte Teil von unendlichem Defekt im Wirkfeld sein kann. Allgemeiner kann auch bei Verfahren mit $\overline{\mathfrak{S}}_C \neq \mathfrak{S}_C$ der perfekte Teil unendlichen Defekt haben; und eben hier tritt die Hauptschwierigkeit bei der Abtrennung des perfekten Teils auf. Ist dieser hingegen von endlichem Defekt, so kann die Isolierung einfacher als im allgemeinen Satz durchgeführt werden.

Einfolgenverfahren gestatten die Aufstellung von „Gegenbeispielen" bei Fragen über Verträglichkeit, Vergleich, Indexverschiebung, Umkehrbedingungen usw. Einfache Beispiele von Einfolgenverfahren stellen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ b_1 & a_1 & \\ & b_2 & a_2 \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

mit $\lim(a_k + b_k) = 1$, $\overline{\lim}\,|a_k| < \underline{\lim}\,|b_k| < \infty$ dar; durch Produktbildung von n Matrizen erhält man „n-Folgenverfahren" (ZELLER [1950], [1953]). Dies leitet zu den HUNTEMANN-Verfahren über, bei denen solche Matrizen auftreten.

b) HUNTEMANN-*Verfahren.* So nennen wir die Verfahren, die den Matrizen der Form $b_{nk} = a_{n-k}$ $(k \leq n)$, $b_{nk} = 0$ sonst, zugeordnet sind. (HUNTEMANN [1938] und andere Autoren betrachten allerdings nur den Fall, daß fast

alle a_p verschwinden.) Wir stellen zunächst einige Grundeigenschaften dieser Verfahren zusammen (vgl. SILVERMAN-SZÁSZ [1944]).

Die HUNTEMANN-Verfahren bilden ein System vertauschbarer Matrizen, das ein gewisses Gegenstück zu dem der HAUSDORFF-Verfahren darstellt. Vertauschbarkeit mit der Summationsmatrix S ($n+1$ Einsen in der n-ten Zeile) bewirkt, daß *RR*- und *FF*-Form gleich sind, und daß absolute Permanenz gleichbedeutend mit gewöhnlicher Permanenz ist. Indexverschiebung ist ohne weiteres möglich. Jedem Verfahren wird die (unter Umständen formale) Potenzreihe $a(z)=\sum a_k z^k$ zugeordnet. Das Produkt zweier Matrizen entspricht dem CAUCHY-Produkt der Potenzreihen. Nullstellen und Singularitäten von $a(z)$ sind entscheidend für die Wirksamkeit des Verfahrens. Einer Funktion $a(z)=(z-z_0)$ entspricht ein Verfahren, das für $|z_0|<1$ Einfolgenverfahren, für $|z_0|>1$ konvergenzgleich, und für $|z_0|=1$ perfekt mit leicht zu überschauendem Wirkfeld ist.

Produkt- und Partialbruchzerlegung gestatten nun oft eine einfache Darstellung des Wirkfeldes und die Abspaltung des perfekten Teils. Für den Fall, daß $a(z)$ ein Polynom ohne Nullstellen vom Betrag Eins ist, erhält man ein „n-Folgenverfahren" (PETERSEN [1952]). Aber auch bei Polynomen mit Nullstellen auf dem Einheitskreis hat das Wirkfeld noch einen einfachen Aufbau, insbesondere kann man den perfekten Teil erhalten, indem man das zu dem Polynom mit den betreffenden Nullstellen vom Betrag Eins gehörige Verfahren bildet. Die Zerlegung geht teilweise auch für Nichtpolynome $a(z)$. Schwierigkeiten bereitet allerdings die Möglichkeit unendlich vieler Nullstellen im Einheitskreis, was auch bei permanenten Verfahren ($\sum|a_k|<\infty$, $\sum a_k=1$) vorkommen kann; man erhält dann wieder ein Verfahren, dessen perfekter Teil unendlichen Defekt besitzt. Überhaupt ist der Zusammenhang zwischen wesentlichen Singularitäten von $a(z)$ und dem Wirkfeld des Verfahrens noch nicht geklärt.

Noch einige Bemerkungen am Rande. Die von HUNTEMANN [1938] durchgeführte Summierung von Potenzreihen meromorpher Funktionen $f(z)$ läßt sich in diesem Zusammenhang auch leicht erklären: Soll etwa $f(z)$ im Punkte 1 summiert werden, so wählt man ein Polynom $a(z)$ mit $a(1)=1$, so daß $a(z)f(z)$ in $|z|\leq 1$ regulär ist. Das zu $a(z)$ gehörige Verfahren führt die gewünschte Summierung durch. — Allgemeiner kann man Verfahren der Form D_1HD_2 (D_i = Diagonalmatrizen, H = HUNTEMANN-Matrix) betrachten; damit gelangt man zu Anwendungen auf NÖRLUND-Verfahren, unter anderem zu naheliegenden Verallgemeinerungen des Vergleichssatzes von RIESZ [1923]. — So wie bei HUNTEMANN-Verfahren die Nullstellen von Polynomen wichtig sind, spielen bei anderen Verfahren die Nullstellen von LAPLACE-, FOURIER- oder MELLIN-Transformierten eine Rolle. — Man vergleiche auch die Untersuchungen über Summengleichungen, bei denen man ähnliche Ergebnisse wie die obigen für HUNTEMANN-Verfahren erhalten hat; s. etwa PAASCHE [1954].

c) Vergleichssätze mit Nebenbedingungen. Für manche Verfahren A und B sind Aussagen folgender Form bekannt: A und B sind gleich stark bezüglich

aller Folgen s_k mit $s_k = o(d_k)$. Die vorausgegangenen Resultate können die Vermutung erwecken, daß dann A und B im perfekten Teil übereinstimmen, wenn nur d_k genügend rasch wächst. Man erhält jedoch nur schwache Ergebnisse in dieser Richtung, etwa: Gilt für das Verfahren A die „beste Größenordnungsbedingung" $s_k = o(d_k)$ und stimmen A und B für $s_k = O(d_k)$ überein, so haben beide Wirkfelder denselben perfekten Teil. — Daß sich allgemein nicht mehr aussagen läßt, zeigen die verschieden starken perfekten Verfahren C_1 und ZC_1 (C_1 = CEÀSRO-Verfahren, Z = Zweierverfahren), die innerhalb der von C_1 gegebenen Größenordnung $s_k = o(k)$ gleich stark sind. — Die Frage nach besseren Aussagen unter Einschränkungen über die zugelassenen Matrizen bleibt offen.

Trotzdem wird man bei bekannten Vergleichssätzen mit Nebenbedingungen untersuchen, ob die betreffenden Verfahren denselben perfekten Teil haben. Dies führt uns zum Vergleich von stetigen und unstetigen Verfahren desselben Typs, bei denen ja oft Einschließungssätze des genannten Typs vorliegen.

d) Stetige und unstetige Verfahren. Die Wirkfelder von Matrixverfahren $a_{x\,k}$ mit stetigem Parameter x (etwa für $x \to \infty$) sind meistens auch FK-Räume, so daß in solchen Wirkfeldern (etwa beim RIESZ-, ABEL-, BOREL-Verfahren) der perfekte Teil ebenfalls erklärt ist. Varianten dieser Verfahren ergeben sich, wenn man x nicht stetig, sondern nur durch eine gewisse Folge x_n gegen den Grenzwert gehen läßt. Wir unterscheiden zwei Hauptfälle: Für eine genügend dichte Wahl der x_n sind das stetige und das unstetige Verfahren äquivalent; oder dies tritt für keine Folge $\{x_n\}$ ein.

Der erste Fall liegt z.B. bei den RIESZ-Mitteln $R(\lambda, p)$ vor und bietet den Vorteil, daß man nur noch gewöhnliche Matrixverfahren $a_{n\,k}$ (die man für verschiedene Wahl der x_n erhält) vergleichen muß, da das stetige Verfahren eben durch ein gewöhnliches dargestellt wird. Nähere Untersuchungen galten vor allem den Mitteln $R(n, p)$ mit $x_n = n$ (RIESZ [1923], AGNEW [1933], COOKE [1950]). Die Resultate beruhen großenteils darauf, daß man die Vermittlungsmatrix zwischen den C_p-Mitteln σ_n [C_p ist ja $R(n, p)$ äquivalent] und den unstetigen RIESZ-Mitteln („R_p^*-Mitteln") τ_n, also zwischen

$$\sigma_n = \binom{n+p}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+p}{n-k} u_k \quad \text{und} \quad \tau_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)^p u_k$$

fast ohne Rechnung bestimmen kann. Und zwar erhält man eine Matrix der Form DHD^*, wo die D Diagonalmatrizen sind und H ein HUNTEMANN-Verfahren ist, das für $p = 1, 2, 3, \ldots$ bzw. zu den Polynomen

$$1,\ 1+z,\ 1+4z+z^2,\ 1+11z+11z^2+z^3,\ 1+26z+66z^2+26z^3+z^4,$$
$$1+57z+302z^2+302z^3+57z^4+z^5, \text{ usw.}$$

gehört. Herr PEYERIMHOFF hat neuerdings die Nullstellen mehrerer solcher Polynome bestimmt und damit näheren Aufschluß über das Verhältnis von

C_p und R_p^* gewonnen (RIESZ beschränkte sich auf die Fälle $p=1, 2, 3$). Da die Koeffizienten dieser Polynome sich leicht explizit darstellen lassen, besteht die Hoffnung auf einen Überblick über die Nullstellen aller dieser Polynome. Soweit man bis jetzt sieht, stimmen der perfekte Teil von C_p und R_p^* für ungerades p überein, für gerades p nicht. Analog kann man andere Varianten der RIESZ-Mittel behandeln, z.B. die R_p^{**}-Mittel, die man erhält, indem man in der Summe für τ_n das letzte Glied ($k=n$) wegläßt. Man erhält die Polynome (für $p=1, 2, \ldots$)

$$2-z,\ 4-3z+z^2,\ 8-5z+4z^2-z^3,\ 16+z+11z^2-5z^3+z^4, \text{ usw.}$$

In den bisher bekannten Fällen sind R_p^{**} und C_p äquivalent, woraus sofort die Äquivalenz von R_p^* und C_p für $u_k=o(k^p)$ folgt. Letzteres kann man auch wie oben bei ZC_1 einsehen.

Im zweiten Hauptfall (s. oben), der z.B. beim BOREL-Verfahren eintritt, treten noch schwierigere Probleme auf. Ein erster Ansatzpunkt ist die Frage, ob eine Folge, die beim Grenzübergang $x_n\to\infty$ limitiert wird, dargestellt werden kann als Summe zweier Folgen, von denen die eine beim Grenzübergang $x\to\infty$ limitiert wird, während die Transformierte der andern in allen x_n verschwindet. Näheres über unstetige BOREL-Verfahren findet man bei GAIER [1955].

Die Untersuchung des BOREL-Verfahrens führt uns weiter zu Fragen der Indexverschiebung.

e) Indexverschiebung. Beim BOREL-Verfahren wurde festgestellt (GAIER [1954], ZELLER [1954]), daß die Folgen s_k mit $s_k=O(R^k)$ (R beliebig) Indexverschiebung gestatten und dem perfekten Teil angehören. Beim TAYLOR-Verfahren (MEYER-KÖNIG/ZELLER [1954]) wird der perfekte Teil von allen regulär summierbaren Folgen gebildet. Indexverschiebung ist nur bei gewissen singulär summierbaren Folgen (also Folgen, die nicht dem perfekten Teil angehören) nicht gestattet. Diese Folgen können überdies noch näher durch eine HUNTEMANN-Transformation charakterisiert werden (s. in der genannten Arbeit auf S. 350), die für $0<\alpha<1/2$ ein Einfolgenverfahren ist. Dies und die Resultate von AGRANOVIC [1954] deuten auf einen Zusammenhang zwischen Perfektheit und Indexverschiebung hin. Allerdings dürfte dieser Zusammenhang kein ganz einfacher sein, da es perfekte Verfahren gibt, die Indexverschiebung nicht allgemein gestatten.

f) Sonstiges. Bei MERCER-Sätzen mit Parameter (z.B. HARDY [1949], Satz 52) treten ebenfalls Einfolgenverfahren auf.

Zusammenfassend können wir feststellen: Wenn auch nichtperfekte Verfahren, insbesondere Einfolgenverfahren, für die Limitierung nicht besonders geeignet erscheinen, so stößt man doch bei allen möglichen Problemen auf solche Verfahren. Es lohnt sich daher, ihre Eigenschaften näher zu untersuchen und insbesondere den perfekten Teil des Wirkfeldes abzuspalten. Diese Abtrennung wird zwar allgemein durch unseren Satz geliefert. Für spezielle Verfahren müssen jedoch immer Einzeluntersuchungen durchgeführt

werden, sei es um die im Satz gebrauchten Linearformen zu bestimmen, sei es um die Abtrennung auf einfacherem Wege durchzuführen. Ist der perfekte Teil isoliert, so erhebt sich die Frage, ob er günstigere Eigenschaften (etwa bezüglich Indexverschiebung) als das ganze Wirkfeld hat. Besonders lohnend erscheint die Untersuchung der perfekten Teile zweier Verfahren, für die bereits ein Einschließungssatz mit Zusatzbedingungen bekannt ist; gelegentlich werden diese Verfahren denselben perfekten Teil besitzen.

Literatur

(F = Fortschritte der Mathematik, R = Mathematical Reviews, Z = Zentralblatt für Mathematik.)

AGNEW, R. P.: On RIESZ and CESÀRO methods of summability. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 532—548 (1933). F **59**, 971; Z **6**, 345. — AGRANOVIC, M. S.: On consistency of some methods of summation. Uspehy Matem. Nauk **9** (61), 242 (1954). — COOKE, R. G.: Infinite Matrices and Sequence Spaces. London 1950. 347 S. R **12**, 694; Z **40**, 25. — DAREVSKY, V.: On intrinsically perfect methods of summation. Bull. Acad. Sci. URSS., Sér. Math. **10**, 97—104 (1946). R **7**, 517. — GAIER, D.: Zur Frage der Indexverschiebung beim BOREL-Verfahren. Math. Z. **58**, 453—455 (1953). R **15**, 214; Z **50**, 284. — On modified BOREL methods. Proc. Amer. Math. Soc. **1955**. — HARDY, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. 396 S. R **11**, 25; Z **32**, 58. — HILL, J. D.: Summability methods weaker than convergence. Amer. J. Math. **72**, 621—623 (1950). R **12**, 20; Z **38**, 213. — HUNTEMANN, H.: Über den Wert der Reihenentwicklung meromorpher Funktionen bei linearen Summierungsverfahren. Dtsch. Math. **3**, 390—402 (1938). F **64**, 1003; Z **19**, 162. — MAZUR, S.: Über lineare Limitierungsverfahren. Math. Z. **28**, 599—611 (1928). F **54**, 235. — MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER: Über das TAYLORsche Summierungsverfahren. Math. Z. **60**, 348—352 (1954). R **16**, 28. — PAASCHE, I.: Über das Verhalten der Integrale homogener und inhomogener Summengleichungen im Unendlichen. München u. Düsseldorf 1954. 59 S. — PETERSEN, G. M.: A note on divergent series. Canad. J. Math. **4**, 445—454 (1952). R **14**, 368; Z **47**, 299. — RIESZ, M.: Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **22**, 412—419 (1923). F **50**, 154. — SILVERMAN, L. L., and O. SZÁSZ: On a class of Nörlund matrices. Ann. of Math. (2) **45**, 347—357 (1944). R **5**, 236. — WILANSKY, A., and K. ZELLER: Summability of bounded divergent sequences; topological methods. Trans. Amer. Math. Soc. **1955**. — ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Matrixtransformationen. Diss. Tübingen 1950. — Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951). R **12**, 604. — Merkwürdigkeiten bei Matrixverfahren; Einfolgenverfahren. Arch. Math. **4**, 1—5 (1953). R **14**, 866. — Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen. Math. Z. **59**, 271—277 (1953). R **15**, 618. — Matrixtransformationen von Folgenräumen. Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **12** (1953), 340—346 (1954). R **15**, 618.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 18. April 1955)

KARZEL, H.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 131—137 (1956)

Über eine Anordnungsbeziehung am Dreieck

Herrn E. SPERNER zum 50. Geburtstag am 9. Dezember 1955

Von

HELMUT KARZEL

Die von E. SPERNER [2][1]) eingeführten *Ordnungsfunktionen* haben sich in der Geometrie bei der Untersuchung von Anordnungsfragen als sehr nützlich erwiesen. Unter einer *Ordnungsfunktion* versteht man in einer ebenen Geometrie *jede eindeutige Funktion* $h(\alpha)$, *die jedem Elementepaar* α (= Punkt), h (= Gerade) *der Geometrie einen der Werte* $0, +1, -1$ *so zuordnet, daß der Wert* 0 *genau dann angenommen wird, wenn das betreffende Elementepaar inzidiert.* Wie SPERNER [2] gezeigt hat, entspricht *jeder* Ordnungsfunktion eine gemischte *Zwischen-* und *Trennbeziehung* der Geometrie[2]) und umgekehrt läßt sich jede Zwischen- und Trennbeziehung, sofern sie gewissen Bedingungen genügt, durch eine geeignete Ordnungsfunktion beschreiben. Ist jedoch $h(\alpha)$ eine beliebige Ordnungsfunktion, so weisen die durch sie erklärten Anordnungsbeziehungen noch wenige der von einer geometrischen Anordnung gewohnten Eigenschaften auf. So läßt sich mit einer beliebigen Ordnungsfunktion weder ein Zwischen- noch Trennbegriff für Punkte allein oder Geraden allein erklären. Dies ist erst dann gewährleistet, wenn die Ordnungsfunktion der sog. *Geradenrelation* genügt, d.h. der Forderung: *Sind* α, β, γ *drei beliebige voneinander verschiedene Punkte einer Geraden* k *und* g, h *zwei beliebige Geraden* $\neq k$, *die mit* γ *inzidieren, so soll stets* $g(\alpha)\, g(\beta)\, h(\alpha)\, h(\beta) = 1$ *gelten.* — Aus diesem Grunde gebraucht SPERNER fast ausschließlich Ordnungsfunktionen, die der Geradenrelation genügen.

Ist nun $h(\alpha)$ eine beliebige Ordnungsfunktion, die der Geradenrelation genügt, so läßt sich folgende Anordnungsaussage an jedem Dreieck machen: *Sind* α, β, γ *drei beliebige Punkte in allgemeiner Lage und* a, b, c *drei Geraden, so daß die Schnittpunkte* (a, b), (b, c), (a, c)[3]) *jeweils mit den Dreiecksseiten* (α, β), (β, γ), (α, γ) *inzidieren, ohne mit einem der Punkte* α, β, γ *zusammen-*

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Nummern des Literaturverzeichnisses auf S. 137.

[2]) Ist $h(\alpha)$ eine Ordnungsfunktion, so läßt sich nämlich erklären: Die Gerade h liegt genau dann *zwischen* den Punkten α, β, wenn $h(\alpha)\, h(\beta) = -1$ gilt, und der Punkt α liegt genau dann *zwischen* den Geraden g, h, wenn $g(\alpha)\, h(\alpha) = -1$ gilt. Zwei Geraden g, h und zwei Punkte α, β *trennen* sich, wenn $g(\alpha)\, g(\beta)\, h(\alpha)\, h(\beta) = -1$ gilt.

[3]) Sind $a \neq b$ zwei Geraden bzw. $\alpha \neq \beta$ zwei Punkte, so soll mit (a, b) stets der Schnittpunkt der Geraden a, b bzw. mit (α, β) die Verbindungsgerade der Punkte α, β bezeichnet werden.

zufallen (s. Fig. 1), *so gilt die folgende Relation:*

$$a(\beta)\, a(\gamma)\, b(\alpha)\, b(\gamma)\, c(\alpha)\, c(\beta) = 1,$$

die wir die *Dreiecksrelation* nennen wollen.

Diese Dreiecksrelation läßt sich aus folgenden Gleichungen, die auf Grund der Geradenrelation gelten, durch Multiplizieren sofort ausrechnen [man beachte hierbei, daß für nichtinzidente Elementepaare stets $(h(\alpha))^2 = 1$ ist]:

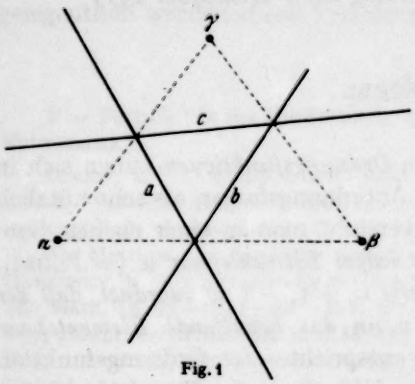


Fig. 1

$$a(\alpha)\, a(\gamma)\, c(\alpha)\, c(\gamma) = 1$$
$$a(\alpha)\, a(\beta)\, b(\alpha)\, b(\beta) = 1$$
$$b(\beta)\, b(\gamma)\, c(\beta)\, c(\gamma) = 1.$$

Herrn SPERNER verdanke ich die folgende Frage, die in dieser Note untersucht werden soll:

Genügt umgekehrt eine Ordnungsfunktion, die die Dreiecksrelation erfüllt, der Geradenrelation?

Wir werden sehen, daß diese Frage unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen positiv zu beantworten ist (s. Satz).

Voraussetzungen

Die Geometrie sei eine *projektive Ebene* Π, in der der *kleine* Satz von DESARGUES gilt[4]) und in der jede Gerade mit mindestens vier verschiedenen Punkten inzidiert, d. h. die kleinste projektive Ebene, die bekanntlich aus genau sieben Punkten und sieben Geraden besteht, wird ausgeschlossen[5]).

Bezüglich einer festen Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ definieren wir: *Genau dann, wenn* α, β, γ *drei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden* k *sind und wenn für alle mit* γ *inzidierenden Geradenpaare* $g, h \neq k$ *die Geradenrelation* $g(\alpha)\, g(\beta)\, h(\alpha)\, h(\beta) = 1$ *erfüllt ist, wird der Term* $[\alpha, \beta|\gamma]$ *erklärt, und zwar als* 1, *wenn* $g(\alpha)\, g(\beta) = 1$ *und als* -1, *wenn* $g(\alpha)\, g(\beta) = -1$ *ist, wobei* $g \neq k = (\alpha, \beta)$ *eine beliebige mit* γ *inzidierende Gerade ist.*

Wir nennen daher den Term $[\alpha, \beta|\gamma]$ aucn *Zwischensymbol*, da man erklären kann: γ liegt zwischen bzw. nicht zwischen α, β, wenn $[\alpha, \beta|\gamma] = -1$ bzw. $= +1$ ist. Dual ist der Term $[g, h|k]$ für drei voneinander verschiedene Geraden eines Punktes erklärt. — Ist $h(\alpha)$ eine beliebige Ordnungsfunktion,

[4]) Unter dem *kleinen* Satz von DESARGUES versteht man bekanntlich die Aussage: *Sind* α, β, γ *und* α', β', γ' *zwei perspektiv liegende Dreiecke mit dem Zentrum* ζ *und schneiden sich zwei der entsprechenden Seitenpaare* (α, β), (α', β'); (α, γ), (α', γ') *und* (β, γ), (β', γ') *auf einer Geraden durch* ζ, *so auch das dritte Seitenpaar.*

[5]) Für diese Geometrie gilt nämlich: Ist α, β, γ ein Dreieck, so gibt es genau eine Gerade, die mit keinem der Punkte α, β, γ inzidiert. Die Dreiecksrelation ist daher für jede Ordnungsfunktion dieser Geometrie, d.h. auch für solche, die nicht der Geradenrelation genügen, trivialerweise erfüllt. (Der Satz läßt sich für diese Geometrie nicht beweisen.)

so braucht es weder drei Punkte α, β, γ mit $[\alpha, \beta|\gamma]$ noch drei Geraden g, h, k mit $[g, h|k]$ zu geben.

Wie man leicht nachrechnet, gilt für Zwischensymbole folgende Regel:

(1) $$[\alpha, \beta|\gamma] \cdot [\alpha, \delta|\gamma] = [\beta, \delta|\gamma],$$

(2) $$[g, h|k] \cdot [g, j|k] = [h, j|k],$$

d.h. mit $[\alpha, \beta|\gamma]$, $[\alpha, \delta|\gamma]$ stehen auch die Punkte β, γ, δ in der Beziehung $[\beta, \delta|\gamma]$ und mit $[g, h|k]$, $[g, j|k]$ auch $[h, j|k]$.

Jetzt kann man folgenden Satz aussprechen, der eine Antwort auf die oben gestellte Frage geben soll:

Satz. *Eine Ordnungsfunktion $h(\alpha)$, die der Dreiecksrelation genügt, erfüllt die Geradenrelation, wenn es mindestens drei Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit $[\alpha_1, \alpha_2|\alpha_3]$ oder wenn es mindestens drei Geraden a_1, a_2, a_3 mit $[a_1, a_2|a_3]$ gibt.*

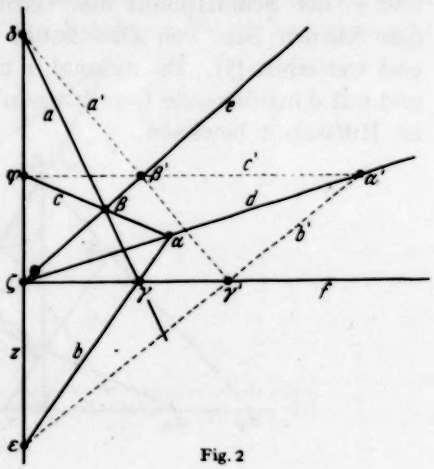


Fig. 2

Für den Beweis dieses Satzes genügt es, zu zeigen, daß für alle Punktetripel α, β, γ, deren Punkte voneinander verschieden sind und die auf einer Geraden liegen, $[\alpha, \beta|\gamma]$ gilt oder daß für alle Geradentripel g, h, k, deren Geraden voneinander verschieden sind und mit einem Punkt inzidieren, $[g, h|k]$ gilt. — Zuvor beweisen wir zwei Hilfssätze. Setzt man für eine feste Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ die Dreiecksrelation voraus, so lassen sich folgende Anordnungsaussagen beweisen:

Hilfssatz 1. *Sind in einem vollständigen Viereck $\zeta, \alpha, \beta, \gamma$ jeweils a, b, c, d, e, f die Verbindungsgeraden von (β, γ), (α, γ), (α, β), (ζ, α), (ζ, β), (ζ, γ) und sind $\delta, \varepsilon, \varphi$ jeweils die Schnittpunkte einer beliebigen mit ζ inzidierenden Geraden $z \neq d, e, f$ mit a, b, c* (s. Fig. 2), *so folgt aus der Gültigkeit einer der Beziehungen $[\varepsilon, \varphi|\delta]$, $[e, f|d]$ stets die andere.*

Beweis. Wendet man auf das Dreieck $\alpha, \varepsilon, \varphi$ hinsichtlich der Geraden a, e, f die Dreiecksrelation an, so folgt

(3) $$a(\varepsilon)\, a(\varphi)\, e(\alpha)\, e(\varphi)\, f(\alpha)\, f(\varepsilon) = 1.$$

α' sei ein beliebiger von ζ und α verschiedener Punkt der Geraden d. Dann bezeichnen wir mit b' und c' die Verbindungsgeraden (α', ε) und (α', φ) und mit β', γ' die Schnittpunkte (c', e) und (b', f). Nach dem kleinen Satz von DESARGUES geht dann die Verbindungsgerade a' von (β', γ') durch δ. Wendet man jetzt die Dreiecksrelation auf das Dreieck $\alpha', \varepsilon, \varphi$ hinsichtlich der Geraden a', e, f an, so erhält man

(4) $$a'(\varepsilon)\, a'(\varphi)\, e(\alpha')\, e(\varphi)\, f(\alpha')\, f(\varepsilon) = 1.$$

Durch Multiplikation von (3) und (4) und Umformung ergibt sich

$$a(\varepsilon)\,a(\varphi)\,a'(\varepsilon)\,a'(\varphi) = e(\alpha)\,e(\alpha')\,f(\alpha)\,f(\alpha'). \tag{5}$$

Ist $[\varepsilon, \varphi | \delta]$, so besagt die Anordnungsaussage (5) unter Beachtung, daß sowohl α als auch α' zwei beliebige von ζ verschiedene Punkte von d sein dürfen, daß auch $[e, f | d]$ gilt. — Um auch aus der zweiten Beziehung die erste zu erhalten, gehen wir diesmal von einer beliebigen mit δ inzidierenden Geraden $a' \neq a, z$ aus. β', γ' seien hier die Schnittpunkte (a', e) und (a', f) und α' der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden (β', φ) und (γ', ε). Nach dem kleinen Satz von DESARGUES inzidiert α' mit d. Daher gilt auch (4) und weiterhin (5). Da diesmal a und a' zwei beliebige von z verschiedene und mit δ inzidierende Geraden sein dürfen, folgt $[\varepsilon, \varphi | \delta]$ aus $[e, f | d]$. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

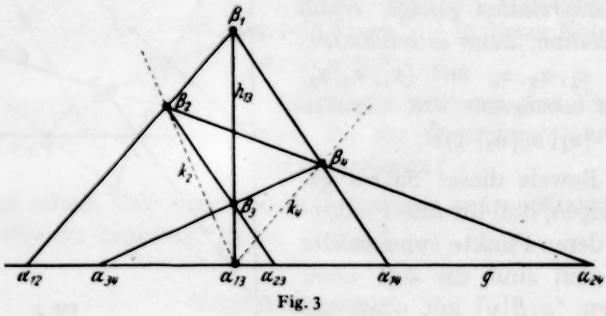


Fig. 3

Bevor wir Hilfssatz 2 formulieren, erklären wir: Unter einem *Hessenbergwurf*[6]) für Punkte soll jedes Punktesechstupel $\alpha_{ik}\,(k > i = 1, 2, 3, 4)$ verstanden werden, das von einem *vollständigen Viereck* $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ auf einer Geraden g, die mit keinem β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ inzidiert, ausgeschnitten wird. Dabei soll α_{ik} stets der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden (β_i, β_k) mit g sein.

Hilfssatz 2. *Ist α_{ik} ein Hessenbergwurf und gilt $\alpha_{13} \neq \alpha_{24}$, so folgt aus $[\alpha_{12}, \alpha_{14} | \alpha_{24}]$ stets auch $[\alpha_{34}, \alpha_{23} | \alpha_{24}]$.*

Beweis. $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ sei das zum Hessenbergwurf α_{ik} gehörige vollständige Viereck (Fig. 3). Mit $h_{ik}\,(i < k)$ sei die Verbindungsgerade (β_i, β_k) bezeichnet und mit k_2, k_4 die Verbindungsgeraden (α_{13}, β_2) und (α_{13}, β_4). Wendet man jetzt einmal Hilfssatz 1 hinsichtlich des Vierecks $\alpha_{13}, \beta_1, \beta_2, \beta_4$ an, so folgt aus $[\alpha_{12}, \alpha_{14} | \alpha_{24}]$ die Beziehung $[k_2, k_4 | k_{13}]$, und zum andern folgt hinsichtlich des Vierecks $\alpha_{13}, \beta_3, \beta_2, \beta_4$ aus $[k_2, k_4 | k_{13}]$ die Beziehung $[\alpha_{34}, \alpha_{23} | \alpha_{24}]$, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Um den Satz nunmehr zu beweisen, setzten wir die Existenz von drei Geraden e, f, d voraus mit $[e, f | d]$. Mit ζ bezeichnen wir ihren Schnittpunkt. Sodann werde durch ζ eine beliebige Gerade $z \neq e, f, d$ gelegt und auf ihr ein beliebiger Punkt $\delta \neq \zeta$ gewählt. Unser erstes Ziel ist es, zu zeigen, daß für

[6]) HESSENBERG hat als erster diese Punkte-Sechstupel benutzt (vgl. [1]). In dem Lehrbuch von VEBLEN-YOUNG: „*Projective geometry* I" wird ein derartiges Sechstupel als *quadrangular set* bezeichnet.

alle mit z inzidierenden Punktepaare $\varepsilon, \varphi \neq \delta$ die Beziehung $[\varepsilon, \varphi | \delta]$ gilt. — $a \neq z$ sei eine beliebig gewählte Gerade durch δ, und β, γ seien ihre Schnittpunkte mit e und f. Wählt man auf d einen beliebigen von ζ und dem Schnittpunkt (a, d) verschiedenen Punkt α, so kann man von α aus die Punkte $\beta = (a, e)$, $\gamma = (a, f)$ auf die Gerade z projezieren und erhält die Projektionspunkte φ, ε (s. Fig. 2). Da hinsichtlich des Vierecks $\zeta, \alpha, \beta, \gamma$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt sind, folgt nunmehr für die Punkte ε, φ aus $[e, f | d]$ die Beziehung $[\varepsilon, \varphi | \delta]$. Damit ist die Existenz eines Punktepaares ε, φ mit $[\varepsilon, \varphi | \delta]$ nachgewiesen. — Dual ergibt sich aus der Existenz von $\varepsilon, \varphi, \delta$ mit $[\varepsilon, \varphi | \delta]$: Ist $\xi \neq \varepsilon, \varphi, \delta$ ein beliebiger Punkt von z, so gibt

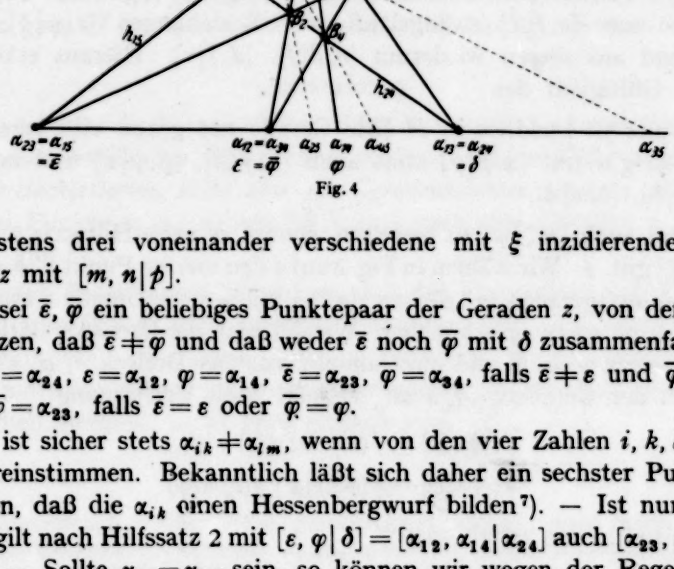


Fig. 4

es mindestens drei voneinander verschiedene mit ξ inzidierende Geraden $p, m, n \neq z$ mit $[m, n | p]$.

Jetzt sei $\bar{\varepsilon}, \bar{\varphi}$ ein beliebiges Punktepaar der Geraden z, von dem wir nur voraussetzen, daß $\bar{\varepsilon} \neq \bar{\varphi}$ und daß weder $\bar{\varepsilon}$ noch $\bar{\varphi}$ mit δ zusammenfallen. Wir setzen: $\delta = \alpha_{24}$, $\varepsilon = \alpha_{12}$, $\varphi = \alpha_{14}$, $\bar{\varepsilon} = \alpha_{23}$, $\bar{\varphi} = \alpha_{34}$, falls $\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon$ und $\bar{\varphi} \neq \varphi$, und $\bar{\varepsilon} = \alpha_{34}$, $\bar{\varphi} = \alpha_{23}$, falls $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ oder $\bar{\varphi} = \varphi$.

Dann ist sicher stets $\alpha_{ik} \neq \alpha_{lm}$, wenn von den vier Zahlen i, k, l, m genau zwei übereinstimmen. Bekanntlich läßt sich daher ein sechster Punkt α_{13} so bestimmen, daß die α_{ik} einen Hessenbergwurf bilden[7]). — Ist nun $\alpha_{13} \neq \alpha_{24}$ $(= \delta)$, so gilt nach Hilfssatz 2 mit $[\varepsilon, \varphi | \delta] = [\alpha_{12}, \alpha_{14} | \alpha_{24}]$ auch $[\alpha_{23}, \alpha_{34} | \alpha_{24}] = [\bar{\varepsilon}, \bar{\varphi} | \delta]$. — Sollte $\alpha_{13} = \alpha_{24}$ sein, so können wir wegen der Regel (1) ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich $\alpha_{12} = \alpha_{34}$ voraussetzen. (Durch diese Voraussetzung bleiben uns einige Fallunterscheidungen erspart.) Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Jede Gerade inzidiert mit mindestens *fünf* verschiedenen Punkten. Dann läßt sich auf der Verbindungsgeraden $h_{15} = (\alpha_{23}, \beta_1)$ ein Punkt β_5 wählen, der von den Punkten $\beta_1, \alpha_{23}, (h_{24}, h_{15}), (h_{34}, h_{15})$ verschieden ist (s. Fig. 4). Das Viereck $\beta_1, \beta_2, \beta_5, \beta_4$ ist vollständig und schneidet auf z

[7]) Es läßt sich nämlich unter dieser Voraussetzung stets ein vollständiges Viereck $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ angeben, so daß die Gerade $h_{ik} = (\beta_i, \beta_k)$ die Gerade z in α_{ik} für $(i, k) \neq (1, 3)$ schneidet. Vgl. hierzu [1] oder VEBLEN-YOUNG: „*Projective geometry* I" S. 47ff.

den Hessenbergwurf $\alpha_{12}, \alpha_{15}, \alpha_{14}, \alpha_{25}, \alpha_{24}, \alpha_{45}$ aus mit $\alpha_{15} = \alpha_{23} \neq \alpha_{24}$ und $[\alpha_{12}, \alpha_{14} | \alpha_{24}]$. Daher ist auch (nach Hilfssatz 2) $[\alpha_{25}, \alpha_{45} | \alpha_{24}]$. — Aber auch das Viereck $\beta_5, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ist vollständig. Es schneidet auf z den Hessenbergwurf $\alpha_{25}, \alpha_{35}, \alpha_{45}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ aus mit $\alpha_{35} \neq \alpha_{24}$. Da $[\alpha_{25}, \alpha_{45} | \alpha_{24}]$ gilt, ist auch $[\alpha_{23}, \alpha_{34} | \alpha_{24}] = [\bar{\varepsilon}, \bar{\varphi} | \delta]$.

Von δ war nur vorausgesetzt, daß $\delta \neq \zeta$ ist. Um auch diese letzte Einschränkung aufzuheben, denken wir uns auf z ein Punktetripel $\varepsilon, \varphi, \delta$ mit $[\varepsilon, \varphi | \delta]$ gegeben. Auf Grund der Voraussetzung gibt es mindestens einen Punkt ξ auf z mit $\xi \neq \varepsilon, \varphi, \delta, \zeta$. Wie bereits oben gezeigt, existieren mindestens drei mit ξ inzidierende Geraden $m, n, p \neq z$ mit $[m, n | p]$. Geht man statt von e, f, d von diesen Geraden aus, so kann man für alle Punktepaare ε, φ mit $\varepsilon \neq \zeta$, $\varphi \neq \zeta$ die Beziehung $[\varepsilon, \varphi | \zeta]$ beweisen.

2. Jede Gerade inzidiert mit genau *vier* verschiedenen Punkten. Hier gibt es durch ζ nur eine Gerade $z \neq e, f, d$, da auch jeder Punkt mit genau vier verschiedenen Geraden inzidiert. Da es auf der Geraden z außer ζ nur noch drei weitere Punkte gibt, und da $\delta \neq \zeta$ beliebig auf z gewählt werden darf, folgen also aus $[e, f | d]$ zwangsläufig die Beziehungen $[\varepsilon, \varphi | \delta]$, $[\varepsilon, \delta | \varphi]$, $[\varphi, \delta | \varepsilon]$ und aus diesen wiederum $[e, d | f]$, $[d, f | e]$. Hieraus erkennt man sofort die Gültigkeit des

Hilfssatz 3. Inzidiert in Π jede Gerade mit genau vier verschiedenen Punkten, so gilt mit $[\alpha, \beta | \gamma]$ stets auch $[\alpha, \gamma | \beta]$, $[\beta, \gamma | \alpha]$ und mit $[a, b | c]$ stets $[a, c | b]$, $[b, c | a]$.

Um jetzt auch $[\varepsilon, \zeta | \varphi]$ zu beweisen, genügt es nach Hilfssatz 3 zu zeigen, daß $[\varepsilon, \varphi | \zeta]$ gilt. — Wir wählen in Fig. 2 auf d den vierten Punkt $\alpha' \neq \alpha, \zeta, (a, d)$. Die Verbindungsgeraden (α', β) bzw. (α', γ) müssen die Gerade z zwangsläufig in den Punkten ε bzw. φ schneiden. Wendet man die Dreiecksrelation einmal auf das Dreieck $\varepsilon, \varphi, \alpha$ und zum andern auf das Dreieck $\varepsilon, \varphi, \alpha'$ jedesmal hinsichtlich der Geraden e, f, a an, so folgt nach Umformung:

$$f(\varphi)\, e(\varepsilon) = f(\alpha)\, e(\alpha)\, a(\varepsilon)\, a(\varphi)$$
$$f(\varepsilon)\, e(\varphi) = f(\alpha')\, e(\alpha')\, a(\varepsilon)\, a(\varphi).$$

Durch Multiplikation erhält man:

$$e(\varepsilon)\, e(\varphi)\, f(\varepsilon)\, f(\varphi) = e(\alpha)\, e(\alpha')\, f(\alpha)\, f(\alpha')$$

und wegen $[e, f | d]$:

$$e(\varepsilon)\, e(\varphi)\, f(\varepsilon)\, f(\varphi) = 1.$$

Da die Beziehung $[e, f | d]$ nach Permutation der Geraden erhalten bleibt, folgt entsprechend:

$$e(\varepsilon)\, e(\varphi)\, d(\varepsilon)\, d(\varphi) = 1$$

und damit $[\varepsilon, \varphi | \zeta]$. — Nach (1) erhält man aus $[\varepsilon, \zeta | \varphi]$ und $[\varepsilon, \delta | \varphi]$ die Beziehung $[\delta, \zeta | \varphi]$ und damit (nach Hilfssatz 3) $[\zeta, \varphi | \delta]$. Ganau so folgt $[\zeta, \varepsilon | \delta]$. Aus diesen Beziehungen erkennt man auf Grund von Hilfssatz 3, daß für drei voneinander verschiedene Punkte α, β, γ von z stets $[\alpha, \beta | \gamma]$ gilt.

Damit ist in beiden Fällen gezeigt:

Sind a_1, a_2, a_3 drei Geraden, die mit einem Punkt ζ inzidieren und ist $[a_1, a_2|a_3]$, so gilt für alle Punktetripel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, die auf einer mit ζ inzidierenden Geraden $z \neq a_1, a_2, a_3$ liegen, stets $[\alpha_1, \alpha_2|\alpha_3]$, sofern die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ voneinander verschieden sind.

Vollkommen dual läßt sich beweisen:

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ drei Punkte, die auf einer Geraden z liegen und ist $[\alpha_1, \alpha_2|\alpha_3]$, so gilt für alle Geradentripel a_1, a_2, a_3, die mit einem auf z liegenden Punkt $\zeta \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ inzidieren, stets $[a_1, a_2|a_3]$, sofern die Geraden a_1, a_2, a_3 voneinander verschieden sind.

Setzt man die Existenz eines Punktetripels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit $[\alpha_1, \alpha_2|\alpha_3]$ oder die eines Geradentripels a_1, a_2, a_3 mit $[a_1, a_2|a_3]$ voraus, so erkennt man durch Kombination dieser beiden Aussagen:

Sind α, β, γ bzw. a, b, c irgend drei voneinander verschiedene Punkte bzw. Geraden, die mit einer Geraden bzw. einem Punkt inzidieren, so gilt stets $[\alpha, \beta|\gamma]$ bzw. $[a, b|c]$. Damit ist gezeigt, daß die Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ der Geradenrelation in ganz Π genügt, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Anmerkung

Man kann jetzt die Fragen stellen: *Läßt sich dieser Satz auch für alle nichtdesarguesschen projektiven Ebenen beweisen? — Gibt es Ordnungsfunktionen, die der Dreiecksrelation nicht aber der Geradenrelation genügen,* d.h. daß es weder drei Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit $[\alpha_1, \alpha_2|\alpha_3]$ noch drei Geraden g_1, g_2, g_3 mit $[g_1, g_2|g_3]$ gibt?

Zur ersten Frage ist zu bemerken, daß der kleine Satz von DESARGUES wesentlich zum Beweis vom Hilfssatz 1 benötigt wird. Ich sehe keine Möglichkeit, Hilfssatz 1 ohne diesen Satz zu beweisen. Hinsichtlich der zweiten Frage vermute ich, daß sie positiv zu beantworten ist. Doch dürfte die Angabe eines solchen Beispiels nicht ganz einfach sein.

Literatur

[1] HESSENBERG, G.: Über einen geometrischen Kalkül. Acta Math. **29**, 1—23 (1905). — [2] SPERNER, E.: Die Ordnungsfunktion einer Geometrie. Math. Ann. **121**, 107 bis 130 (1949). — [3] SPERNER, E.: Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. **1949**, 10. Abh.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 23. April 1955)

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 138—148 (1956)

Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. III

Von
BERTRAM HUPPERT

In Teil II [1]) war unter anderem folgender Satz bewiesen worden (Satz 4): *Die Gruppe $\mathfrak{L}$ habe einen zyklischen Normalteiler vom Index 2. Dann ist jedes Produkt $\mathfrak{G}=\mathfrak{L}\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{L}$ mit einer nilpotenten Gruppe $\mathfrak{N}$ auflösbar.*

Wird der Index 2 durch eine Primzahl $q>2$ ersetzt, so gilt der Satz nicht mehr. Denn die einfache Gruppe der Ordnung 168 erlaubt eine Zerlegung $\mathfrak{G}_{168}=\mathfrak{L}\mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{L}$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 21 ist (also einen zyklischen Normalteiler vom Index 3 besitzt) und $\mathfrak{N}$ eine Diedergruppe der Ordnung 8 ist. Unter spezielleren Voraussetzungen ist die einfache Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ in gewissem Sinne das einzige nicht auflösbare Beispiel; denn es gilt [2])

Satz 6. *Sei $\mathfrak{L}$ eine Gruppe der Ordnung pq, wobei p und q Primzahlen sind, $\mathfrak{N}$ eine nilpotente Gruppe. Gibt es keine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}=\mathfrak{L}\mathfrak{N}$, die sich homomorph auf die einfache $\mathfrak{G}_{168}$ abbilden läßt, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar.*

In Satz 4 dürfen wir den Faktor $\mathfrak{L}$ etwas allgemeiner wählen, wenn wir $\mathfrak{N}$ spezialisieren:

Satz 7. *$\mathfrak{L}$ besitze einen zyklischen Normalteiler vom Primzahlindex q. Ist $\mathfrak{A}$ abelsch, so ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{L}\mathfrak{A}$ auflösbar.*

Aber auch bei abelschem zweiten Faktor kann $\mathfrak{L}$ nicht durch eine beliebige metazyklische Gruppe (zyklischer Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe) ersetzt werden ohne die Auflösbarkeit zu verletzen. Denn die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_5$ gestattet eine Zerlegung $\mathfrak{S}_5=\mathfrak{L}\mathfrak{Z}$, wobei $\mathfrak{L}$ der Normalisator einer 5-Sylowgruppe ist (und einen zyklischen Normalteiler der Ordnung 5 mit zyklischer Faktorgruppe der Ordnung 4 besitzt), während $\mathfrak{Z}$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 6 ist. Wieder ist unter speziellen Voraussetzungen die $\mathfrak{S}_5$ das einzige Gegenbeispiel:

Satz 8. *$\mathfrak{L}$ habe einen zyklischen Normalteiler $\mathfrak{Z}_p$ der Ordnung $p>2$ (p Primzahl), $\mathfrak{L}/\mathfrak{Z}_p$ sei zyklisch von der Ordnung 4. Ist $\mathfrak{A}$ abelsch und hat $\mathfrak{G}=\mathfrak{L}\mathfrak{A}$ keine Untergruppe $\mathfrak{U}$, die sich homomorph auf die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_5$ abbilden läßt, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar.*

Bezeichnungen. $(\mathfrak{G})$ = Ordnung von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U}\leq\mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wobei auch $\mathfrak{U}=\mathfrak{G}$ zugelassen ist; $\mathfrak{U}<\mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{U}\neq\mathfrak{G}$ [3]); $\mathfrak{U}\lhd\mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U}\lhd\mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U}\neq\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}_p$ = p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$; ${}_p\mathfrak{G}$ = p-SYLOW-

[1]) Siehe Literatur [5] und [7], zitiert als I und II.
[2]) Wir numerieren die Sätze durchlaufend weiter.
[3]) Abweichend von I und II.

Komplement von $\mathfrak{G}$ (s. P. HALL [4]); $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}'$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}'(p)$ = p-Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ (s. ZASSENHAUS [16], S. 122); $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ = Normalisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ = Zentralisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U}^X = X^{-1}\mathfrak{U}X$; ist p Primzahl und $p^\alpha \mid m$, aber $p^{\alpha+1} \nmid m$, so schreiben wir $p^\alpha \top m$.

Beweis von Satz 6 durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Die Voraussetzung, daß sich keine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ homomorph auf die einfache $\mathfrak{G}_{168}$ abbilden läßt, überträgt sich auf Untergruppen und Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Ein homomorphes Bild $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ hat entweder wieder eine Produktzerlegung des gleichen Typs wie $\mathfrak{G}$ (falls $\overline{\mathfrak{L}} \cong \mathfrak{L}$) oder ist nach ITÔ [8] auflösbar (falls $\overline{\mathfrak{L}}$ zyklisch ist). Somit genügt der Nachweis eines von $\mathfrak{E}$ verschiedenen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$.

Sei $\mathfrak{L}' \neq \mathfrak{E}$; sonst ist $\mathfrak{G}$ nach ITÔ [8] auflösbar. Insbesondere dürfen wir daher $p \neq q$ annehmen. Sei etwa $p > q$, also bekanntlich $\mathfrak{L}_p = \mathfrak{Z}_p \lhd \mathfrak{L}$.

a) Sei zunächst $\mathfrak{N}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, r eine Primzahl mit $r \mid (\mathfrak{N})$ und $p \neq r \neq q$; gibt es kein solches r, so ist $(\mathfrak{G}) = p^\alpha q^\beta$ und $\mathfrak{G}$ ist nach einem bekannten Satz von BURNSIDE auflösbar (s. SPEISER [12], S. 193). $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{N}_r$ ist eine r-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$. Schließen wir den trivialen Fall $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)) = \mathfrak{G}$ aus, so ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)) = \mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{G}$ r-normal, so gilt nach GRÜN (s. ZASSENHAUS [16], S. 135)

$$\mathfrak{E} \neq \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r))/\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r))'(r) \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(r).$$

Wegen $r \nmid (\mathfrak{L})$ liegt $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{G}'(r)$. Dann haben wir $\mathfrak{G}'(r) = \mathfrak{L}\overline{\mathfrak{N}}$ mit $\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}'(r)$ ist nach unserer Induktionsannahme auflösbar.

Ist $\mathfrak{G}$ nicht r-normal, so existiert ein Element $X \in \mathfrak{G}$, $X \notin \mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r) < \mathfrak{G}_r^X$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r) \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r^X)$. Dann bekommen wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)) \geq \{\mathfrak{N}, {}^{\prime}\mathfrak{N}^X\}$. Also ist ${}^{\prime}\mathfrak{N} = {}^{\prime}\mathfrak{N}^X$. Nun folgt $\mathfrak{N}({}^{\prime}\mathfrak{N}) \geq \{\mathfrak{N}, X\} = \mathfrak{G}$. Ist ${}^{\prime}\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$, so haben wir damit einen auflösbaren, von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ gefunden. Ist aber ${}^{\prime}\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, d.h. $(\mathfrak{N}) = r^\varrho$, so folgt $(\mathfrak{G}) = pqr^\varrho$. Ist $\mathfrak{G}$ nicht auflösbar, so hat ein nicht auflösbarer Kompositionsfaktor $\mathfrak{U}/\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$ notwendig eine Ordnung der Gestalt pqr^τ. Sei $\mathfrak{G} \rhd \mathfrak{U}_1 \rhd \mathfrak{U}_2 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{U}_j \rhd \mathfrak{U}$ der Ausschnitt einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{U}$. Wegen $(\mathfrak{U}/\mathfrak{V}) = pqr^\tau$ und $(\mathfrak{G}) = pqr^\varrho$ sind die Indizes in dem angegebenen Abschnitt Potenzen von r. Aus $r \nmid (\mathfrak{L}) = pq$ folgt nun schrittweise $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{U}_2$, …, $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{U}$. Somit hat $\mathfrak{U}$ die Gestalt $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\overline{\mathfrak{N}}$ mit $\overline{\mathfrak{N}} \leq \mathfrak{N}$. Dann erlaubt $\mathfrak{U}/\mathfrak{V}$ die Zerlegung $\mathfrak{U}/\mathfrak{V} = \overline{\mathfrak{L}}\overline{\mathfrak{N}}$ mit $\overline{\mathfrak{L}} \cong \mathfrak{L}$ und nilpotentem $\overline{\mathfrak{N}}$. Nach BRAUER und TUAN [1] sind die einfache Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ und die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_5$ die einzigen einfachen, nichtauflösbaren Gruppen mit Ordnungen der Gestalt pqr^τ. Die $\mathfrak{A}_5$ erlaubt aber keine Zerlegung der Gestalt $\overline{\mathfrak{L}}\overline{\mathfrak{N}}$. Daher folgt $\mathfrak{U}/\mathfrak{V} \cong \mathfrak{G}_{168}$, was aber durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also muß $\mathfrak{G}$ in diesem Falle auflösbar sein.

b) Sei nun weiterhin $\mathfrak{N}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ferner können wir annehmen, daß $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{E}$ gilt; andernfalls würde nämlich $\mathfrak{G}$ eine Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}\mathfrak{N}$ mit einer zyklischen Untergruppe $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{L}$ zulassen und wäre nach ITÔ [8] auflösbar. Sei $\mathfrak{J}$ eine maximale, $\mathfrak{N}$ umfassende Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Dann ist $(\mathfrak{J}) = p(\mathfrak{N})$ oder $(\mathfrak{J}) = q(\mathfrak{N})$.

Gibt es ein $\mathfrak{J}$ mit $(\mathfrak{J}) = p(\mathfrak{N})$, so hat $\mathfrak{J}$ die Gestalt $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}_p \mathfrak{N}$ mit einer zyklischen Untergruppe $\mathfrak{Z}_p$ von $\mathfrak{L}$. Nach ITÔ [8] ist $\mathfrak{J}$ auflösbar. Wir stellen nun $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{J}$. Dabei werde $\mathfrak{G}$ auf die Permutationsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ vom Grade q abgebildet. Es ist $(\overline{\mathfrak{G}}) \mid q!$. Wegen $p > q$ folgt $p \nmid (\overline{\mathfrak{G}})$. Also ist die homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht treu, vielmehr wird ein in $\mathfrak{J}$ liegender, von $\mathfrak{E}$ verschiedener Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet. Als Untergruppe von $\mathfrak{J}$ ist $\mathfrak{K}$ auflösbar, womit wir einen auflösbaren Normalteiler $\neq \mathfrak{E}$ nachgewiesen haben. Weiterhin dürfen wir also annehmen, daß jede maximale Untergruppe $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{N}$ umfaßt, die Ordnung $(\mathfrak{J}) = q(\mathfrak{N})$ hat und sich als Produkt $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}_q \mathfrak{N}$ mit einer zyklischen Untergruppe $\mathfrak{Z}_q$ von $\mathfrak{L}$ der Ordnung q schreiben läßt. Alle diese $\mathfrak{J}$ sind nach ITÔ [8] auflösbar.

c) Sei $p \mid (\mathfrak{N})$. Dann gilt $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p) \geq \mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{N}_p$ keine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$ ist, folgt nach einem bekannten Satz (ZASSENHAUS [16], S. 105, Satz 10) $p \mid (\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p)/\mathfrak{N}_p)$. Mithin kann $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p)$ in keiner der maximalen Untergruppen $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}_q \mathfrak{N}$ liegen, muß also mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmen. Dann liefert uns $\mathfrak{N}_p$ den gesuchten Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wir können daher in der Folge annehmen, daß $p \nmid (\mathfrak{N})$.

d) $\mathfrak{G}_q = \mathfrak{J}_q = \mathfrak{Z}_q \mathfrak{N}_q$ ist für jedes $\mathfrak{J}$ eine q-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$ (s. WIELANDT [15], S. 3). Ist $\mathfrak{N}_q \neq \mathfrak{E}$, so liegt $\mathfrak{D} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q) \cap \mathfrak{N}_q$ in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J})$. Nun ist $\mathfrak{N}_q$ maximal in $\mathfrak{G}_q$, daher $\mathfrak{N}_q \lhd \mathfrak{G}_q$ und dann bekanntlich $\mathfrak{D} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q) \cap \mathfrak{N}_q \neq \mathfrak{E}$. Wegen $(\mathfrak{G} : \mathfrak{J}) = p$ ist die Anzahl der Konjugierten eines Elementes $D \neq E$ von $\mathfrak{D}$ ein Teiler von p. Nach einem bekannten Satz von BURNSIDE (SPEISER [12], S. 193, Satz 169) ist dann $\mathfrak{G}$ nicht einfach. Sei $\mathfrak{K}$ ein minimaler, von $\mathfrak{E}$ verschiedener Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{K}\mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}$, so hat $\mathfrak{K}\mathfrak{N}$ die Gestalt $\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{L}}$ mit $\overline{\mathfrak{L}} \leq \mathfrak{L}$. Wegen $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{K}\mathfrak{N}$ ist $\overline{\mathfrak{L}} \neq \mathfrak{L}$, daher $\overline{\mathfrak{L}}$ zyklisch und $\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{L}}$ nach ITÔ [8] auflösbar. Als Untergruppe von $\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{L}}$ ist dann auch $\mathfrak{K}$ auflösbar. Sei also $\mathfrak{K}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$. In gleicher Weise können wir annehmen, daß auch $\mathfrak{K}\mathfrak{L} = \mathfrak{G}$ gilt; sonst wäre $\mathfrak{K}\mathfrak{L} = \overline{\mathfrak{N}}\mathfrak{L}$ mit $\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{N}$ nach unserer Induktionsannahme auflösbar und $\mathfrak{K}$ ebenfalls. Aus $\mathfrak{K}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{L} = \mathfrak{G}$ folgt nun $(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}) \mid (\mathfrak{N})$ und $(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}) \mid (\mathfrak{L})$, also $(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}) = q$. Sicher ist dann $p \mid (\mathfrak{K})$. Da $\mathfrak{K}$ als minimaler Normalteiler ein direktes Produkt von isomorphen einfachen Gruppen ist, aber $p \top (\mathfrak{K})$ gilt, so ist $\mathfrak{K}$ selbst einfach. Aus $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_p \mathfrak{J}$ ergibt sich nun $\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}_p \overline{\mathfrak{J}}$ mit $(\mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{J}}) = q$. Ist $\overline{\mathfrak{J}} \leq \mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{K}$ nach unserer Induktionsannahme auflösbar und wir sind fertig. Ist aber $\overline{\mathfrak{J}} \not\leq \mathfrak{N}$, so folgt $\overline{\mathfrak{J}}\mathfrak{N} = \mathfrak{J}$, also $(\mathfrak{J} : \mathfrak{N}) = q = (\overline{\mathfrak{J}} : \overline{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{N})$. Sicher ist $\mathfrak{N} \neq \overline{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{N}$, denn sonst wäre $\mathfrak{N} \leq \overline{\mathfrak{J}} \leq \mathfrak{K}$, daher $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, im Widerspruch zur Nichteinfachheit von $\mathfrak{G}$. Wir setzen $\overline{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{N}}$. Wäre $\overline{\mathfrak{N}}_q \neq \mathfrak{E}$, so würde wie oben aus dem Satz von BURNSIDE folgen, daß $\mathfrak{K}$ nicht einfach ist, im Gegensatz zu unserer Annahme. Daher ist notwendig $\overline{\mathfrak{N}}_q = \mathfrak{E}$, also $q^2 \nmid (\mathfrak{N})$ und dann $q^3 \nmid (\mathfrak{G})$. Insbesondere ist $\mathfrak{G}_q$ abelsch. Dies trifft auch dann zu, wenn $q \nmid (\mathfrak{N})$. Daher können wir weiterhin annehmen, daß $\mathfrak{G}_q$ abelsch und dann $\mathfrak{G}$ q-normal ist (s. ZASSENHAUS [16], S. 135).

e) Für eine geeignete, in einem $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}_q \mathfrak{N}$ liegende q-SYLOW-Gruppe $\mathfrak{G}_q$ von $\mathfrak{G}$ gilt $\mathfrak{G}_q = \mathfrak{Z}_q \times \mathfrak{N}_q$, wobei eventuell $\mathfrak{N}_q = \mathfrak{E}$ sein kann (s. WIELANDT [15], S. 3). Sei nun $\mathfrak{L} = \mathfrak{Z}_p \mathfrak{Z}_q$, wobei $\mathfrak{Z}_p$ und $\mathfrak{Z}_q$ bzw. von Z_p und Z_q erzeugt werden

mögen. Ferner sei $X \in \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)$. Wegen $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{N}$ hat X die Gestalt $X = Z_q^\beta Z_p^\alpha N$ mit einem $N \in \mathfrak{N}$ und geeigneten α, β. Dann haben wir

$$\mathfrak{Z}_q^X = \mathfrak{Z}_q^{Z_p^\alpha N} \leq \mathfrak{G}_q \leq \mathfrak{J}, \quad \text{daher} \quad \mathfrak{Z}_q^{Z_p^\alpha} \leq \mathfrak{J}^{N^{-1}} = \mathfrak{J}$$

und dann

$$\mathfrak{Z}_q^{Z_p^\alpha} \leq \mathfrak{L} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{Z}_q.$$

Da $\mathfrak{Z}_q$ in $\mathfrak{L}$ eigener Normalisator ist (was aus $\mathfrak{Z}_p \lhd \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}' \neq \mathfrak{E}$ sofort folgt), erhalten wir $Z_p^\alpha = E$. Somit liegt X in $\mathfrak{J}$ und es ergibt sich $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q) \leq \mathfrak{J}$. Wegen $\mathfrak{Z}_q \leq \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q) \leq \mathfrak{Z}_q \mathfrak{N} = \mathfrak{J}$ hat $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)$ die Gestalt $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q) = \mathfrak{Z}_q \widehat{\mathfrak{N}}$ mit $\widehat{\mathfrak{N}} \leq \mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{J}$, so folgt $\widehat{\mathfrak{N}} \lhd \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)$, und dann ist eine von $\mathfrak{E}$ verschiedene q-Faktorgruppe in $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)$ abspaltbar. Nach GRÜN (ZASSENHAUS [*16*], S. 135) folgt wegen der q-Normalität von $\mathfrak{G}$, daß $\mathfrak{G}'(q) \neq \mathfrak{G}$. Sicher ist $\mathfrak{G}'(q) \geq \{\mathfrak{Z}_p, {}_q\mathfrak{N}\}$. Ferner haben wir $\mathfrak{G}'(q)_q = \mathfrak{G}'(q) \cap \mathfrak{G}_q \leq \mathfrak{G}'(q) \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)$. Offenbar ist

$$\mathfrak{G}'(q) \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q) \geq \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)'(q).$$

Es gilt aber sogar das Gleichheitszeichen; denn nach GRÜN ist wegen $\mathfrak{G}_q = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)$

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(q) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)/\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)'(q)$$

und andererseits

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(q) = \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)\,\mathfrak{G}'(q)/\mathfrak{G}'(q) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)/\mathfrak{G}'(q) \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q).$$

Daraus folgt $(\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)'(q)) = (\mathfrak{G}'(q) \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q))$ und dann wegen der obigen Ungleichung die Gleichung. Aus $\widehat{\mathfrak{N}} \lhd \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)$ erhalten wir $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)'(q) \leq \mathfrak{N}$. Nun bekommen wir schließlich $\mathfrak{G}'(q) = \mathfrak{Z}_p\,{}_q\mathfrak{N}\mathfrak{G}'(q)_q = \mathfrak{Z}_p \widetilde{\mathfrak{N}}$ mit $\widetilde{\mathfrak{N}} < \mathfrak{N}$. Nach ITÔ [*8*] ist dann $\mathfrak{G}'(q)$ auflösbar. Weiter können wir daher annehmen, daß $\mathfrak{N}$ in keiner der maximalen Untergruppen $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}_q \mathfrak{N}$ invariant ist.

f) Nun stellen wir eine beliebige, $\mathfrak{N}$ umfassende maximale Untergruppe $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}_q \mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe $\mathfrak{J}^*$ der Nebenklassen nach $\mathfrak{N}$, also vom Grad q. Da $\mathfrak{J}$ auflösbar ist, gibt es ein $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R} \lhd \mathfrak{J}$, $\mathfrak{R} < \mathfrak{N}$ und $(\mathfrak{J}/\mathfrak{R}) = qs$ mit $s \mid q-1$; denn bekanntlich haben die transitiven, auflösbaren Permutationsgruppen vom Primzahlgrad q stets eine Ordnung, welche $q(q-1)$ teilt (PERRON [*10*], S. 151). Es ist sicher $s \neq 1$, da sonst $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{J}$ gelten würde. Daher gibt es eine Primzahl r mit $r \mid s$ und $r \mid (\mathfrak{N})$. Da sich in $\mathfrak{J}^*$ stets eine zyklische Faktorgruppe der Ordnung s abspalten läßt, ist $\mathfrak{J}^{*\prime}(r) \neq \mathfrak{J}^*$ und dann auch $\mathfrak{J}'(r) \neq \mathfrak{J}$. Wegen $r < q < p$ haben wir für $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{N}_r$ nun $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)) = \mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)) = \mathfrak{J}$, also in jedem Falle $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r))'(r) \neq \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r))$. Ist $\mathfrak{G}$ r-normal, so sind wir wieder fertig; nach GRÜN ist dann nämlich $\mathfrak{G}'(r) \neq \mathfrak{G}$, und $\mathfrak{G}'(r) \geq \mathfrak{L}$ sichert mit Hilfe der Induktionsannahme die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}'(r)$.

g) Nun sei $\mathfrak{G}$ nicht r-normal und $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)) = \mathfrak{N}$ für $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{N}_r$. Dann gibt es ein $X \in \mathfrak{G}$, $X \notin \mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r) \leq \mathfrak{N}^X$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r) \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r^X)$. Es folgt $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)) \geq \{\mathfrak{N}, {}_r\mathfrak{N}^X\}$. Ist $(\mathfrak{N}) = r^\varrho$, so können wir wie unter a) schließen. Sei daher $(\mathfrak{N}) \neq r^\varrho$, also ${}_r\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$. Aus $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)) = \mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}, {}_r\mathfrak{N}^X\}$ folgt jetzt ${}_r\mathfrak{N}^X = {}_r\mathfrak{N}$, somit $\mathfrak{N}({}_r\mathfrak{N}) \geq \{\mathfrak{N}, X\} > \mathfrak{N}$. Schließen wir den trivialen Fall $\mathfrak{N}({}_r\mathfrak{N}) = \mathfrak{G}$

aus, so ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{N})$ eine Gruppe $\mathfrak{J}=\mathfrak{Z}_q\mathfrak{N}$. Mit $\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{J}$ ergibt sich $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})\trianglelefteq\mathfrak{N}(\mathfrak{N})=\mathfrak{J}$. Wir setzen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})=\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ charakteristisch in $\mathfrak{N}$, also $\mathfrak{A}\lhd\mathfrak{J}$ wegen $\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{J}$. Ferner ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})\geq\mathfrak{N}$. Aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})\lhd\mathfrak{N}(\mathfrak{A})=\mathfrak{J}$ folgt nun wegen $\mathfrak{N}\not\lhd\mathfrak{J}$ die Aussage $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})=\mathfrak{J}$, d.h. $\mathfrak{A}\leq\mathfrak{Z}(\mathfrak{J})$. Wie unter b) schließen wir nun mit Hilfe des Satzes von BURNSIDE auf die Existenz eines Normalteilers $\mathfrak{K}$ mit $(\mathfrak{G}/\mathfrak{K})=q$ und wie dort können wir annehmen, daß $\mathfrak{K}$ einfach ist. Wieder hat $\mathfrak{K}$ die Gestalt $\mathfrak{K}=\mathfrak{Z}_p\overline{\mathfrak{J}}$ mit $\mathfrak{J}>\overline{\mathfrak{J}}>\overline{\mathfrak{J}}\cap\mathfrak{N}\geq_q\mathfrak{N}$ und $(\mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{J}})=(\overline{\mathfrak{J}}:\overline{\mathfrak{J}}\cap\mathfrak{N})=q$.

Gibt es eine Primzahl s mit $s\,|\,(\mathfrak{N})$ und $q\neq s\neq r$, so ist $\mathfrak{E}<\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_s)\leq\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})=\mathfrak{A}$ und wegen $\mathfrak{A}\leq\mathfrak{Z}(\mathfrak{J})$ folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_s)\leq\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{J}})$. Dann kann aber $\mathfrak{K}$ nach dem schon mehrfach benutzten Satz von BURNSIDE nicht einfach sein, im Widerspruch zu unserer Annahme. Somit ist wegen $q^2\nmid(\mathfrak{N})$ also $(\mathfrak{N})\,|\,qr^e$ und dann $(\mathfrak{G})\,|\,pq^2r^e$. Aus $(\mathfrak{G}/\mathfrak{K})=q$ folgt $(\mathfrak{K})\,|\,pqr^e$. Der schon benutzte Satz von BRAUER und TUAN liefert wegen der Einfachheit von $\mathfrak{K}$ nun $\mathfrak{K}\cong\mathfrak{A}_5$ oder $\mathfrak{K}\cong\mathfrak{G}_{168}$. Der zweite Fall ist durch unsere Voraussetzung ausgeschlossen. Der erste Fall erfordert $p=5$ und $q\,|\,p-1$, also $q=2$. Dann wäre aber $\mathfrak{G}$ nach II, Satz 4 auflösbar, im Widerspruch zu $\mathfrak{K}\cong\mathfrak{A}_5$.

h) Sei schließlich $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r))$ eine der maximalen Untergruppen $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{G}$. Für $\mathfrak{G}_r=\mathfrak{N}_r$ ist dann $\mathfrak{N}\leq\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r))\lhd\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r))=\mathfrak{J}$. Wegen $\mathfrak{N}\not\lhd\mathfrak{J}$ folgt daraus $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r))=\mathfrak{J}$, d.h. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)\leq\mathfrak{Z}(\mathfrak{J})$. Wie früher können wir wegen $(\mathfrak{G}:\mathfrak{J})=p$ den Satz von BURNSIDE anwenden und erhalten einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{G}/\mathfrak{K})=q$. Wieder kann $\mathfrak{K}$ als einfach angenommen werden. Sicher gilt $\mathfrak{K}\geq_q\mathfrak{N}\geq\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)$ und $\mathfrak{K}=\mathfrak{Z}_p\overline{\mathfrak{J}}$ mit $(\mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{J}})=q$. Aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)\leq\overline{\mathfrak{J}}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)\leq\mathfrak{Z}(\mathfrak{J})$ folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_r)\leq\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{J}})$. Dann kann aber (wieder nach dem BURNSIDEschen Satz) $\mathfrak{K}$ nicht einfach sein, entgegen unserer Annahme.

Damit ist der Beweis von Satz 6 abgeschlossen.

Beweis von Satz 7 durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Wiederum genügt der Nachweis eines von $\mathfrak{E}$ verschiedenen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$.

a) Ist $\mathfrak{D}=\mathfrak{L}\cap\mathfrak{A}\neq\mathfrak{E}$, so haben wir $\mathfrak{D}\lhd\mathfrak{A}$. Dann existiert ein $\mathfrak{K}\lhd\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D}\leq\mathfrak{K}\leq\mathfrak{L}$ (s: ORE [9], S. 436 oder SZÉP-RÉDEI [13]). Als Untergruppe von $\mathfrak{L}$ ist $\mathfrak{K}$ auflösbar. Wir können daher weiterhin annehmen, daß $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{E}$.

b) Ist $\mathfrak{L}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gibt es eine maximale Untergruppe $\mathfrak{L}\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{E}<\mathfrak{A}_1<\mathfrak{A}$. Es folgt $\mathfrak{G}=\{\mathfrak{L}\mathfrak{A}_1\}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\lhd\mathfrak{A}$. Nach [9] oder [13] existiert dann ein $\mathfrak{K}\lhd\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A}_1\leq\mathfrak{K}\leq\mathfrak{L}\mathfrak{A}_1$. Unsere Induktionsannahme sagt uns, daß $\mathfrak{L}\mathfrak{A}_1$ auflösbar ist. Dann ist auch $\mathfrak{K}$ auflösbar, und wir sind fertig. Weiter sei also $\mathfrak{L}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

c) Ist $\mathfrak{A}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar (s. HUPPERT [6], S. 412, Satz 2). Wir können daher annehmen, daß es $\mathfrak{A}$ echt umfassende maximale Untergruppen $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{G}$ gibt. Dann ist $\mathfrak{J}=\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{L}}$ mit $\mathfrak{E}<\overline{\mathfrak{L}}<\mathfrak{L}$. Gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{N}\leq\overline{\mathfrak{L}}$, so existiert nach [9] oder [13] ein $\mathfrak{K}\lhd\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}\leq\mathfrak{K}\leq\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{L}}$. Dann sind wir wieder fertig. Wir können also voraussetzen, daß $\overline{\mathfrak{L}}$ keinen Normalteiler von $\mathfrak{L}$ enthält. Ist $\mathfrak{Z}_n$ der in $\mathfrak{L}$ nach Voraussetzung enthaltene zyklische Normalteiler vom Index q und der

Ordnung n, so gilt insbesondere $\mathfrak{Z}_n \cap \overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{E}$. Dann hat $\overline{\mathfrak{L}}$ notwendig die Ordnung q und ist Vertretergruppe zu $\mathfrak{Z}_n$ in $\mathfrak{L}$, d.h. es gilt $\mathfrak{Z}_n \overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{Z}_n \cap \overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{E}$. Wir bezeichnen $\overline{\mathfrak{L}}$ weiterhin mit $\mathfrak{Z}_q$. Jede $\mathfrak{A}$ umfassende, maximale Untergruppe $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{G}$ hat also die Gestalt $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}\mathfrak{Z}_q$ mit geeignetem $\mathfrak{Z}_q < \mathfrak{L}$.

Ist $p \mid (\mathfrak{A})$, $p \mid n$ und $p \neq q$, so betrachten wir den Normalisator der p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{Z}_n$. Dieser enthält $\mathfrak{L}$; seine Ordnung ist aber wegen $p \mid (\mathfrak{A})$ noch durch mindestens eine weitere Potenz von p teilbar. Da $\mathfrak{L}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, folgt die Invarianz der p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{Z}_n$ in $\mathfrak{G}$. In Zukunft können wir also annehmen, daß $(\mathfrak{A})$ und n nur die Primzahl q als gemeinsamen Primteiler besitzen.

d) Wir stellen eine beliebige der maximalen Untergruppen $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}\mathfrak{Z}_q$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{A}$, also vom Grad q. Dabei wird eine in $\mathfrak{J}$ invariante Untergruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet. $\mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{A}}$ ist isomorph zu einer transitiven und auflösbaren Permutationsgruppe vom Primzahlgrad q (auflösbar nach ITÔ [8]).

Ist $(\mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{A}}) = qs$ mit $s \neq 1$, so gilt $s \mid q-1$. Ist r eine Primzahl mit $r \mid s$, so haben wir $\mathfrak{J}'(r) \neq \mathfrak{J}$. Nun ist $r \mid (\mathfrak{A})$ und $r \neq q$, also $r \nmid n$. Daher ist $\mathfrak{A}_r$ eine r-SYLOW-Gruppe $\mathfrak{G}_r$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}$ ist r-normal. Wegen $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_r) \leq \mathfrak{J}$ gilt $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_r) = \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_r) = \mathfrak{J}$. In $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_r)$ läßt sich somit in jedem Falle eine von $\mathfrak{E}$ verschiedene r-Faktorgruppe abspalten. Aus dem Satz von GRÜN folgt nun $\mathfrak{G}'(r) \neq \mathfrak{G}$. Wegen $r \nmid n$ und $r \neq q$ haben wir $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{G}'(r)$, also $\mathfrak{G}'(r) = \mathfrak{L}\tilde{\mathfrak{A}}$ mit $\tilde{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}$, und $\mathfrak{G}'(r)$ ist nach unserer Induktionsannahme auflösbar.

e) Nun sei $(\mathfrak{J}/\overline{\mathfrak{A}}) = q$, also $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \lhd \mathfrak{J}$ für alle $\mathfrak{J}$. Gibt es eine Primzahl r mit $r \mid (\mathfrak{A})$, $r \neq q$ und $\mathfrak{J}'(r) \neq \mathfrak{J}$, so folgt wegen der r-Normalität von $\mathfrak{G}$ wie eben $\mathfrak{G}'(r) \neq \mathfrak{G}$ und dann die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$. Wir dürfen daher annehmen, daß $(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}') = q^r$. Das q-SYLOW-Komplement ${}_q\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ liegt dann in $\mathfrak{J}'$. Wegen $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{J}$ ist ${}_q\mathfrak{A}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{J}$, dessen Index und Ordnung teilerfremd sind. Nach ZASSENHAUS ([16], S. 136) ist dann ${}_q\mathfrak{A} = \mathfrak{J}' \cap {}_q\mathfrak{A} \times \mathfrak{Z}(\mathfrak{J}) \cap {}_q\mathfrak{A}$, woraus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}) \cap {}_q\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ folgt.

f) Sei nun $q \mid n$. Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe $\mathfrak{G}^*$ der Nebenklassen nach einer der maximalen Untergruppen $\mathfrak{J}$, also vom Grad n, und können annehmen, daß diese Darstellung treu ist; andernfalls hätten wir nämlich einen in $\mathfrak{J}$ liegenden, daher auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{G}$ aufgefunden. Bei unserer Darstellung wird die Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ regulär dargestellt. Da $\mathfrak{J}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, ist diese Darstellung primitiv. Nach einem Satz von SCHUR [11] ist eine primitive Permutationsgrupp , deren Grad keine Primzahl ist und welche einen Vollzyklus (d.h. eine reguläre zyklische Untergruppe) enthält, zweifach transitiv. Alle diese Voraussetzungen sind in unserem Falle erfüllt, sofern n keine Primzahl ist. Ist aber n Primzahl, so ist nach einem Satz von BURNSIDE ([2], S. 341) $\mathfrak{G}^*$ zweifach transitiv oder auflösbar. Wir können also in jedem Falle annehmen, daß $\mathfrak{G}^*$ zweifach transitiv ist.

$\mathfrak{J}$ wird dargestellt durch eine Permutationsgruppe, welche eine Ziffer fest läßt, die übrigen $q-1$ Ziffern aber noch transitiv permutiert. Sei $\mathfrak{J}$ diejenige

Untergruppe von $\mathfrak{J}$, welche noch eine weitere (beliebige, aber fest gewählte) Ziffer fest läßt. Dann gilt $(\mathfrak{J}:\mathfrak{F}) = n-1$ und wegen $q \mid n$ sicher $q \nmid (\mathfrak{J}:\mathfrak{F})$. Insbesondere können wir daher $\mathfrak{F}$ noch so wählen, daß $\mathfrak{Z}_q \leq \mathfrak{F}$ (gemeint ist natürlich das $\mathfrak{Z}_q$ mit $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}_q \mathfrak{A}$), also $\mathfrak{F}$ die Gestalt $\mathfrak{F} = \mathfrak{Z}_q \bar{\mathfrak{A}}$ mit geeignetem $\bar{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}$ hat. Da $\mathfrak{J}$ in den $n-1$ Ziffern transitiv ist, enthält $\mathfrak{F}$ keinen von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von $\mathfrak{J}$. Wegen $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{J}$ gilt nun aber $\bar{\mathfrak{A}} \lhd \mathfrak{Z}_q \bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{F}$. Daher folgt $\mathfrak{N}(\bar{\mathfrak{A}}) \geq \{\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}_q\} = \mathfrak{J}$. Daraus ergibt sich $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}$ und dann $\mathfrak{F} = \mathfrak{Z}_q$ und $(\mathfrak{A}) = n-1$. Sei nun r ein Primteiler von n mit $r \neq q$; gibt es kein solches r, so ist $\mathfrak{L}$ eine q-Gruppe und $\mathfrak{G}$ ist nach ITÔ [8] als Produkt einer abelschen Gruppe mit einer q-Gruppe $\mathfrak{L}$ auflösbar. Übergehen wir den trivialen Fall $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_r) = \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_r) = \mathfrak{L}$, sofern wir $\mathfrak{G}_r \leq \mathfrak{Z}_n$ wählen, was wegen $r \nmid (\mathfrak{A})$ geht. Nach einem Satz von SYLOW (SPEISER [12], S. 70, Satz 82) folgt $(\mathfrak{G}:\mathfrak{L}) = (\mathfrak{A}) = n-1 \equiv 1 (r)$. Daraus erhalten wir $r \mid n-2$ und wegen $r \mid n$ schließlich $r = 2$. Nun haben wir wegen $q \neq r = 2$ die Beziehungen $n = 2^\alpha q^\beta$ und $(\mathfrak{G}) = n(n-1)q$. Daher ist $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{L}_2$ zyklisch, also bekanntlich (ZASSENHAUS [16], S. 133) $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2) \cong \mathfrak{G}_2$. Nach ITÔ [8] ist $\mathfrak{G}'(2) = \mathfrak{L}_q \mathfrak{A}$ auflösbar, womit wir fertig sind. Im folgenden dürfen wir daher annehmen, daß $q \nmid n$ gilt.

g) Wegen $q \nmid n$ ist eine beliebige q-SYLOW-Gruppe $\mathfrak{J}_q$ von $\mathfrak{J}$ auch q-SYLOW-Gruppe $\mathfrak{G}_q$ von $\mathfrak{G}$. Aus $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{J}$ und dem Ergebnis unter e) folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q) \cap {}_q\mathfrak{A} \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{J}) \cap {}_q\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$. Daher ist $\mathfrak{G}_q$ in $\mathfrak{J}$ eigener Normalisator.

Wie unter e) folgt wegen $q \nmid n$ durch Anwendung des Satzes von ZASSENHAUS (diesmal mit $\mathfrak{Z}_n$ an Stelle von ${}_q\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}$ an Stelle von $\mathfrak{J}$) die Beziehung $\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{L}' \times \mathfrak{Z}(\mathfrak{L})$. Ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L}) \neq \mathfrak{E}$, so gibt es eine Primzahl r mit $r \mid (\mathfrak{Z}(\mathfrak{L}))$. Dann ist $\mathfrak{L}'(r) \neq \mathfrak{L}$.

Schließen wir den trivialen Fall $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_r) = \mathfrak{G}$ aus, so dürfen wir mit $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{L}_r$ annehmen, daß $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_r) = \mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{G}_r$ abelsch ist, folgt nun nach GRÜN $\mathfrak{G}'(r) \neq \mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}'(r)$ hat $\mathfrak{G}'(r)$ die Gestalt $\mathfrak{G}'(r) = \mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{L}}$ und ist nach unserer Induktionsannahme oder nach ITÔ [8] (falls $\tilde{\mathfrak{L}}$ abelsch ist) auflösbar. Weiterhin können wir daher $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{E}$ annehmen.

h) Sei $\mathfrak{G}_q = \mathfrak{Z}_q \mathfrak{A}_q$ und $X \in \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)$. Dann hat X die Gestalt $X = Z_q^\alpha Z_n^\beta A$ mit $A \in \mathfrak{A}$ und geeigneten α, β. Nun erhalten wir

$$\mathfrak{Z}_q^X = \mathfrak{Z}_q^{Z_n^\beta A} \leq \mathfrak{A}\mathfrak{Z}_q, \quad \text{also} \quad \mathfrak{Z}_q^{Z_n^\beta} \leq \{\mathfrak{A}\mathfrak{Z}_q\}^{A^{-1}} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{A}\mathfrak{Z}_q \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{Z}_q.$$

Somit ist $\mathfrak{Z}_q^{Z_n^\beta} = \mathfrak{Z}_q$, daher $Z_n^\beta \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{L})$ und dann nach g) $Z_n^\beta = E$. Demnach liegt $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q)$ in $\mathfrak{J}$ und nach obigem ist dann sogar $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_q) = \mathfrak{G}_q$. Ist $\mathfrak{G}_q$ abelsch und dann $\mathfrak{G}$ q-normal, so gilt nach GRÜN $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(q) \cong \mathfrak{G}_q$. Dann folgt wegen $\mathfrak{Z}_n \leq \mathfrak{G}'(q)$ und ${}_q\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}'(q)$ sofort $\mathfrak{G}'(q) = \mathfrak{Z}_n {}_q\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}'(q)$ ist nach ITÔ [8] auflösbar.

Ist aber $\mathfrak{G}_q' \neq \mathfrak{E}$, so liegt wegen $\mathfrak{A}_q \lhd \mathfrak{G}_q$ sicher $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)$ in $\mathfrak{A}_q$. Dann haben wir $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))$, also unter Ausschluß des trivialen Falles $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) = \mathfrak{G}$ entweder $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) = \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) = \mathfrak{J}$. Jedenfalls ist dann in $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))$ eine von $\mathfrak{E}$ verschiedene q-Faktorgruppe abspaltbar. Ist $\mathfrak{G}$ q-normal, so liefert der GRÜNsche Satz uns $\mathfrak{G}'(q) \neq \mathfrak{G}$. Sicher ist $\mathfrak{Z}_n \leq \mathfrak{G}'(q)$ und ${}_q\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}'(q)$. Ferner haben wir ähnlich wie im Beweis von Satz 6, e) die Beziehungen

$$\mathfrak{G}'(q)_q = \mathfrak{G}'(q) \cap \mathfrak{G}_q \leq \mathfrak{G}'(q) \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) = \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))'(q) \leq \mathfrak{A};$$

denn offenbar ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))'(q) \leq \mathfrak{G}'(q) \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))$ und es gilt sogar das Gleichheitszeichen, denn

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(q) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))/\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))'(q) \qquad \text{(nach GRÜN)}$$

und

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(q) = \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))\,\mathfrak{G}'(q)/\mathfrak{G}'(q) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))/\mathfrak{G}'(q) \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)),$$

woraus $(\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))'(q)) = (\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) \cap \mathfrak{G}'(q))$ folgt. Damit erhalten wir nun $\mathfrak{G}'(q) = \mathfrak{Z}_n\,{}_q\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}'(q)_q = \mathfrak{Z}_n\bar{\mathfrak{A}}$ mit geeignetem $\bar{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}$. Nach ITÔ [8] ist dann $\mathfrak{G}'(q)$ auflösbar. Weiterhin können wir also voraussetzen, daß $\mathfrak{G}$ nicht q-normal ist.

i) Da $\mathfrak{G}$ nicht q-normal ist, ist insbesondere $\mathfrak{G}'_q \neq \mathfrak{E}$ und dann wie unter h) $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q) \leq \mathfrak{A}_q$. In e) hatten wir gezeigt, daß $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}) \cap {}_q\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ ist. Damit ergibt sich nun $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{J})$.

Da $\mathfrak{G}$ nicht q-normal ist, gibt es ein Element $X \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X \leq \mathfrak{G}_q < \mathfrak{J}$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)$. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{J})$ ist sicher $X \notin \mathfrak{J}$, daher $\mathfrak{J}^X \neq \mathfrak{J}$, wenn wir den trivialen Fall $\mathfrak{J} \lhd \mathfrak{G}$ übergehen. Sei nun $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) > q$. Aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X \leq \mathfrak{G}_q$ folgt dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X \cap \mathfrak{A}_q = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}) \geq \{\mathfrak{A}, \mathfrak{J}^X\}$. Wir dürfen annehmen, daß $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^X\} = \mathfrak{G}$: ist nämlich ${}_q\mathfrak{A}^X = {}_q\mathfrak{A}$, so folgt $\mathfrak{N}({}_q\mathfrak{A}) \geq \{\mathfrak{J}, X\} = \mathfrak{G}$ und wir sind für ${}_q\mathfrak{A} \neq \mathfrak{E}$ fertig; ist aber ${}_q\mathfrak{A}^X \neq {}_q\mathfrak{A}$, so besitzt $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^X\}$ mindestens zwei verschiedene Untergruppen der Ordnung $({}_q\mathfrak{A})$, kann daher mit keiner der maximalen Obergruppen $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{A}$ übereinstimmen, ist folglich gleich $\mathfrak{G}$; für ${}_q\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ schließlich ist $(\mathfrak{J}) = q^\gamma$ und $\mathfrak{G}$ nach ITÔ [8] auflösbar. Aus $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}) \geq \{\mathfrak{A}, \mathfrak{J}^X\} \geq \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^X\} = \mathfrak{G}$ erhalten wir nun $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{G}$. Im folgenden kann daher $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) = q$ angenommen werden.

j) Sei X wie unter i) bestimmt und $\mathfrak{F} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^X$. Ferner sei p eine Primzahl mit $p \mid (\mathfrak{F})$ und $p \neq q$. Dann ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{F}_p) \geq \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^X\} = \mathfrak{G}$ und wir sind fertig. Also können wir annehmen, daß $(\mathfrak{F}) = q^\varrho$. Weiter haben wir $(\mathfrak{F}/\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}_q) \mid q$ und ebenso $(\mathfrak{F}/\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}_q^X) \mid q$, woraus sich $(\mathfrak{F}/\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}_q \cap \mathfrak{A}_q^X) \mid q^2$ ergibt. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{A}_q \cap \mathfrak{A}_q^X = \mathfrak{E}$ ist; sonst wäre nämlich $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_q \cap \mathfrak{A}_q^X) \geq \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^X\} = \mathfrak{G}$. Daher ist $(\mathfrak{F}) \mid q^2$.

Ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X \cap \mathfrak{A} \neq \mathfrak{E}$, so erhalten wir $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) \geq \{\mathfrak{A}, \mathfrak{J}^X\} \geq \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^X\} = \mathfrak{G}$. Daher sei $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ und dann wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X \leq \mathfrak{J}$ notwendig $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X\,\mathfrak{A}$. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X \leq \mathfrak{G}_q$ ist ferner $\mathfrak{J}^X = \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X) \geq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)$. Damit bekommen wir $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q) \leq \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^X$ und dann $\mathfrak{F} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^X \geq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q) \times \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X$ [wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q) \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X$ und $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) = q$ tritt wirklich das direkte Produkt von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X$ auf!]. Mit Hilfe von $(\mathfrak{F}) \mid q^2$ ergibt sich nun $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q) \times \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X$. Wegen $\mathfrak{G}'_q \neq \mathfrak{E}$ ist sicher $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}_q$. Ferner ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) = \mathfrak{J}$ und $\mathfrak{C}(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)^X) = \mathfrak{J}^X$, mithin $\mathfrak{C}(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^X = \mathfrak{F}$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})/\mathfrak{C}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{F})/\mathfrak{F}$ ist daher isomorph zu einer Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{F}$, also isomorph zu einer Untergruppe der linearen Gruppe $GL(2, q)$ in zwei Dimensionen mod q. Wegen $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}_q$ gibt es nun eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}_q$ mit $\mathfrak{F} < \mathfrak{U}$ und $(\mathfrak{U}/\mathfrak{F}) = q$, ebenso gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}_q^X$ mit $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{V}$ und $(\mathfrak{V}/\mathfrak{F}) = q$. Wegen $\mathfrak{F} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^X$ ist $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}$. Daher besitzt $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})/\mathfrak{F}$, dessen Ordnung nicht durch q^2 teilbar ist [als Untergruppe von $GL(2, q)$] bekanntlich mindestens $q+1$ q-SYLOW-Gruppen. Aber die volle

lineare Gruppe $GL(2,q)$ besitzt nur $q+1$ q-SYLOW-Gruppen, und diese erzeugen die unimodulare Gruppe $SL(2,q)$. Wir haben damit gezeigt, daß $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ bei Transformation auf $\mathfrak{F}$ sicher diejenigen Automorphismen bewirkt, welche linearen Abbildungen aus $SL(2,q)$ entsprechen.

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)$ möge von C erzeugt werden, so daß C und C^X eine Basis von $\mathfrak{F}$ bilden. Nach dem eben erhaltenen Ergebnis gibt es dann ein $Y \in \mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ mit $C^Y = C^{-1}$ und $(C^X)^Y = (C^X)^{-1}$. Es folgt nun $Y \in \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q)) = \mathfrak{J} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_q))$, also $C^Y = C^{-1} = C$. Für $q > 2$ ist dies ein Widerspruch, womit wir fertig sind. Für $q = 2$ ist aber unsere Behauptung schon in II, Satz 4 enthalten.

Damit ist Satz 7 in allen Teilen bewiesen.

Beweis von Satz 8 wieder durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Die Voraussetzung, daß keine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sich homomorph auf die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_5$ abbilden läßt, überträgt sich offenbar sofort auf Untergruppen und Faktorgruppen. Ferner hat jede Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ eine Zerlegung $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{L}}\,\overline{\mathfrak{A}}$; dabei ist $\overline{\mathfrak{L}}$ abelsch oder es hat einen zyklischen Normalteiler vom Index 2, erfüllt also die Voraussetzungen von Satz 4, oder es hat einen zyklischen Normalteiler vom Index 4 mit zyklischer Faktorgruppe, entspricht also den Voraussetzungen von Satz 8. Daher können wir annehmen, daß jedes von $\mathfrak{G}$ verschiedene homomorphe Bild von $\mathfrak{G}$ auflösbar ist. Somit genügt der Nachweis eines von $\mathfrak{E}$ verschiedenen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$.

a) Zunächst läßt sich ein Teil der Schlüsse von Satz 7 ungeändert übertragen. Wie dort können wir uns darauf beschränken, daß (a) $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{E}$, (b) $\mathfrak{L}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, (c) $\mathfrak{A}$ keine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Ist $\mathfrak{Z}_p$ der zyklische Normalteiler von $\mathfrak{L}$, so können wir wie in (c) annehmen, daß für eine $\mathfrak{A}$ echt umfassende maximale Untergruppe $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{G}$ gilt $\mathfrak{Z}_p \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{E}$. Dann hat $\mathfrak{J}$ die Gestalt $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}\mathfrak{Z}$, wobei nun aber $\mathfrak{Z}$ eine zyklische Untergruppe von $\mathfrak{L}$ der Ordnung 2 oder 4 sein kann (hier tritt ein Unterschied gegenüber dem Beweis von Satz 7 auf!). Ebenso wie in c) können wir voraussetzen, daß $p \nmid (\mathfrak{A})$.

b) Sei nun zunächst $\mathfrak{J}$ von der Gestalt $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}\mathfrak{Z}_4$ mit $(\mathfrak{Z}_4) = 4$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{Z}_4\mathfrak{Z}_p$. Wir stellen $\mathfrak{J}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{A}$, also vom Grad 4. Dabei werde $\mathfrak{J}$ auf $\overline{\mathfrak{J}} \cong \mathfrak{J}/\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{A}$ abgebildet. Da $\mathfrak{Z}_4$ auf einen 4-Zyklus abgebildet wird, enthält $\overline{\mathfrak{J}}$ ungerade Permutationen, ist daher von der alternierenden Gruppe verschieden. Auch $\overline{\mathfrak{J}} \cong \mathfrak{S}_4$ ist ausgeschlossen, denn die Untergruppe von $\overline{\mathfrak{J}}$, welche eine bestimmte Ziffer fest läßt, ist als homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$ abelsch, während die entsprechende Untergruppe in $\mathfrak{S}_4$ nichtabelsch ist. Daher gilt also $(\overline{\mathfrak{J}}) = 2^\varrho$ mit $\varrho \leq 3$. Der Normalteiler $\mathfrak{M}$ umfaßt somit alle $\mathfrak{A}_q$ mit $q \geq 3$. Da $\mathfrak{M}$ als Untergruppe von $\mathfrak{A}$ abelsch ist, haben wir $\mathfrak{J}_q = \mathfrak{A}_q \trianglelefteq \mathfrak{M}$ und dann auch $\mathfrak{A}_q \trianglelefteq \mathfrak{J}$ für $q \geq 3$. Somit ist $\mathfrak{J}$ 2-nilpotent, d.h. $\mathfrak{J}$ besitzt ein invariantes 2-SYLOW-Komplement. Ist $\mathfrak{J}'$ nilpotent, so ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_p\mathfrak{J}$ nach II, Satz 5 auflösbar.

Es gilt $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{C}({}_2\mathfrak{A}) \trianglelefteq \mathfrak{N}({}_2\mathfrak{A}) = \mathfrak{J}$. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}({}_2\mathfrak{A}) \trianglelefteq \mathfrak{J}$, so folgt $\mathfrak{J}' \leq \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}'$ ist nilpotent. Ist aber $\mathfrak{C}({}_2\mathfrak{A}) = \mathfrak{J}$, so erhalten wir $\mathfrak{J} = {}_2\mathfrak{A} \times \mathfrak{J}_2$ und sogar $\mathfrak{J}$ selbst ist nilpotent, dann $\mathfrak{J}'$ erst recht. Es bleibt der Fall zu betrachten,

daß $\mathfrak{C}(_2\mathfrak{A})$ die Gestalt $\mathfrak{A}\mathfrak{Z}_2$ mit $(\mathfrak{Z}_2)=2$ und $\mathfrak{Z}_2<\mathfrak{L}$ hat. Dann ist $\mathfrak{C}(_2\mathfrak{A})$ nilpotent und wegen $(\mathfrak{Z}/\mathfrak{C}(_2\mathfrak{A}))=2$ bekommen wir $\mathfrak{Z}'\leq\mathfrak{C}(_2\mathfrak{A})$, womit auch in diesem Falle $\mathfrak{Z}'$ nilpotent ist. Damit ist unser Satz auf Satz 5 von II zurückgeführt.

c) Nun sei $(\mathfrak{Z})=2(\mathfrak{A})$ für jede $\mathfrak{A}$ umfassende maximale Untergruppe $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$ und dann $\mathfrak{A}\lhd\mathfrak{Z}$. Ein solches $\mathfrak{Z}$ hat die Gestalt $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_2\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{Z}_2<\mathfrak{Z}_4<\mathfrak{L}$. Eine geeignete 2-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$ hat die Gestalt $\mathfrak{G}_2=\mathfrak{Z}_4\mathfrak{A}_2$. Gibt es ein $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N}\lhd\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{N}\leq\mathfrak{A}_2$, so erhalten wir $\mathfrak{N}(\mathfrak{N})\geq\{\mathfrak{A},\mathfrak{Z}_4\}=\mathfrak{G}$ und sind fertig. Daher können wir annehmen, daß $\mathfrak{A}_2$ keinen Normalteiler von $\mathfrak{G}_2$ enthält. Die Darstellung von $\mathfrak{G}_2$ als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{A}_2$ ist daher treu und vom Grad 4. Daraus folgt $(\mathfrak{G}_2)\,|\,8$, also $(\mathfrak{A}_2)\,|\,2$.

Sei zuerst $2\nmid(\mathfrak{A})$. Nun stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{A}$, also vom Grad $4p$. Diese Darstellung kann als treu angenommen werden, da sonst $\mathfrak{A}$ einen auflösbaren, von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthalten würde. Bei dieser Darstellung wird $\mathfrak{L}$ regulär dargestellt. Ein erzeugendes Element Z_4 von $\mathfrak{Z}_4$ besteht daher aus p Zyklen der Länge 4, ist also ungerade. Die geraden Permutationen von $\mathfrak{G}$ bilden daher einen Normalteiler $\mathfrak{H}\neq\mathfrak{G}$. Wegen $2\neq p$ und $2\nmid(\mathfrak{A})$ gilt $\mathfrak{Z}_p\leq\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}\leq\mathfrak{H}$, also $\mathfrak{H}=\overline{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}$ mit $\overline{\mathfrak{L}}<\mathfrak{L}$. $\overline{\mathfrak{L}}$ hat die Ordnung $2p$, ist daher abelsch oder eine Diedergruppe. Nach ITÔ [8] oder II, Satz 4 folgt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$.

Nun sei $(\mathfrak{A}_2)=2$. Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ der Nebenklassen von $\mathfrak{L}$ und können annehmen, daß diese Darstellung treu ist. Da $\mathfrak{L}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, ist $\overline{\mathfrak{G}}$ primitiv. $\overline{\mathfrak{A}}$ ist eine reguläre abelsche Permutationsgruppe mit zyklischer 2-SYLOW-Gruppe. Nach WIELANDT [14] ist dann $\overline{\mathfrak{G}}$ zweifach transitiv. Mit $(\mathfrak{A})=a$ folgt $a-1\,|\,4p=(\mathfrak{L})$.

Andererseits ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p)\geq\mathfrak{L}$ für $\mathfrak{G}_p=\mathfrak{Z}_p$, also unter Ausschluß des trivialen Falles $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p)=\mathfrak{G}$ wegen der Maximalität von $\mathfrak{L}$ sicher $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p)=\mathfrak{L}$. Ein bekannter Satz von SYLOW besagt nun

$$(\mathfrak{G}:\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p))=(\mathfrak{G}:\mathfrak{L})=(\mathfrak{A})=a\equiv 1\,(p),$$

also $p\,|\,a-1\,|\,4p$. Es bleiben die Möglichkeiten $p=a-1$, $2p=a-1$, $4p=a-1$. Wegen $2\,|\,a$ kommt aber nur $p=a-1$ in Frage.

Für $q\geq 3$ und $q\,|\,(\mathfrak{A})$ ist $\mathfrak{A}_q\lhd\mathfrak{A}\lhd\mathfrak{Z}$, also $\mathfrak{A}_q\lhd\mathfrak{Z}$. Unter Ausschluß von $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_q)=\mathfrak{G}$ folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_q)=\mathfrak{Z}$, daher wegen $\mathfrak{A}_q=\mathfrak{G}_q$ wieder nach SYLOW $(\mathfrak{G}:\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_q))=(\mathfrak{G}:\mathfrak{Z})=2p\equiv 1(q)$. Andererseits ist $q\,|\,a=p+1$, daher auch $q\,|\,(2p-1)+(p+1)=3p$, also $q=3$ wegen $q\neq p$. Daraus bekommen wir nun $a=3^\alpha 2$. Die gleiche Überlegung liefert uns $(\mathfrak{G}:\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_3))=2p=2(a-1)=2(2\,3^\alpha-1)\equiv 1-3\,(3^2)$ für $\alpha>1$. Nach GRÜN [3] gilt folgender Satz:

Sei $p^n\top(\mathfrak{G})$, $(\mathfrak{G}:\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p))\equiv 1+ap^m\,(p^{m+1})$ mit $(a,p)=1$. Dann gibt es ein $\mathfrak{G}_p^T\neq\mathfrak{G}_p$ mit $(\mathfrak{G}_p\cap\mathfrak{G}_p^T)\geq p^{n-m}$.

In unserem vorliegenden Falle ist $m=1$. Mit $\mathfrak{D}=\mathfrak{G}_3\cap\mathfrak{G}_3^T$ erhalten wir daher $(\mathfrak{D})\geq 3^{\alpha-1}$. Ferner ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})\geq\{\mathfrak{A},\mathfrak{A}^T\}$. Da $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ sicher die verschiedenen 3-SYLOW-Gruppen $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_3^T$ umfaßt, aber $\mathfrak{Z}$ nur eine 3-SYLOW-Gruppe hat, folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})=\mathfrak{G}$ und wir sind fertig, falls $\alpha>1$ ist. Ist aber $\alpha=1$, so

haben wir $a=6$, $p=5$ und $(\mathfrak{G})=120$. Dann besitzt $\mathfrak{G}$ eine treue Darstellung vom Grad 6 (Permutation der Nebenklassen von $\mathfrak{L}$), ist somit bekanntlich zur symmetrischen $\mathfrak{S}_5$ isomorph.

Literatur

[1] BRAUER, R., and H. F. TUAN: On simple groups of finite order. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 756—766 (1945). — [2] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, sec. edit. 1911. — [3] GRÜN, O.: Beiträge zur Gruppentheorie. III. Math. Nachr. **1**, 1—24 (1948). — [4] HALL, P.: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [5] HUPPERT, B.: Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. Math. Z. **59**, 1—7 (1953). — [6] HUPPERT, B.: Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. **60**, 409—434 (1954). — [7] HUPPERT, B., u. N. ITÔ: Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II. Math. Z. **61**, 94—99 (1954). — [8] ITÔ, N.: Remarks on factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 83—84 (1951). — [9] ORE, O.: Contributions to the theory of groups of finite order. Duke Math. J. **5**, 431—460 (1938). — [10] PERRON, O.: Algebra II, 2. Aufl. 1933. — [11] SCHUR, I.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Sitzgsber. Berl. Akad. **1933**, 598—623. — [12] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937. — [13] SZÉP, J., u. L. RÉDEI: On factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **13**, 235—238 (1950). — [14] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Math. Z. **40**, 582—587 (1936). — [15] WIELANDT, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951). — [16] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I. 1937.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 28. April 1955)

PUTNAM, C. R.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 149/50 (1956)

A Note on Inverses of Differential Operators*)

By
C. R. PUTNAM

Let $q_1(t)$, $q_2(t)$ be continuous, real-valued functions on the half-line $0 \leq t < \infty$ and consider the differential operators L_1, L_2:

$$(1_1) \quad L_1 x = -x'' - q_1 x, \qquad (1_2) \quad L_2 x = -x'' - q_2 x,$$

with respective domains consisting of the functions $x = x(t)$ which satisfy a fixed boundary condition, say $x(0) = 0$, have absolutely continuous first derivatives, and, together with $L_1 x$ or $L_2 x$, are of class $L^2[0, \infty)$. Then $L_1 - L_2$, where $L_1 x - L_2 x = (q_2 - q_1) x$, has a domain $\Omega = \mathfrak{D}_{L_1} \mathfrak{D}_{L_1}$ dense on $L^2[0, \infty)$. Suppose that both L_1 and L_2 are self-adjoint (that is, of the limit-point type) and let z be any complex number not in the spectrum of L_1 or L_2 (e.g., z any non-real complex number). Then both operators $(L_k - zI)^{-1}$ are normal and bounded. If $y = (L_1 - zI)^{-1} x$ is in Ω, an application of the operator equation

$$(2) \quad (L_1 - zI) - (L_2 - zI) = (q_2 - q_1) I \qquad (I, \text{ the identity operator}),$$

valid on Ω $(= \mathfrak{D}_{L_1 - zI} \mathfrak{D}_{L_1 - zI})$, to y, followed by an application of $(L_2 - zI)^{-1}$ to the resulting functional equation shows that the operator equation

$$(3) \quad (L_2 - zI)^{-1} - (L_1 - zI)^{-1} = (L_2 - zI)^{-1} [(q_2 - q_1) I] (L_1 - zI)^{-1}$$

holds for all elements x in $(L_1 - zI)\Omega$.

It was pointed out in [2], p. 84, that standard theorems in the theory of operators imply that if

$$(4) \quad |q_2(t) - q_1(t)| < \text{const},$$

so that $L_1 - L_2$ is bounded on its domain, and if (1_1) is of the limit-point type (so that L_1 is self-adjoint), then (1_2) is of the limit-point type. If (1_1) and/or (1_2) are of the limit-point type and if

$$(5) \quad q_2(t) - q_1(t) \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty,$$

then the essential (cluster) spectra S_1', S_2' of (1_1), (1_2) are identical; cf. [1], [3]. It was remarked in [2], p. 84, that this fact is a consequence of standard theorems in the theory of operators; however, the indications of the proof *loc. cit.* are incorrect. A simple proof of this fact as a consequence of the equation (3) will be given below. In fact, it will be shown that *the difference*

*) This work was supported by the National Science Foundation research grant NSF—G 481.

$(L_2 - zI)^{-1} - (L_1 - zI)^{-1}$ *is completely continuous whenever* (5) *holds* [although $(q_2 - q_1)I$ is completely continuous only when $q_1(t) \equiv q_2(t)$, that is, when $L_1 = L_2$].

In view of (5), or even (4), $\mathfrak{D}_{L_1} = \mathfrak{D}_{L_2}$, hence $\Omega = \mathfrak{D}_{L_1}$ $(= \mathfrak{D}_{L_1 - zI})$. Consequently, $(L_1 - zI)\Omega$ is the entire HILBERT space $\mathfrak{H}$: $L^2[0, \infty)$ and (3) holds for all x in H. [Of course, this last assertion holds whenever $(L_1 - zI)\Omega$ is dense, whether or not (5), or (4), is assumed.] The operator $(L_1 - zI)^{-1}$ is the integral operator belonging to a GREEN kernel $G(t, s)$ for which $\|G(t, .)\|$ is a continuous function of t. Hence if the elements $x_1(t), x_2(t), \ldots$ of $\mathfrak{H}$ tend weakly to 0 as $n \to \infty$, then the sequence of functions

$$y_n(t) = (L_1 - zI)^{-1} x_n = \int_0^\infty G(t, s)\, x_n(s)\, ds$$

is uniformly bounded on every t-interval, is such that $y_n(t) \to 0$ as $n \to \infty$ for every fixed t, and satisfies $\|y_n\| < \text{const}$. The boundedness of $(L_k - zI)^{-1}$ and relation (5) now imply that $[(q_2 - q_1)I]\,(L_1 - zI)^{-1}$, hence $(L_2 - zI)^{-1}[(q_2 - q_1)I]\,(L_1 - zI)^{-1}$, is completely continuous. The italicized assertion now follows from (3); as a consequence, the essential spectra of $(L_k - zI)^{-1}$ are identical, and hence also $S_1' = S_2'$.

References

[1] HARTMAN, P.: On the spectra of slightly disturbed linear oscillators. Amer. J. Math. **71**, 71—79 (1949). — [2] HARTMAN, P., and A. WINTNER: On perturbations of the continuous spectrum of the harmonic oscillator. Amer. J. Math. **74**, 79—85 (1952). — [3] PUTNAM, C. R.: The comparison of spectra belonging to potentials with a bounded difference. Duke Math. J. **18**, 267—273 (1951).

Dept. of Math., Purdue University, Lafayette, Ind. (U.S.A.)

(Eingegangen am 21. Juli 1955)

JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 151—158 (1956)

Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. II*)

Von
WOLFGANG JURKAT und ALEXANDER PEYERIMHOFF

Dieser zweite Teil unserer Arbeit befaßt sich mit den Lokalisationsverhältnissen bei absoluter Summierbarkeit von FOURIER-Reihen. Während bei trigonometrischen Reihen die Summierbarkeit nach I mit dem lokalen Verhalten eines mehrfachen Integrales zusammenhängt, können wir im Spezialfall der FOURIER-Reihen die Lokalisation auch direkt auf die erzeugende Funktion beziehen. Dabei treten entscheidend gewisse Koeffizientenbedingungen auf, von deren Erfülltsein es abhängt, ob für die FOURIER-Reihen einer Klasse von Funktionen Lokalisation besteht oder nicht. Durch die Untersuchung dieser Bedingungen für zahlreiche bekannte Klassen ist es möglich, in vollständiger und einheitlicher Form die Lokalisationsverhältnisse zu beschreiben. Unsere Resultate umfassen insbesondere die vielen bisher bekannten Einzelergebnisse auf diesem Gebiet.

§ 4. Allgemeine Lokalisationssätze für FOURIER-Reihen

4.1. Nach I, Satz 2 ist die Summierbarkeit einer trigonometrischen Reihe abhängig vom lokalen Verhalten eines $(k+p+2)$-fachen Integrales und von einer Koeffizientenbedingung. Bei FOURIER-Reihen können wir auf Grund der gliedweisen Integrierbarkeit an Stelle des Integrales auch die erzeugende Funktion heranziehen und erhalten so

Satz 4. *Zwei* FOURIER-*Reihen* $f(\varphi) \sim \sum_0^\infty \Re a_n e^{in\varphi}$ *und* $g(\varphi) \sim \sum_0^\infty \Re b_n e^{in\varphi}$ *sind genau dann für* $|\varphi| < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi$, $|C_\alpha|$*-äquisummierbar* $(\alpha > -1)$, *wenn gilt:*

a) Für eine ganze Zahl $p \geq 0$ *ist*

$$\overline{\Delta}^p \frac{a_n - b_n}{(n+1)^\alpha} = a(1) \quad \textit{oder auch} \quad \overline{\Delta}^p (a_n - b_n) = a(n^\alpha);$$

b) es gibt eine periodische Funktion $h(\varphi)$, *die für fast alle* $|\varphi| < \varepsilon$ *mit* $f(\varphi) - g(\varphi)$ *übereinstimmt und deren* FOURIER-*Reihe für* $|\varphi| < \varepsilon$ $|C_\alpha|$*-summierbar ist.*

*) Der erste Teil dieser Arbeit — fortan als I zitiert — erschien in Math. Z. **60**, 255—270 (1954). Die Numerierung der Sätze, Formeln und Fußnoten erfolgt hier im Anschluß an den ersten Teil, auf den auch bezüglich der Bezeichnungen grundsätzlich verwiesen sei. [Zum Beispiel bedeutet $x_n = a(y_n)$, daß von einer Stelle ab $x_n = a_n y_n$ ist mit $\sum |a_n - a_{n-1}| < \infty$.] Das Literaturverzeichnis für den zweiten Teil befindet sich am Schluß der vorliegenden Note.

Die genauen Bedingungen für die $|C_\alpha|$-Äquisummierbarkeit der konjugierten Reihen $\sum \Im a_n e^{in\varphi}$ und $\sum \Im b_n e^{in\varphi}$ für $|\varphi| < \varepsilon$ sind:

$\bar{a}) = a)$ *und*

$\bar{b})$ *es gibt eine periodische Funktion $h(\varphi)$, die für fast alle $|\varphi| < \varepsilon$ mit $f(\varphi) - g(\varphi)$ übereinstimmt und deren konjugierte* FOURIER*-Reihe für $|\varphi| < \varepsilon$ $|C_\alpha|$-summierbar ist.*

Zusatz 1. Ersetzt man die $|C_\alpha|$-Summierbarkeit durch gewöhnliche C_α-Summierbarkeit, so bleibt Satz 4 wörtlich richtig, wenn man bei $a) = \bar{a})$ entsprechend a durch o ersetzt.

Zusatz 2. Ersetzt man die $|C_\alpha|$-Summierbarkeit für $|\varphi| < \varepsilon$ durch gleichmäßige C_α-Summierbarkeit in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $|\varphi| < \varepsilon$, so bleibt Satz 4 wieder wörtlich richtig, wenn man bei $a) = \bar{a})$ entsprechend a durch o ersetzt.

4.2. *Beweis.* Die Notwendigkeit von $a) = \bar{a})$ folgt aus I, Satz 2, und die Notwendigkeit von b) bzw. $\bar{b})$ erkennt man sofort, indem man $b(\varphi) = f(\varphi) - g(\varphi)$ setzt für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Für den hinreichenden Teil des Beweises zeigen wir durch Anwendung von I, Satz 2, daß die FOURIER-Reihen bzw. konjugierten FOURIER-Reihen von $f - g$ und h äquisummierbar sind für $|\varphi| < \varepsilon$. Ist $h(\varphi) \sim \sum \Re c_n e^{in\varphi}$, so ist zunächst wegen b) bzw. $\bar{b})$ nach Satz 2 $\overline{\Delta}^p \frac{c_n}{(n+1)^\alpha} = a(1)$ oder auch $\overline{\Delta}^p c_n = a(n^\alpha)$. Außerdem ist das $(k+p+2)$-fache Integral der FOURIER-Reihe von $(f-g)-h$ ein Polynom eines Grades $\leq k+p+1$ für $|\varphi| < \varepsilon$ (denn FOURIER-Reihen dürfen gliedweise integriert werden). Daraus folgt die behauptete Äquisummierbarkeit nach Satz 2 (beachte I, § 2.4; dort steht in der vorletzten Zeile f S. 266 versehentlich $k+p+2$ statt $k+p+1$).

Die Zusätze von Satz 4 lassen sich ebenso auf die Zusätze von Satz 2 zurückführen.

4.3. Nach Satz 4 ist das Summierungsverhalten von FOURIER-Reihen abhängig von lokalen Eigenschaften der erzeugenden Funktion für alle FOURIER-Reihen, deren Koeffizienten eine vom Index des Verfahrens abhängige Bedingung erfüllen (Satz 4 mit $h \equiv 0$). Es erscheint nun ganz natürlich, Klassen von erzeugenden Funktionen[22]) zu betrachten, für welche die Koeffizientenbedingung wegfällt, d.h. für alle Funktionen der Klasse erfüllt ist. Naturgemäß werden solche Klassen vom Index des Verfahrens abhängen. Den einfachsten Fall bietet der Raum aller (integrierbaren und mit 2π periodischen) Funktionen, d.h. der Fall des gewöhnlichen RIEMANNschen Lokalisationssatzes für FOURIER-Reihen (daß hier die Koeffizientenbedingung wegfällt, ist gerade der Inhalt des RIEMANNschen Lemmas).

Definition. Es sei eine Funktionenklasse K vorgegeben. $|C_\alpha|$-Lokalisation für die FOURIER-Reihen (konjugierten FOURIER-Reihen) aus K an einer

[22]) Das heißt stets integrierbare und mit 2π periodische Funktionen. Wir werden dies im folgenden oft stillschweigend voraussetzen.

Stelle φ_0 bedeutet: Sind $f, g \in K$ und $0 < \varepsilon < \pi$, so hat $f(\varphi) = g(\varphi)$ für $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$ stets die $|C_\alpha|$-Äquisummierbarkeit ($\alpha > -1$) der FOURIER-Reihen (konjugierten FOURIER-Reihen) von f und g an der Stelle φ_0 zur Folge.

Eine entsprechende Definition gilt für (gewöhnliche) C_α-Lokalisation (die wegen $|C_\alpha| \leqq C_\alpha$ stets eine Folge der $|C_\alpha|$-Lokalisation ist).

Besteht C_α-Lokalisation für die FOURIER-Reihen (konjugierten FOURIER-Reihen) aus einer Klasse K an allen Stellen φ, so folgt aus der obigen Definition sofort: Ist J ein beliebiges offenes Intervall, $f, g \in K$ und $f(\varphi) = g(\varphi)$ in J, so sind die FOURIER-Reihen (konjugierten FOURIER-Reihen) von f und g in ganz J C_α-äquisummierbar. Wenn hier sogar gleichmäßige C_α-Äquisummierbarkeit in jedem abgeschlossenen Teilintervall von J folgt, so sprechen wir von (überall) gleichmäßiger C_α-Lokalisation[23]).

Es sei K eine Funktionenklasse mit der Eigenschaft, daß die FOURIER-Koeffizienten der Funktionen aus K für ein $\beta \geqq -2$ die Bedingung $a_n = O(n^\beta)$ erfüllen. Nach Satz 4 und wegen $O(n^\beta) = a(n^\alpha)$ für $\alpha > \beta + 1$ gilt dann:

Für die FOURIER-*Reihen und konjugierten* FOURIER-*Reihen aus K liegt $|C_\alpha|$-Lokalisation überall vor für jedes $\alpha > \beta + 1$.*

Diese Tatsache kann man z.B. verwenden, um bei speziellen Reihen zu einer Aussage über Summierbarkeit zu gelangen. Betrachten wir etwa die FOURIER-Reihe $-\log\left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right) \sim \sum \frac{\cos n\varphi}{n}$, so ergibt sich wegen $\beta = -1$, daß die Reihe $|C_\alpha|$-summierbar ist für $\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$ und jedes $\alpha > 0$, denn die erzeugende Funktion ist für $\varphi \neq 0$ zweimal stetig differenzierbar. Entsprechendes gilt für die konjugierte Reihe $\sum \frac{\sin n\varphi}{n}$; übrigens hätten sich diese Tatsachen auch direkt durch Anwendung von I, Satz 1 auf $\sum \frac{z^n}{n}$ ergeben.

4.4. Wir werden im folgenden die Gültigkeit von Lokalisationssätzen gemäß unserer Definition in § 4.3 untersuchen. Um notwendige und hinreichende Bedingungen zu erhalten, werden wir nur Klassen K mit folgenden Eigenschaften betrachten: K ist nicht leer, und mit $f(\varphi) \in K$ ist auch $\lambda(\varphi) f(2\varphi) \in K$ für jede zweimal stetig differenzierbare (periodische) Funktion $\lambda(\varphi)$.

Tatsächlich wird dies nur benutzt werden für $\lambda \equiv 0$ und für eine spezielle Funktion λ mit nachstehenden Eigenschaften:

$$\lambda(\varphi) = 1 - \lambda(\varphi + \pi) \quad \text{für} \quad -\pi \leqq \varphi \leqq 0, \quad \lambda(\varphi) = 0 \quad \text{für} \quad |\varphi| \leqq \frac{\pi}{3}.$$

Ist $f(\varphi) \sim \sum \Re a_n e^{in\varphi}$ und $f^*(\varphi) = \lambda(\varphi) f(2\varphi) \sim \sum \Re b_n e^{in\varphi}$, so gilt dann für $n \geqq 1$

$$(15) \quad \begin{cases} b_{2n} = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) \lambda(\varphi) f(2\varphi) e^{-2ni\varphi} d\varphi \\ \qquad = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(1 - \lambda(\varphi) + \lambda(\varphi)\right) f(2\varphi) e^{-2ni\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} a_n. \end{cases}$$

[23]) Gleichmäßige Lokalisation wird also nur für alle φ erklärt.

Für alle „zulässigen" Klassen K gilt nun

Satz 5. *Für die* FOURIER*-Reihen* $\sum \Re a_n e^{in\varphi}$ *aus einer Klasse* K *besteht genau dann* $|C_\alpha|$*-Lokalisation* ($\alpha > -1$) *für* $\varphi = 0$, *wenn für alle Reihen aus* K

$$\Re a_n = a(n^\alpha) \tag{16}$$

gilt, und $|C_\alpha|$*-Lokalisation an allen Stellen besteht genau dann, wenn für alle Reihen aus* K

$$\sum \left| \frac{a_n}{n^\alpha} \right| < \infty \tag{17}$$

gilt. Dies bleibt wörtlich richtig für Lokalisation bei konjugierten Reihen, wenn überall $\Re$ *durch* $\Im$ *ersetzt wird.*

Zusatz 1. Ersetzt man $|C_\alpha|$-Summierbarkeit durch gewöhnliche C_α-Summierbarkeit, so bleibt Satz 5 wörtlich richtig, wenn man (16) und (17) ersetzt durch

$$\Re a_n = o(n^\alpha) \quad \text{bzw.} \quad a_n = o(n^\alpha). \tag{16'} \tag{17'}$$

Zusatz 2. Gleichmäßige C_α-Lokalisation für die FOURIER-Reihen oder konjugierten Reihen aus K liegt genau dann vor, wenn (17') gilt, so daß gleichmäßige C_α-Lokalisation mit gewöhnlicher C_α-Lokalisation überall äquivalent ist (insbesondere also aus $|C_\alpha|$-Lokalisation überall folgt).

4.5. *Beweis.* Um die Notwendigkeit von (16) bzw. (17) zu zeigen, betrachten wir zu beliebigem $f \in K$ die Funktion $f^* = \lambda(\varphi) f(2\varphi)$. Da $f^* = 0$ ist für $|\varphi| \leq \frac{\pi}{3}$, so haben wir wegen der Lokalisation für $\varphi = 0$ bzw. $|\varphi| < \frac{\pi}{3}$ $|C_\alpha|$-Summierbarkeit, insbesondere nach I, Hilfssatz 6 oder 8

$$\Re b_n = a(n^\alpha) \quad \text{bzw.} \quad \sum \frac{|b_n|}{n^\alpha} < \infty.$$

Wegen (15) ergibt sich daraus (16) bzw. (17).

Daß (17) auch hinreichend ist, folgt unmittelbar aus Satz 4 (vgl. I, § 2.4). Um diesen Satz auch bei (16) anwenden zu können, betrachten wir statt $f(\varphi) \sim \sum \Re a_n e^{in\varphi} \in K$ die FOURIER-Reihe

$$f_1(\varphi) = \tfrac{1}{2}(f(\varphi) + f(-\varphi)) \sim \sum \Re a_n \cos n\varphi.$$

Im Falle der konjugierten Reihen schließt man ganz entsprechend [natürlich gilt I, Hilfssatz 8 auch für die konjugierten Reihen; an Stelle von f_1 ist jetzt $f_2 = \frac{1}{2}(f(\varphi) - f(-\varphi))$ zu betrachten].

Bei Zusatz 1 schließt man analog. Zusatz 2 schließlich folgt durch Kombination von Zusatz 1 und Satz 4.

Wie der Beweis zeigt, wird die Einschränkung auf zulässige Klassen nur für den notwendigen Teil des Satzes gebraucht, während der hinreichende Teil für jede Klasse gilt.

§ 5. Spezielle Lokalisationssätze für FOURIER-Reihen

Im folgenden werden wir für einige bekannte Funktionenklassen das Lokalisationsverhalten der FOURIER-Reihen bzw. konjugierten Reihen auf Grund von Satz 5 bestimmen. Alle auftretenden Klassen werden zulässig in dem eingeführten Sinne sein. Es wird kein Punkt φ bevorzugt werden, so daß also Lokalisation stets Lokalisation überall bedeutet und zwischen gewöhnlicher und gleichmäßiger C_α-Lokalisation kein Unterschied besteht. Wir werden somit nur die Bedingungen (17) und (17′) zu betrachten haben, die für FOURIER-Reihen und konjugierte FOURIER-Reihen gleich lauten. Aus diesem Grund können wir die kurze Aussage „eine Klasse K besitzt $|C_\alpha|$-Lokalisation (bzw. C_α-Lokalisation)" verwenden und verstehen darunter Lokalisation (überall) für FOURIER-Reihen und konjugierte FOURIER-Reihen.

5.1. Wir betrachten zunächst die Räume L, L^p $(p>1)$, B und C [24]).

Satz 6. *Jede Klasse K zwischen L und C, $L \supseteq K \supseteq C$, besitzt C_α-Lokalisation für $\alpha \geq 0$ und nicht für $\alpha < 0$* [25]).

Zum *Beweis* genügt es zu bemerken, daß (17′) für L und $\alpha \geq 0$ erfüllt ist (RIEMANNsches Lemma), während (17′) für C und $\alpha < 0$ nicht gilt (vgl. TS, § 2.9.2).

5.2. Satz 7. *Die Klasse L besitzt $|C_\alpha|$-Lokalisation für $\alpha > 1$ und nicht für $\alpha \leq 1$* [26]).

Zum *Beweis* genügt es zu bemerken, daß (17) für $\alpha > 1$ erfüllt ist (RIEMANNsches Lemma), während die FOURIER-Reihe $\sum \Re \frac{e^{in\varphi}}{\log n}$ ein Gegenbeispiel für $\alpha \leq 1$ darstellt (vgl. TS, § 5.12).

5.3. Satz 8. *Die Klasse L^p $(1<p\leq 2)$ besitzt $|C_\alpha|$-Lokalisation für $\alpha > \frac{1}{p}$ und nicht für $\alpha \leq \frac{1}{p}$* [27]).

Beweis. Mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ist $\sum \left|\frac{a_n}{n^\alpha}\right| \leq \left(\sum |a_n|^q\right)^{1/q} \left(\sum n^{-\alpha p}\right)^{1/p}$, so daß für $\alpha > \frac{1}{p}$ nach der Ungleichung von HAUSDORFF-YOUNG die Bedingung (17) erfüllt ist. Ein Gegenbeispiel im anderen Fall wird gegeben durch $\sum \Re \frac{e^{in\varphi}}{n^{1-\frac{1}{p}} \log n}$,

[24]) Dabei ist B der Raum der meßbaren und beschränkten Funktionen und C der Raum der stetigen Funktionen.

[25]) Für $K=L$ vgl. ZYGMUND [1926], BOSANQUET-OFFORD [1935] und BHATNAGAR [1938]; ferner ZYGMUND [1935] (fortan als TS zitiert).

[26]) Lokalisation für $\alpha > 1$ (als lokales Summierbarkeitskriterium) bei BOSANQUET [1936] und SUNOUCHI [1949]. Nichtlokalisation für $\alpha = 1$ bei FOÀ [1938], BOSANQUET-KESTELMAN [1939] und RANDELS [1940].

[27]) Lokale Summierbarkeitskriterien bei FOÀ [1940] (falsche Aussage für $p>2$ berichtigt bei FOÀ [1941]) und TSUCHIKURA [1953], [1954] (falsche Aussage für $p>2$ in der ersten Note ist berichtigt in der zweiten). Nichtlokalisation für $\alpha \leq \frac{1}{p}$ bei FOÀ [1940], [1942], YANO [1953], TSUCHIKURA [1954].

denn dies ist die FOURIER-Reihe einer Funktion aus L_p (vgl. TS, § 9.501 ode § 5.221).

5.4. Satz 9. *Die Klassen L^p ($p \geq 2$), B und C, allgemeiner alle Klassen K mit $L^2 \supseteq K \supseteq C$, besitzen $|C_\alpha|$-Lokalisation für $\alpha > \frac{1}{2}$ und nicht für $\alpha \leq \frac{1}{2}$*[28]).

Beweis. Lokalisation für $\alpha > \frac{1}{2}$ folgt nach Satz 8 für alle Unterklassen von L^2. Nichtlokalisation für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ folgt aus der Tatsache, daß es zu jeder (reellen) Folge c_n mit $\sum c_n^2 = \infty$, insbesondere also zu $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, eine stetige Funktion gibt, für deren FOURIER-Koeffizienten a_n die Beziehung $\sum |a_n c_n| = \infty$ gilt[29]).

5.5. Im folgenden betrachten wir Klassen, die aus den bisher untersuchten Räumen sozusagen durch Integration hervorgegangen sind. Dies sind die Klasse C^* der totalstetigen Funktionen und die Klassen $\mathrm{Lip}(\beta, p)$ bzw. $\mathrm{Lip}\,\beta$ mit $0 < \beta \leq 1$, $p \geq 1$, die definiert sind durch

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(\varphi + h) - f(\varphi)|^p \, d\varphi \right\}^{1/p} = O(h^\beta) \quad \text{für} \quad h \to +0$$

bzw.

$$\sup_{\varphi} |f(\varphi + h) - f(\varphi)| = O(h^\beta) \quad \text{für} \quad h \to +0.$$

Genauer gelten (wenn man wie bisher Funktionenklassen mit den zugehörigen Klassen von FOURIER-Reihen identifiziert) die Implikationen[30])

$$\sum \Re\, a_n e^{in\varphi} \in \mathrm{Lip}(\beta, p) \quad \text{bzw. } \mathrm{Lip}\,\beta \Rightarrow \sum \Re\, (in)^\gamma a_n e^{in\varphi} \in L^p \quad \text{bzw. } B,$$
$$\sum \Re\, (in)^\beta a_n e^{in\varphi} \in L^p \quad \text{bzw. } B \quad \Rightarrow \sum \Re\, a_n e^{in\varphi} \in \mathrm{Lip}(\beta, p) \quad \text{bzw. } \mathrm{Lip}\,\beta$$

für $0 < \beta \leq 1$, $p \geq 1$, $0 < \gamma < \beta$.

Das Hauptgewicht der folgenden Sätze liegt auf den Aussagen über Nichtlokalisation, da in vielen Fällen zugleich mit der Lokalisation sogar Summierbarkeit vorhanden ist[31]).

5.6. Satz 10. *Die Klassen $\mathrm{Lip}(\beta, p)$ und $\mathrm{Lip}\,\beta$ mit $0 < \beta \leq 1$, $p \geq 1$, allgemeiner alle Klassen K mit $\mathrm{Lip}(\beta, 1) \supseteq K \supseteq \mathrm{Lip}\,\beta$, besitzen C_α-Lokalisation für $\alpha > -\beta$ und nicht für $\alpha \leq -\beta$ ($\beta < 1$).*

---

[28]) Vgl. TSUCHIKURA [1954].

[29]) KACMARZ-STEINHAUS [1935], S. 240 oben.

[30]) Vgl. HARDY-LITTLEWOOD [1928$_1$], [1928$_2$]; TS, § 9.8.

[31]) Ist $f \in \mathrm{Lip}(\beta, p)$, so ist die zugehörige FOURIER-Reihe C_α-summierbar für $\alpha > -\beta$, und zwar gleichmäßig für $\beta p > 1$, überall für $\beta = p = 1$ und fast überall für $\beta p \leq 1$. Vgl. HARDY-LITTLEWOOD [1928$_1$], CHOW [1951]. Außerdem folgt $|C_\alpha|$-Summierbarkeit für $\alpha > \frac{1}{p} - \beta$ ($1 \leq p \leq 2$) bzw. $\alpha > \frac{1}{2} - \beta$ ($p > 2$), und zwar überall für $\beta p > 1$, $\beta = p = 1$, und fast überall für $\beta p \leq 1$. Vgl. BOSANQUET [1936] ($\beta = p = 1$), CHOW [1937], [1942], CHEN [1944], SUNOUCHI [1949] ($\beta p > 1$), MATSUYAMA [1949], CHOW [1951] ($\beta p \leq 1$, $\beta < 1$), HYSLOP [1937] ($p = \infty$). Nach PRIVALOFF (TS, § 7.4) bzw. HARDY-LITTLEWOOD [1928$_2$] (TS, § 7.6.15) folgen daraus auch Aussagen über die konjugierten Reihen.

Zum *Beweis* genügt es zu bemerken, daß (17') für $\mathrm{Lip}(\beta, 1)$ und $\alpha > -\beta$ erfüllt ist (nach TS, § 2.21), während es für $\alpha \leq -\beta$ $(\beta < 1)$ Gegenbeispiele aus $\mathrm{Lip}\,\beta$ gibt (nach TS, § 2.9.3).

5.7. Satz 11. *Die Klasse* $\mathrm{Lip}(\beta, p)$ *mit* $0 < \beta \leq 1$, $1 \leq p \leq 2$ *besitzt* $|C_\alpha|$-*Lokalisation für* $\alpha > \frac{1}{p} - \beta$ *und nicht für* $\alpha \leq \frac{1}{p} - \beta$.

Der *Beweis* ergibt sich sozusagen durch β-fache Integration aus den Sätzen 7 und 8: Wegen 5.5 gilt nämlich in $\mathrm{Lip}(\beta, p)$ notwendig[32])

$$\sum n^{\gamma-\alpha} |a_n| < \infty \quad \text{für} \quad 0 < \gamma < \beta, \quad \alpha > \frac{1}{p},$$

während $\sum n^{\beta - \frac{1}{p}} |a_n|$ für gewisse Funktionen unendlich wird. (Die hier benötigten Gegenbeispiele ergeben sich aus den früheren unmittelbar durch Integration.)

5.8. Satz 12. *Die Klassen* $\mathrm{Lip}(\beta, p)$ *und* $\mathrm{Lip}\,\beta$ *mit* $0 < \beta \leq 1$, $p \geq 2$, *allgemeiner alle Klassen* K *mit* $\mathrm{Lip}(\beta, 2) \supseteq K \supseteq \mathrm{Lip}\,\beta$, *besitzen* $|C_\alpha|$-*Lokalisation für* $\alpha > \frac{1}{2} - \beta$ *und nicht für* $\alpha \leq \frac{1}{2} - \beta$.

Der *Beweis* ergibt sich aus Satz 9 nach der Beweismethode von Satz 11. Die Lokalisation folgt auch direkt aus Satz 11. Die Nichtlokalisation für $\mathrm{Lip}\,\beta$ $(\beta < 1)$ folgt auch aus dem „konkreten" Beispiel $\sum \Re \frac{e^{i n \log n}}{n^{\frac{1}{2}+\beta}} e^{i n \varphi}$ (vgl. TS, § 5.3).

5.9. Satz 13. *Die Klasse* C^* *besitzt* C_α-*Lokalisation für alle* $\alpha > -1$, *dagegen* $|C_\alpha|$-*Lokalisation für* $\alpha > 0$ *und nicht für* $\alpha \leq 0$.

Der *Beweis* ergibt sich aus den Sätzen 6 und 7 durch Integration.

Literatur

BHATNAGAR, S. P.: A local property of the allied series of a FOURIER series. Proc. Lond. Math. Soc. **44**, 315—322 (1938). — BOSANQUET, L. S.: Note on the absolute summability (C) of a FOURIER series. J. Lond. Math. Soc. **11**, 11—15 (1936). — BOSANQUET, L. S., and H. KESTELMAN: The absolute convergence of series of integrals. Proc. Lond. Math. Soc. **45**, 88—97 (1939). — BOSANQUET, L. S., and A. C. OFFORD: A local property of FOURIER series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **40**, 273—280 (1935). — CHEN, KIEN-KWONG: On the absolute CESÀRO summability of negative order for a FOURIER series at a given point. Amer. J. Math. **66**, 299—312 (1944). — CHOW, H. C.: Note on the absolute CESÀRO summability of power series. Proc. Lond. Math. Soc. **43**, 484—489 (1937). — On the absolute summability of FOURIER series. J. Lond. Math. Soc. **17**, 17—23 (1942). — A note on the summability of a power series on its circle of convergence. J. Lond. Math. Soc. **26**, 290—294 (1951). — FOÀ, A.: Il fenomeno si RIEMANN per la somme $|C, \alpha|$ di una serie di FOURIER con $0 < \alpha \leq 1$. Inst. Lomb. Rend. **2**, 359—366 (1938). — Sulle sommabilita assoluta $|C, \alpha|$ delle serie di FOURIER di una funzione sommabile L^p con $p > 1$. Boll. Un. mat. Ital. **2**, 325—332 (1940). — Aggiunta alla Nota: „Sulle sommabilita assoluta $|C, \alpha|$ delle serie di FOURIER." Boll. Un. mat. Ital. **3**, 393—394 (1941). — Sulla sommabilita assoluta $|C, \alpha|$ delle serie di FOURIER di una funzione sommabile L^p

[32]) Vgl. auch TS, § 6.6.6.

con $p > 1$. Atti II congr. Un. mat. Ital. 152—153, 1942. — HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some properties of fractional integrals. I. Math. Z. **27**, 565—606 (1928_1). — A convergence criterion for FOURIER series. Math. Z. **28**, 612—634 (1928_2). — HYSLOP, J. M.: On the absolute summability of FOURIER series. Proc. Lond. Math. Soc. **43**, 475—483 (1937). — KACZMARZ, S., u. H. STEINHAUS: Theorie der Orthogonalreihen. Warsaw 1935. — MATSUYAMA, N.: Notes on FOURIER Analysis XIV. Absolute CESÀRO summability of FOURIER series. Tôhoku math. J. (2) **1**, 40—45 (1949). — RANDELS, W. C.: On the absolute summability of FOURIER series. II. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 86—88 (1940). — SUNOUCHI, G.: Notes on FOURIER Analysis XI. On the absolute summability of FOURIER series. J. math. Soc. Jap. **1**, 122—129 (1949). — TSUCHIKURA, T.: Absolute CESÀRO summability of orthogonal series. Tôhoku math. J. (2) **5**, 52—66 (1953). — Absolute CESÀRO summability of orthogonal series. II. Correction and remark to the previous paper. Tôhoku math. J. (2) **5**, 302—312 (1954). — YANO, S.: A remark on absolute CESÀRO summability of FOURIER series. Tôhoku math. J. (2) **5**, 194—195 (1953). — ZYGMUND, A.: Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques. Math. Z. **24**, 47—104 (1926). — Trigonometrical series (zitiert als TS). Warsaw 1935.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

Gießen, Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Hochschule

(Eingegangen am 27. Juli 1955)

RIBENBOIM, P.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 159—168 (1956)

Sur une note de Nagata relative à un problème de Krull

Par

P. RIBENBOIM*)

Dans un article paru en 1936, Krull[1]) a fait la conjecture suivante: *Tout anneau d'integrité primaire, complètement intégralement clos, est un anneau de valuation.*

En 1952, Nagata[2]) a publié une note dans laquelle il affirmait résoudre par la négative la conjecture de Krull. Pour cela, il a construit un anneau et il a «démontré» qu'il s'agissait d'un anneau d'intégrité primaire complètement intégralement clos, mais non un anneau de valuation.

Or, l'examen de la démonstration du contre-exemple de Nagata nous a permis de constater qu'elle présentait des lacunes qui n'étaient pas simples à corriger. Du même coup, le problème de savoir si la conjecture de Krull serait vraie ou fausse était à nouveau ouvert.

L'auteur ayant précisement abordé un aspect de cette question dans une autre note[3]) il était de toute opportunité de trancher une fois pour toutes le doute sur cette conjecture. En outre, Krull a posé la question plus précise suivante: *Est-il possible d'obtenir un anneau d'intégrité primaire qui est intersection d'anneaux de valuations discrètes (de rang 1) mais qui n'est pas un anneau de valuation?*

Cette note est dediée à la démonstration de l'existence d'un tel anneau; ceci améliore le résultat obtenu par Nagata, car l'existence de son contre-exemple n'entraîne pas trivialement l'existence de notre exemple. En plus, la méthode utilisée pour la démonstration que l'anneau indiqué est vraiment un anneau primaire s'applique sans modifications essentielles à la démonstration correcte de que l'anneau de Nagata est primaire. L'auteur veut d'ailleurs préciser qu'ayant communiqué à Nagata l'existence de lacunes dans sa démonstration, il s'est empressé de trouver indépendemment une démonstration correcte qui devra être publiée[4]).

Comme sous-produit de cette démonstration, l'auteur determine le groupe des unités de l'anneau indiqué à l'exemple et il montre en plus que l'idéal premier unique peut s'exprimer comme réunion d'une suite strictement

*) Boursier du Conselho Nacional de Pesquizas, Rio de Janeiro, Brasil.

[1]) KRULL, W.: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, II. Math Z. 41, 665—679 (1936).

[2]) NAGATA, M.: On Krull's conjecture concerning valuation rings. Nagoya Math. J. 4, 29—33 (1952).

[3]) RIBENBOIM, P.: Sur une conjecture de Krull en théorie des valuations. A paraître dans le Nagoya Math. J.

[4]) NAGATA, M.: A correction to my paper on Krull's conjecture concerning valuation rings. A paraître dans le Nagoya Math. J.

croissante d'idéaux principaux, chacun desquels est une puissance du suivant; néanmoins, cette suite $(\mathcal{A}t_r)$ ne vérifie pas la propriété suivante: si $a, b \in \mathcal{A}$, $a, b \notin \mathcal{A}t_{r+1}$, alors $ab \notin \mathcal{A}t_r$ (pour tout $r \geq 1$). Cela découle d'ailleurs d'un théorème plus général dû à l'auteur[3]).

Pour toute la terminologie concernant cette note, nous renvoyons le lecteur à un des articles cités.

1. Soit K un corps algébriquement clos, w une valuation de K dont le groupe des valeurs est celui des nombres rationnels. Soient α, β, deux nombres irrationnels, tels que $0 < \alpha < \beta$.

Dans le corps $K(x)$ des fractions rationnelles à coefficients dans K, où x est une indeterminée, considérons les valuations suivantes. Pour tout élément $e \in K$, et pour tout nombre réel $\lambda \geq 0$ soit la valuation $w_{e,\lambda}$ de $K(x)$ définie par:

$$w_{e,\lambda}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i (x+e)^i\right) = \min\{w(a_i) + i\lambda\}.$$

Considérons l'anneau $\mathcal{A}$, intersection des anneaux des valuations $w_{e,\lambda}$, lorsque $w(e) > \alpha$, $\alpha < \lambda < \beta$, λ *rationnel.*

Alors:

(I) *$\mathcal{A}$ est un anneau d'intégrité primaire, complètement intégralement clos, mais non un anneau de valuation.*

2. Il est clair que $\mathcal{A}$ est complètement intégralement clos. Puisque $x \in \mathcal{A}$ alors le corps des fractions de $\mathcal{A}$ est $K(x)$. $\mathcal{A}$ n'est pas un anneau de valuation, car si on prend $a \in K$ et λ_1, λ_2, des nombres rationnels, tels que $\alpha < \lambda_1 < w(a) < \lambda_2 < \beta$ alors on a $\frac{x}{a}, \frac{a}{x} \notin \mathcal{A}$.

Si $p \in K(x)$, $p \neq 0$, notons $\varepsilon(p) = \inf\{w_{e,\lambda}(p)\}$ et $\varphi(p) = \sup\{w_{e,\lambda}(p)\}$. Supposons démontré

(II) *Si $p \in \mathcal{A}$, non nul, non unité, alors $0 < \varepsilon(p) \leq \varphi(p) < +\infty$.*

S'il en est ainsi, alors $\mathcal{A}$ est un anneau primaire. Car si $p, q \in \mathcal{A}$, non nuls, p non unité de $\mathcal{A}$, si n est un entier assez grand pour que $n \cdot \varepsilon(p) \geq \varphi(q)$, alors $p^n \in \mathcal{A}q$.

Tout revient à montrer (II). Cela sera fait en plusieurs parties.

(III) *Si $p \in \mathcal{A}$, non nul, non unité, alors $w_{0,\lambda}(p) > 0$, quelque soit λ rationnel, $\alpha < \lambda < \beta$.*

(III') *Si $p \in \mathcal{A}$, non nul, non unité, alors*

$$\varepsilon_1(p) = \inf\{w_{0,\lambda}(p)\} > 0, \qquad \varphi_1(p) = \sup\{w_{0,\lambda}(p)\} < +\infty.$$

(IV) *Si* $p = \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(x+a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(x+b_j)}$, $w(a_i) = w(b_j) = \lambda$, $\alpha < \lambda < \beta$, *si* $e \in K$, $w(e) = \lambda$,

alors pour tout rationnel μ, $\lambda \leq \mu < \beta$, on a

$$w_{e,\mu}(p) \geq \min\{w_{0,\lambda}(p), w_{b_j,\mu}(p)\}.$$

(IV') *Si* $p \in A$, *non nul, non unité, alors*

$$\varepsilon_2(p) = \inf\{w_{e,\lambda}(p) \mid e \neq 0\} > 0, \qquad \varphi_2(p) = \sup\{w_{e,\lambda}(p) \mid e \neq 0\} < +\infty.$$

Il est clair que (III') et (IV') entraînent (II).

3. K étant algébriquement clos, tout élément $p \in K(x)$, non nul, est de la forme

$$p = c \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(x + a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(x + b_j)}$$

avec $a_i, b_j, c \in K$, $c \neq 0$, $a_i \neq b_j$, $m \geq 0$, $n \geq 0$.

Pour les considérations que nous ferons, nous pouvons mettre p sous *forme canonique*, en divisant par des unités de A. Nous arrivons ainsi à des éléments du type suivant:

$$p = c \frac{\prod_{i=1}^{m}(x + a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(x + b_j)} \tag{1}$$

avec $a_i, b_j, c \in K$, $c \neq 0$, $a_i \neq b_j$, $w(c) \neq 0$, $\alpha < w(a_i) < \beta$ lorsque $a_i \neq 0$, $\alpha < w(b_j) < \beta$ lorsque $b_j \neq 0$, $w(a_i - b_j) < \beta$, car $\frac{x+a}{a}$ est unité lorsque $w(a) < \alpha$, $\frac{x+a}{x}$ est unité lorsque $\beta < w(a)$ et $\frac{x+a}{x+b}$ est unité lorsque $\alpha < w(a) = w(b) < \beta$ et $w(a-b) > \beta$.

Désormais, tous les éléments seront supposés sous forme canonique.

Donné un élément p du type (1), notons A, B, resp. les familles d'éléments a_i, b_j, qui figurent au numérateur et dénominateur de p (remarquons qu'on peut avoir $a_{i_1} = a_{i_2}$, $b_{j_1} = b_{j_2}$, pour $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$). Notons L l'ensemble $L = \{w(a_i) \mid a_i \neq 0\} \cup \{w(b_i) \mid b_j \neq 0\}$. Si $L \neq \emptyset$ écrivons $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l\}$ où $\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_l < \lambda_{l+1} = \beta$.

Il est encore convenable d'introduire la notation suivante. Pour tout λ, $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, soit $p = p''_\lambda p_\lambda p'_\lambda$, avec

$$p''_\lambda = c \cdot \frac{\prod(x+a_i)}{\prod(x+b_j)}$$

(produit étendu aux $a_i \in A$, $b_j \in B$, tels que $w(a_i) < \lambda$, $w(b_j) < \lambda$),

$$p_\lambda = \frac{\prod(x+a_i)}{\prod(x+b_j)}$$

(produit étendu aux $a_i \in A$, $b_j \in B$, tels que $w(a_i) = w(b_j) = \lambda$),

$$p'_\lambda = \frac{\prod(x+a_i)}{\prod(x+b_j)}$$

(produit étendu aux $a_i \in A$, $b_j \in B$, tels que $w(a_i) > \lambda$, $w(b_j) > \lambda$).

Notons $m''_\lambda, m_\lambda, m'_\lambda$ (et analoguement $n''_\lambda, n_\lambda, n'_\lambda$) le nombre de facteurs $x+a_i$ ($x+b_j$) qui figurent dans le numérateur (dénominateur) de $p''_\lambda, p_\lambda, p'_\lambda$, respectivement.

4. Démonstration de (III). Soit $p \in \mathcal{A}$, non nul, non unité, du type (1).

Si $L=\emptyset$ alors $p=cx^M$, $c\neq 0$, M entier. Si $M=0$ alors c'est trivial. Si $M\neq 0$, alors $w_{0,\lambda}(p)=w(c)+M\lambda$. Si on a $w_{0,\lambda}(p)=0$ avec λ rationnel, $\alpha<\lambda<\beta$, la fonction ci-dessus étant linéaire, il existe un nombre rationnel λ', $\alpha<\lambda'<\beta$, tel que $w_{0,\lambda'}(p)<0$, absurde!

Soit donc $L\neq\emptyset$.

Lemme 1. *Si $p\in\mathcal{A}$, non nul, $L\neq\emptyset$, si $w_{0,\xi}(p)=0$, où ξ est rationnel, $\alpha<\xi<\beta$, alors il existe $\lambda_k\in L$ tel que $w_{0,\lambda_k}(p)=0$.*

En effet, si $\lambda_h<\xi<\lambda_{h+1}$ (où $0\leq h\leq l$) alors si on a $\lambda_h<\lambda<\lambda_{h+1}$ on déduit que $w_{0,\lambda}(p)=w_{0,\xi}(p)=0$. Par continuité de la fonction $w_{0,\lambda}(p)$, quand λ est réel, on a $w_{0,\lambda_h}(p)=w_{0,\lambda_{h+1}}(p)=0$.

Lemme 2. *Si $p\in\mathcal{A}$, non nul, si $\lambda_k\in L$ et $w_{0,\lambda_k}(p)=0$ alors on a $m_{\lambda_k}\leq n_{\lambda_k}$, $n_{\lambda_k}\neq 0$, et si $e\in K$, tel que $w(e)=\lambda_k$, on a $w_{e,\mu}(p_{\lambda_k})\geq w_{0,\lambda_k}(p_{\lambda_k})$ pour tout rationnel μ, $\lambda_k\leq\mu<\beta$.*

En effet, soient ξ,η, rationnels tels que $\lambda_{k-1}\leq\xi<\lambda_k<\eta\leq\lambda_{k+1}$, alors $w_{0,\lambda_k}(p)=0$, $w_{0,\xi}(p)\geq 0$, $w_{0,\eta}(p)\geq 0$; et $w_{0,\xi}(p''_{\lambda_k})=w_{0,\lambda_k}(p''_{\lambda_k})=w_{0,\eta}(p''_{\lambda_k})$; donc on déduit comme l'a fait Nagata que $m_{\lambda_k}\leq n_{\lambda_k}$. De $\lambda_k\in L$ on a $n_k\neq 0$. Si $e\in K$, $w(e)=\lambda_k$, si μ est rationnel, $\lambda_k\leq\mu<\beta$, alors $w_{e,\mu}(p)\geq 0$ donc $w_{e,\mu}(p)-w_{0,\lambda_k}(p)=w_{e,\mu}(p_{\lambda_k})-w_{0,\lambda_k}(p_{\lambda_k})\geq 0$.

L'affirmation (III) résulte alors du lemme suivant:

Lemme 3. *Soit $p\in K(x)$, du type $p=\dfrac{\prod_{i=1}^{m}(x+a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(x+b_j)}$, avec $w(a_i)=w(b_j)=\lambda$, $m\leq n\neq 0$, $a_i\neq b_j$, $w(a_i-b_j)<\beta$. Alors il existe $b_{j_1}\in B$ et un rationnel μ, $\lambda<\mu<\beta$, tels que $w_{b_{j_1},\mu}(p)<w_{0,\lambda}(p)$.*

Soit $R=\{w(b_j-b_k)\,|\,b_j\neq b_k\}$, $r\geq 0$ le nombre d'éléments de R.

Supposons d'abord $r=0$, donc $p=\dfrac{\prod_{i=1}^{m}(x+a_i)}{(x+b_1)^n}$. Prenons μ rationnel, $\lambda\leq\max\{w(a_i-b_1)\}<\mu<\beta$ quand $m>0$, ou $\lambda<\mu$ quand $m=0$; alors $w_{b_1,\mu}(p)<w_{0,\lambda}(p)$.

Supposons le lemme vrai pour tout entier strictement inférieur à r (où $r\geq 1$). Soit ϱ_1 le plus petit élément de R. Posons $b_j\equiv b_k$ quand $w(b_j-b_k)>\varrho_1$. On obtient la partition en classes d'équivalence $B=\cup B^{(\nu)}$. Pour tout b_k soit $A_{b_k}=\{a_i\,|\,w(a_i-b_k)>\varrho_1\}$. Si $b_j\equiv b_k$ alors $A_{b_j}=A_{b_k}$, si $b_j\not\equiv b_k$ alors $A_{b_j}\cap A_{b_k}=\emptyset$. Donc, la correspondance $b_k\to A_{b_k}$ induit une correspondance biunivoque $B^{(\nu)}\to A^{(\nu)}$ et $A\supseteq\cup A^{(\nu)}$ (les $A^{(\nu)}$ étant éventuellement vides). Puisque $m\leq n$, il existe un indice, par exemple $\nu=1$, tel que $m^{(1)}\leq n^{(1)}$ (avec notations évidentes). Soit $p_1=\dfrac{\prod(x+a_i)}{\prod(x+b_j)}$ (pour tous les $a_i\in A^{(1)}$, $b_j\in B^{(1)}$). Si $m\leq n^{(1)}$

posons $p_1' = \prod (x + a_i)$ (pour les autre sa_i); si $m > n^{(1)}$ posons $p_1' = \prod (x + a_i)$ (on prend $n^{(1)} - m^{(1)}$ éléments $a_i \notin A^{(1)}$). Ecrivons $p = p_1 p_1' p_2$. Par l'induction, il existe $b_{j_1} \in B^{(1)}$ et un nombre rationnel μ, $\lambda < \mu < \beta$, tels que $w_{b_{j_1},\mu}(p_1 p_1') < w_{0,\lambda}(p_1 p_1')$ (car $w(b_j - b_k) > \varrho_1$ quand b_j, $b_k \in B^{(1)}$). D'autre part, on a $w_{b_{j_1},\mu}(p_2) \leq w_{0,\lambda}(p_2)$, comme on le vérifie aisément dans les deux cas possibles, car $\lambda \leq \varrho_1$ et le numérateur de p_2 ne possède pas plus de termes que son dénominateur. Donc, on a bien $w_{b_{j_1},\mu}(p) < w_{0,\lambda}(p)$.

5. Démonstration de (III'). Considérons pour un moment aussi les valuations $w_{0,\lambda}$, lorsque λ est *réel*, $\alpha \leq \lambda \leq \beta$. Alors $w_{0,\lambda}(p)$ est une fonction continue de λ définie dans le compact $[\alpha, \beta]$. Elle est donc bornée et assume ses valeurs maximum et minimum. Donc, $\varphi_1(p) < \infty$.

Si $\varepsilon_1(p) = 0$, il existe alors un irrationnel γ, $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, tel que $w_{0,\gamma}(p) = 0$. Or, $w_{0,\alpha}(p) = w(c) + (m - n)\alpha \neq 0$ car α est irrationnel. Si on a $\lambda_k < \gamma < \lambda_{k+1}$, avec $0 \leq k \leq l$, alors $w_{0,\gamma}(p) = w_{0,\lambda_k}(p''_{\lambda_k} p_{\lambda_k}) + (m'_{\lambda_k} - n'_{\lambda_k})\gamma = 0$; or, $w_{0,\lambda}(p)$ étant une fonction linéaire de λ dans l'intervalle $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$, et d'autre part positive, car $p \in A$, alors elle est identiquement nulle, et il existerait un λ rationnel tel que $w_{0,\lambda}(p) = 0$, absurde, en vertu de (III). Enfin, on vérifie analoguement que $w_{0,\beta}(p) \neq 0$.

6. Démonstration de (IV). Supposons d'abord $n = 0$. Alors, on a trivialement $w_{e,\mu}(p) \geq w_{0,\lambda}(p)$.

Soit donc $n \geq 1$. Notons $S = \{w(b_j - e) \mid b_j \in B\}$ et posons $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s\}$ avec $\lambda \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_s$. Notons $A(\sigma_k) = \{a_i \in A \mid w(a_i - e) = \sigma_k\}$, $B(\sigma_k) = \{b_j \in B \mid w(b_j - e) = \sigma_k\}$, $m(\sigma_k)$, $n(\sigma_k)$, respectivement le nombre d'éléments de $A(\sigma_k)$, $B(\sigma_k)$. On a $A \supseteq \bigcup_{k=1}^{s} A(\sigma_k)$, $B = \bigcup_{k=1}^{s} B(\sigma_k)$, $m(\sigma_k) \geq 0$, $n(\sigma_k) > 0$.

1er cas. *Soit* $m(\sigma_k) \geq n(\sigma_k)$ *quelque soit* $\sigma_k \in S$.

Alors, on vérifie trivialement que pour tout rationnel μ, $\lambda \leq \mu < \beta$, on a $w_{e,\mu}(p) \geq w_{0,\lambda}(p)$.

2ème cas. *Soit* h_0 *le plus grand indice tel que* $m(\sigma_{h_0}) < n(\sigma_{h_0})$.

Montrons l'existence d'un élément $b_{j_0} \in B(\sigma_{h_0})$ tel que pour tout rationnel μ, $\lambda \leq \mu < \beta$, on ait $w_{e,\mu}(p) \geq w_{b_{j_0},\mu}(p)$.

Soit $R = \{w(b_j - b_k) \mid b_j, b_k \in B, b_j \neq b_k\}$, et $r \geq 0$ le nombre d'éléments de R.

Considérons d'abord le cas où $r = 0$. Alors, p est du type $p = \frac{\prod_{i=1}^{m}(x + a_i)}{(x + b_1)^n}$, donc $s = 1$ et par hypothèse, on a $m(\sigma_1) < n(\sigma_1) = n$. On peut alors vérifier, moyennant un calcul non difficile que, pour tout rationnel μ, $\lambda \leq \mu < \beta$, on a $w_{e,\mu}(p) \geq w_{b_1,\mu}(p)$.

Supposons maintenant l'affirmation valable pour tout entier strictement inférieur à r (où $r \geq 1$). Notons ϱ_1 le plus petit élément de R.

Sous-cas A. $\sigma_{h_0} > \varrho_1$.

Posons $p = p_0 p_0'$, où $p_0 = \dfrac{\prod (x+a_i)}{\prod (x+b_j)}$ (produit étendu à tous les éléments $a_i \in \bigcup_{h=h_0}^{s} A(\sigma_h)$ et à tous les éléments $b_j \in \bigcup_{h=h_0}^{s} B(\sigma_h)$). Alors, pour l'élément p_0, l'ensemble $R_0 = \{w(b_j - b_k) \mid b_j, b_k \in \bigcup_{h=h_0}^{s} B(\sigma_h),\ b_j \neq b_k\}$ a au plus $r-1$ éléments, car $\varrho_1 \notin R_0$, et pour p_0 on a encore $m(\sigma_{h_0}) < n(\sigma_{h_0})$, h_0 étant le plus grand indice avec cette propriété. Par l'induction, il existe $b_{j_0} \in B(\sigma_{h_0})$ tel que $w_{e,\mu}(p_0) \geq w_{b_{j_0},\mu}(p_0)$ pour tout rationnel μ, $\lambda \leq \mu < \beta$. Un calcul simple donne alors $w_{e,\mu}(p_0') \geq w_{b_{j_0},\mu}(p_0')$, donc $w_{e,\mu}(p) \geq w_{b_{j_0},\mu}(p)$.

Sous-cas B. $\sigma_{h_0} \leq \varrho_1$, *donc nécéssairement* $h_0 = 1$ (car si $\sigma_1 < \sigma_{h_0} \leq \varrho_1$, $w(b_j - e) = \sigma_1$, $w(b_k - e) = \sigma_{h_0}$, alors $w(b_j - b_k) = \sigma_1 < \varrho_1$, absurde).

Si $b_j, b_k \in B(\sigma_1)$, posons $b_j \equiv b_k$ quand $w(b_j - b_k) > \varrho_1$. On obtient la partition en classes d'équivalence $B(\sigma_1) = \cup B^{(\nu)}$. Pour tout élément $b_k \in B(\sigma_1)$, soit $A_{b_k} = \{a_i \in A(\sigma_1) \mid w(a_i - b_k) > \varrho_1\}$. Si $b_j \equiv b_k$ alors $A_{b_j} = A_{b_k}$, si $b_j \not\equiv b_k$ alors $A_{b_j} \cap A_{b_k} = \emptyset$. Donc, la correspondance $b_k \to A_{b_k}$ induit une correspondance biunivoque $B^{(\nu)} \to A^{(\nu)}$ et $A(\sigma_1) = (\cup A^{(\nu)}) \cup A'$ (les $A^{(\nu)}$, A', étant éventuellement vides et deux à deux disjoints). Puisque $m(\sigma_1) < n(\sigma_1)$, alors il existe un indice, par exemple $\nu = 1$, tel que $m^{(1)} < n^{(1)}$ (avec notations évidentes). Soit $p_1 = \dfrac{\prod (x+a_i)}{\prod (x+b_j)}$ (produit étendu à tous les $a_i \in A^{(1)}$ et $b_j \in B^{(1)}$).

Si $m(\sigma_1) < n^{(1)}$ soit $p_1' = \prod (x+a_i)$ (produit étendu à tous les $a_i \in A(\sigma_1)$, $a_i \notin A^{(1)}$). Si $m(\sigma_1) \geq n^{(1)}$ soit $p_1' = \prod (x+a_i)$ (produit étendu à $n^{(1)} - 1 - m^{(1)}$ éléments $a_i \in A(\sigma_1)$, $a_i \notin A^{(1)}$). Ecrivons $p = p_1 p_1' p_2$.

Pour l'élément $p_1 p_1'$ l'ensemble $R_1 = \{w(b_j - b_k) \mid b_j, b_k \in B^{(1)},\ b_j \neq b_k\}$ a au plus $r-1$ éléments, et en outre, le nombre de facteurs au numérateur de $p_1 p_1'$ est inférieur au nombre de facteurs au dénominateur. Par l'induction, il existe un élément $b_{j_0} \in B^{(1)} \subseteq B(\sigma_1)$, tel que $w_{e,\mu}(p_1 p_1') \geq w_{b_{j_0},\mu}(p_1 p_1')$ pour tout rationnel μ, $\lambda \leq \mu < \beta$. Enfin, il n'est pas difficile à vérifier qu'on a $w_{e,\mu}(p_2) \geq w_{b_{j_0},\mu}(p_2)$, pour tout rationnel μ, $\lambda \leq \mu < \beta$. On conclut donc que $w_{e,\mu}(p) \geq w_{b_{j_0},\mu}(p)$, pour tout rationnel μ, $\lambda \leq \mu < \beta$.

Ceci termine de montrer l'affirmation (IV).

7. Démonstration de (IV'). Commençons en faisant une remarque. Si $p = c \dfrac{\prod_{i=1}^{m} (x + a_i)}{\prod_{j=1}^{n} (x + b_j)}$ et si $e \in K$, soit p^e l'élément $p^e = c \dfrac{\prod_{i=1}^{m} (x + a_i - e)}{\prod_{j=1}^{n} (x + b_j - e)}$. Alors, $(p^e)^{-e} = p$ et si $e' \in K$, on a $w_{e+e',\lambda}(p) = w_{e,\lambda}(p^{e'})$. De cela, il résulte que si $e_0 \in K$, $w(e_0) > \alpha$, alors $p \in \mathcal{A}$ si et seulement si $p^{e_0} \in \mathcal{A}$; car, si $p \in \mathcal{A}$ et si $w(e) > \alpha$, alors $w_{e,\lambda}(p^{e_0}) = w_{e+e_0,\lambda}(p) \geq 0$, puisque $w(e+e_0) > \alpha$, donc $p^{e_0} \in \mathcal{A}$, et réciproquement, si $p^{e_0} \in \mathcal{A}$, $w(e) > \alpha$, alors $w_{e,\lambda}(p) = w_{e,\lambda}((p^{e_0})^{-e_0}) = w_{e-e_0,\lambda}(p^{e_0}) \geq 0$, car $w(e-e_0) > \alpha$, donc $p \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $p \in \mathcal{A}$, non nul, non unité.

Si $e \in K$, $e \neq 0$, tel que $w(e) = \mu \notin L$, alors pour tout rationnel λ, $\alpha < \lambda < \beta$, on a $w_{e,\lambda}(p) = w_{0,\min\{\lambda,\mu\}}(p)$.

Soit $e \in K$, $e \neq 0$, tel que $w(e) = \lambda_k \notin L$. Si λ est rationnel, $\alpha < \lambda \leq \lambda_k$, on a $w_{e,\lambda}(p) = w_{0,\lambda}(p)$. Si, par contre, on a $\lambda_k < \lambda < \beta$, alors $w_{e,\lambda}(p''_{\lambda_k}) = w_{0,\lambda_k}(p''_{\lambda_k})$ et $w_{e,\lambda}(p'_{\lambda_k}) = w_{0,\lambda_k}(p'_{\lambda_k})$. En vertu de (IV), on a pour tout λ rationnel, $\lambda_k < \lambda < \beta$, l'inégalité $w_{e,\lambda}(p_{\lambda_k}) \geq \min\{w_{0,\lambda_k}(p_{\lambda_k}), w_{b_j,\lambda}(p_{\lambda_k}) \mid w(b_j) = \lambda_k\}$. Donc $w_{e,\lambda}(p) \geq \min\{w_{0,\lambda_k}(p), w_{b_j,\lambda}(p) \mid w(b_j) = \lambda_k\}$.

Pour montrer que $\varepsilon_2(p) = \inf\{w_{e,\lambda}(p) \mid e \neq 0\} > 0$ il suffit, en vertu de (III'), de montrer, pour tout $\lambda_k \in L$, qu'on a $\varepsilon_{2,k}(p) = \inf\{w_{e,\lambda}(p) \mid w(e) = \lambda_k \in L, \lambda_k < \lambda < \beta, \lambda \text{ rationnel}\} > 0$. Or, $w_{b_j,\lambda}(p) = w_{0,\lambda}(p^{b_j}) \geq 0$. Si, pour un b_j on avait $\inf\{w_{b_j,\lambda}(p) \mid \lambda_k < \lambda < \beta\} = 0$ alors $\inf\{w_{0,\lambda}(p^{b_j}) \mid \lambda_k < \lambda < \beta\} = 0$. En vertu de (III), l'élément $p^{b_j} \in \mathcal{A}$ serait une unité, donc $w_{0,\lambda}(p^{b_j}) = w_{b_j,\lambda}(p) = 0$ quelque soit λ rationnel, $\alpha < \lambda < \beta$, donc p serait unité, absurde! Ainsi, il résulte que $\inf\{w_{b_j,\lambda}(p) \mid \lambda_k < \lambda < \beta\} > 0$ pour tout b_j tel que $w(b_j) = \lambda_k$; donc, $\varepsilon_{2,k}(p) > 0$.

Soit maintenant $\varphi_2(p) = \sup\{w_{e,\lambda}(p) \mid e \neq 0\}$. En vertu de (III'), il suffit de montrer, pour tout $\lambda_k \in L$, qu'on a $\varphi_{2,k}(p) = \sup\{w_{e,\lambda}(p) \mid w(e) = \lambda_k \in L, \lambda_k < \lambda < \beta, \lambda \text{ rationnel}\} < +\infty$. Or, $\varphi_{2,k}(p) = -\inf\{w_{e,\lambda}(p^{-1}) \mid w(e) = \lambda_k, \lambda_k < \lambda < \beta\} \leq -\inf\{\min\{w_{0,\lambda_k}(p^{-1}), w_{a_i,\lambda}(p^{-1}) \mid a_i \notin A, w(a_i) = \lambda_k\} \mid \lambda_k < \lambda < \beta\} = \max\{w_{0,\lambda_k}(p), \sup\{w_{a_i,\lambda}(p) \mid \lambda_k < \lambda < \beta\} \mid a_i \in A, w(a_i) = \lambda_k\} < +\infty$ en vertu de (IV) et de (III'), car $w_{a_i,\lambda}(p) = w_{0,\lambda}(p^{a_i})$ et $p^{a_i} \in \mathcal{A}$.

Ceci termine de montrer (IV') et établit ainsi la validité de (I).

8. Le contre-exemple avec les valuations discrètes. Soit K_0 le corps des nombres rationnels, w_0 une valuation discrète normée de K_0. Soit K le corps de tous les nombres algébriques, w une valuation de K prolongeant w_0. Donc, la valuation w possède groupe de valeurs égal à celui des nombres rationnels.

Dans le corps $K(x)$, soit l'anneau $\mathcal{A}$ de l'exemple indiqué au numéro 1; donc $\mathcal{A} = \cap \mathcal{A}_{w_{e,\lambda}}$, où λ est rationnel, $\alpha < \lambda < \beta$, $e \in K$, $w(e) > \alpha$.

Posons $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A} \cap K_0(x)$. Donc, le corps des fractions de $\mathcal{A}^0$ est égal à $K_0(x)$.

Donnés $e \in K$, avec $w(e) > \alpha$, et λ rationnel, tel que $\alpha < \lambda < \beta$, soit $w^0_{e,\lambda}$ la valuation induite par $w_{e,\lambda}$ sur le corps $K_0(x)$. Alors $\mathcal{A}^0 = \cap \mathcal{A}_{w^0_{e,\lambda}}$.

Remarquons que $w_{e,\lambda}$ est la seule valuation de $K(x)$ prolongeant $w^0_{e,\lambda}$. En effet, si v est une valuation (nécéssairement de rang 1) de $K(x)$ prolongeant $w^0_{e,\lambda}$, et si $v \neq w_{e,\lambda}$ alors il existe un élément $x + a \in K(x)$ tel que $v(x+a) \geq 0$ et $w_{e,\lambda}(x+a) < 0$. Or, $w_{e,\lambda}(x+a) = \min\{\lambda, w(a-e)\} < 0$; de $w(e) > \alpha > 0$, $\lambda > \alpha$, il vient nécéssairement $w(a) < 0$; mais alors, de $v(x) = w^0_{e,\lambda}(x) = \min\{\lambda, w(e)\} > 0$ il résulte que $v(x+a) = \min\{v(x), v(a)\} < 0$, contradiction!

De ces considérations, puisque $K(x)$ est algébrique sur $K_0(x)$, alors $\mathcal{A}$ est l'anneau des entiers algébriques de $K(x)$ sur $\mathcal{A}^0$.

Montrons que $\mathcal{A}^0$ est un anneau intersection d'anneaux de valuations discrètes (donc, complètement intégralement clos), primaire, mais non de valuation.

En effet, chaque $w^0_{e,\lambda}$ est une valuation discrète de $K_0(x)$, car si $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est un polynome à coefficients dans K_0, alors $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a'_i(x+e)^i = g(x+e)$, où les coefficients de $g(x+e)$ sont des éléments de $a'_i \in K_0[e]$. Donc

$$w^0_{\lambda,e}(f(x)) = w^0_{\lambda,e}\Big(\sum_{i=0}^{n} a'_i(x+e)^i\Big) = w_{\lambda,e}\Big(\sum_{i=0}^{n} a'_i(x+e)^i\Big) = \min\{w(a'_i)+i\lambda\};$$

or, la valuation w de K induit sur l'extension algébrique finie $K_0(e)$ une valuation nécéssairement discrète, donc $w^0_{\lambda,e}$ est elle même une valuation discrète.

$\mathcal{A}^0$ n'est pas un anneau de valuation. En effet, $\mathcal{A}$ étant l'anneau des entiers de $K(x)$ et $\mathfrak{p}$ son seul idéal premier, alors $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}=\mathcal{A}$ serait un anneau de valuation de $K(x)$ prolongeant la valuation définie par $\mathcal{A}^0$, ce qui est absurde [voir Nagata[2]), lemme 2].

Enfin, $\mathcal{A}$ étant un anneau entier sur $\mathcal{A}^0$, et un anneau primaire, il résulte que $\mathcal{A}^0$ est lui-même un anneau primaire.

9. Le groupe des unités de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}^0$. Nous determinerons maintenant les unités de l'anneau $\mathcal{A}$. Au numéro 3, nous avons déjà determiné quatre types d'unités de l'anneau $\mathcal{A}$:

(i) $a \in K$ lorsque $w(a)=0$ (unité de l'anneau de la valuation w),

(ii) $\dfrac{a}{x+a}$, $\dfrac{x+a}{a}$, lorsque $w(a)<\alpha$,

(iii) $\dfrac{x}{x+a}$, $\dfrac{x+a}{x}$, lorsque $\beta<w(a)$,

(iv) $\dfrac{x+a}{x+b}$ lorsque $\alpha<w(a)=w(b)<\beta$, $w(a-b)>\beta$.

Nous allons montrer que toute unité de $\mathcal{A}$ s'obtient comme produit d'un nombre fini d'unités des types ci-dessus (que nous appelerons des *unités basiques*).

En effet, soit p une unité de $\mathcal{A}$. Par réduction à la forme canonique, on a $p=up'$, où u est un produit d'unités basiques et p' est une unité sous forme canonique. Tout revient à montrer: 1 est la seule unité sous forme canonique. Soit en effet p une unité sous forme canonique. Avec les notations du n°3, si $L=\emptyset$ alors p est du type $p=cx^M$ (M entier de signe quelconque). De $w_{0,\lambda}(p)=w(c)+M\lambda=0$ pour tout λ rationnel, $\alpha<\lambda<\beta$, on a $M=0$, donc $w(c)=0$ et p étant sous forme canonique, alors $p=c=1$. Si, par contre, $L\neq\emptyset$ et λ est rationnel, $\alpha<\lambda<\lambda_1$, alors $w_{0,\lambda}(p)=w(c)+(m-n)\lambda=0$, donc $m=n$ et $w(c)=0$, ainsi $c=1$. D'après le lemme 2, puisque $p\in\mathcal{A}$, $p^{-1}\in\mathcal{A}$, on a $m_{\lambda_k}=n_{\lambda_k}\neq 0$ pour tout $\lambda_k\in L$; en particulier, il ne peut pas avoir aucun facteur x dans le numérateur ou dénominateur de p. D'après le lemme 3, il existe $b_{j_1}\in B$, tel que $w(b_{j_1})=\lambda_1$, et μ rationnel, $\lambda_1\leq\mu<\beta$, tels que $w_{b_{j_1},\mu}(p_{\lambda_1})<w_{0,\lambda_1}(p_{\lambda_1})=0$. Or, si $\lambda_k>\lambda_1$ alors $w_{b_{j_1},\mu}(p_{\lambda_k})=0$ donc on déduit $w_{b_{j_1},\mu}(p)=\sum_{k=1}^{l} w_{b_{j_1},\mu}(p_{\lambda_k})<0$, absurde!

Enfin, les unités de A^0 ne sont autres que les unités de A appartenant à $K_0(x)$, car l'idéal premier $\mathfrak{P}^0$ de A^0 est égal à $\mathfrak{P}^0 = \mathfrak{P} \cap A^0$. Donc, les unités de A^0 sont des produit finis d'unités basiques construites avec des éléments de K_0.

10. Une popriété supplémentaire de l'anneau A. Il est intéressant de remarquer que l'anneau A possède la propriété suivante:

(a) *Il est possible de trouver une suite strictement croissante d'idéaux principaux At_r, dont la réunion est $\mathfrak{P}$, chacun desquels étant une puissance du suivant.*

En effet, prenons une suite strictement décroissante de nombres rationnels positifs, ayant limite nulle; par exemple, la suite de terme général $1/n^{r-1}$, où n est le plus petit entier tel que $\beta \leq n\alpha$ (donc $n > 1$). Soit $t \in K$ tel que $w(t) = 1$, et pour tout $r \geq 1$, soit $t_r = t^{1/n^{r-1}}$. Alors, la suite d'idéaux principaux At_r est strictement croissante, on a $At_r = At_{r+1}^n$; en outre, si $p \in \mathfrak{P}$, non nul, alors, d'après (II) il existe r assez grand tel que $\frac{1}{n^{r-1}} < \varepsilon(p)$, donc $p \in At_r$.

Remarquons maintenant que la suite (At_r) ne satisfait pas la condition suivante:

(b) *Pour tout $r \geq 1$, si $p, p' \in A$, $p, p' \notin At_{r+1}$, alors $pp' \notin At_r$.*

En effet, nous montrerons l'existence, pour tout r assez grand, d'éléments $p, p' \in A$, $p, p' \notin At_{r+1}$, mais tels que $pp' \in At_r$.

Par simplicité, considérons l'anneau A défini lorsque on prend $\beta = n\alpha$. Soit r assez grand pour que $\frac{1}{n^{r-1}} < \alpha$ et prenons des nombres rationnels λ_0, λ_0', tels que $\alpha < \lambda_0 < \lambda_0' < \alpha + \frac{1}{n^{r+1}} < \beta$.

Soit $p = \frac{(x+a)^n}{x+b}$, avec $w(a) = w(b) = w(a-b) = \lambda_0$. Montrons que $p \in A$, $p \notin At_{r+1}$.

Si λ est rationnel, $\alpha < \lambda < \beta$, alors on a $w_{0,\lambda}(p) = (n-1) \cdot \min\{\lambda, \lambda_0\} > \alpha > \frac{1}{n^r}$.

Soit $e \in K$, $e \neq 0$, $w(e) > \alpha$, λ rationnel, $\alpha < \lambda < \beta$. Si $w(e) \neq \lambda_0$ alors $w_{e,\lambda}(p) = (n-1) \cdot \min\{\lambda_0, \lambda, w(e)\} > \alpha > \frac{1}{n^r}$. Si $w(e) = \lambda_0$ et $\alpha < \lambda \leq \lambda_0$ alors $w_{e,\lambda}(p) = w_{0,\lambda}(p) > \alpha > \frac{1}{n^r}$. Enfin, si $w(e) = \lambda_0 < \lambda < \beta$ alors, en vertu de (IV) on a $w_{e,\lambda}(p) \geq \min\{w_{0,\lambda_0}(p), w_{b,\lambda}(p)\} = \min\{(n-1)\lambda_0, n\lambda_0 - \lambda\} = n\lambda_0 - \lambda > 0$ car $\lambda < \beta = n\alpha < n\lambda_0$. D'autre part, si on prend λ rationnel tel que $\lambda_0 < n\lambda_0 - \frac{1}{n^r} < \lambda < \beta$ (un tel λ existe, car $\lambda_0 < \alpha + \frac{1}{n^{r+1}}$) alors $w_{b,\lambda}(p) = n\lambda_0 - \lambda < \frac{1}{n^r}$. Ainsi, $p \in A$ mais $p \notin At_{r+1}$.

Analoguement, soit $p' = \frac{(x+a')^n}{x+b'}$ où $w(a') = w(b') = w(a'-b') = \lambda_0'$. Alors $p' \in A$, $p' \notin At_{r+1}$.

Montrons que $pp' \in At_r$.

Il est clair que si λ est rationnel, $\alpha < \lambda < \beta$, alors $w_{0,\lambda}(pp') > 2\alpha > \alpha > \frac{1}{n^{r-1}}$; de même, si $e \in K$, $e \neq 0$, $w(e) > \alpha$, $w(e) \neq \lambda_0$, $w(e) \neq \lambda_0'$, alors $w_{e,\lambda}(pp') > 2\alpha > \alpha > \frac{1}{n^{r-1}}$.

Soit $w(e)=\lambda_0$; si $\alpha<\lambda\leq\lambda_0$ alors $w_{e,\lambda}(pp')>2\alpha>\frac{1}{n^{r-1}}$; si $\lambda_0<\lambda<\beta$ alors $w_{e,\lambda}(pp')\geq(n\lambda_0-\lambda)+w_{0,\lambda_0}(p')=(2n-1)\lambda_0-\lambda>\frac{1}{n^{r-1}}$ car on a $\frac{1}{n^{r-1}}<$ $<\alpha<\lambda_0\leq(n-1)\lambda_0$ donc $\beta=n\alpha<n\lambda_0<(2n-1)\lambda_0-\frac{1}{n^{r-1}}$.

Soit $w(e)=\lambda_0'$; on vérifie analoguement que $w_{e,\lambda}(pp')>\frac{1}{n^{r-1}}$.

Donc, on a bien $pp'\in At_r$.

Nous terminons en soulignant que si A est primaire, complètement intégralement clos, mais non un anneau de valuation (comme dans l'exemple donné) il est impossible de trouver une suite strictement croissante d'idéaux principaux satisfaisant les propriétés (a) et (b). Cela découle d'un théorème plus général demontré par l'auteur dans la note[3]). En outre, on vérifie aisément que dans l'anneau A^0, qui est intersection d'anneaux de valuations discrètes, il est impossible que $\mathfrak{p}^0$ soit réunion d'une suite strictement croissante d'idéaux principaux chacun desquels étant une puissance du suivant.

Instituto de Matemdtica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (Brasilien)

(Eingegangen am 5. August 1955)

Behrens, E.-A.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 169—182 (1956)

Zur additiven Idealtheorie in nichtassoziativen Ringen

Von
Ernst-August Behrens

Einleitung

In den letzten Jahren sind den Versuchen von Krull [8] und Fitting [6] zur Übertragung der additiven Idealtheorie kommutativer Ringe auf assoziative Ringe, bei denen die Multiplikation nicht mehr als kommutativ vorausgesetzt ist, einige weitere Arbeiten gefolgt: Curtis [5] hat 1951 die Überlegungen von Fuchs [7] (1950) über primale Ideale nichtkommutativer Ringe verallgemeinert, und McCoy [4] hat 1949, mit Hilfe einer auch für nichtkommutative Ringe geeigneten Definition der multiplikativ abgeschlossenen Systeme von Krull [9], für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eines assoziativen Ringes ein Radikal angeben können, das der Durchschnitt der minimalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ ist. Seine Untersuchungen wurden 1950 von Murdoch [11] durch Einführung der Begriffe Primärideal und Komponentenideal eines Ideales $\mathfrak{a}$ sowie durch Beweis der Eindeutigkeitssätze für die Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von Primäridealen fortgesetzt. Mehr kann man dabei nicht verlangen, weil es bekanntlich nichtkommutative Ringe gibt, in denen trotz der Gültigkeit der aufsteigenden Kettenbedingung für Rechtsideale nicht jedes Ideal als Durchschnitt von Primäridealen darstellbar ist (vgl. z.B. Krull [8]).

Ebenfalls in diesen Jahren sind auch für nichtassoziative Ringe (*na*-Ringe) einige Definitionen für Radikale aufgestellt worden (Baer [2] 1943, Behrens [3] 1953, Smiley [13] 1950, sowie die axiomatischen Untersuchungen von Amitsur [1] ab 1952). Das legt die Frage nahe, ob man einen Teil der additiven Idealtheorie kommutativer Ringe auf beliebige nichtassoziative Ringe übertragen kann.

In der vorliegenden Abhandlung werden nun zunächst der Begriff des Primideales und der Radikalbegriff von McCoy auf *na*-Ringe verallgemeinert, wobei wieder eine Definition der multiplikativ abgeschlossenen Systeme M die Hauptrolle spielt. Dabei ist das Radikal $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ eines Ideales $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt seiner minimalen Primoberideale (§ 1). — Im nächsten Paragraphen werden die Primärideale $\mathfrak{q}$ eingeführt durch die Forderung, daß aus $(a)\cdot(b)\subseteq\mathfrak{q}$, $a\notin\mathfrak{q}$ folgen soll $b\subset\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$. Als Hauptunterschied zu den assoziativen und kommutativen Ringen erweist sich dabei, daß auch bei sehr scharfen Kettenbedingungen das Radikal eines Primärideales nicht mehr prim zu sein braucht (vgl. Beispiel 1 in § 2, wo $\mathfrak{o}$ eine kommutative, aber nicht assoziative Algebra vom Range drei über ihrem Grundkörper ist). Nennt man die minimalen Primoberideale des Primärideales $\mathfrak{q}$ die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{q}$, so hat jetzt also $\mathfrak{q}$ mitunter mehrere zugehörige Primideale. Obgleich der

Zusammenhang zwischen Primär- und Primidealen hier weniger eng ist als in der klassischen Theorie, läßt sich eine Reihe bekannter Sätze über größte Primärkomponenten und M-Komponenten, sowie Kriterien für den Begriff relativ-prim übertragen. Dabei versagen aber die in der Theorie der assoziativen Ringe üblichen, auf Potenzbildungen beruhenden Schlußweisen (vgl. Northcott [*12*] oder van der Waerden [*14*]). Sie werden teilweise ersetzt durch die in § 1, Satz 7, abgeleitete Regel $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$. Unter Voraussetzung der aufsteigenden Kettenbedingung für zweiseitige Ideale in dem *na*-Ring $\mathfrak{o}$ kann man zwar zeigen, daß auch hier eine Potenz des Radikales $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ in $\mathfrak{a}$ liegt (§ 2, Kor. zu Satz 9), doch ist das weniger fruchtbar als im assoziativen Fall, weil bei der Potenzbildung die Klammersetzung zu berücksichtigen ist. — Im § 3 werden die Eindeutigkeitssätze für die Normaldarstellung eines Ideales $\mathfrak{a}$ als unverkürzbarer Durchschnitt größter Primärkomponenten bewiesen, falls das Ideal $\mathfrak{a}$ überhaupt als Durchschnitt endlich vieler Primärideale darstellbar ist (s. dagegen Beispiel 2 in § 2): Satz 1 zeigt, daß wieder die Anzahl der Primärkomponenten und deren Radikale eindeutig durch $\mathfrak{a}$ bestimmt sind, und Satz 4 verallgemeinert den bekannten Satz, daß die isolierten Komponentenideale in jeder Normaldarstellung von $\mathfrak{a}$ auftreten (van der Waerden [*41*], § 88).

In der ganzen Abhandlung wird ausschließlich von zweiseitigen Idealen geredet. Das scheint um so mehr berechtigt, als in der Idealtheorie der *na*-Ringe die einseitigen Ideale nicht als Darstellungsmoduln dienen können; Automorphismenringe bilden eben keine geeigneten Modellvorstellungen für nichtassoziative Ringe. — Im § 2 werden drei Beispiele vorgerechnet; dazu sei bemerkt, daß die Schwierigkeit bei der Entwicklung der Idealtheorie in *na*-Ringen, dort nicht mehr nach dem Assoziativgesetz multiplizieren zu dürfen, teilweise dadurch ausgeglichen wird, daß man bei der Konstruktion von Beispielen andererseits auch nicht auf dieses Gesetz zu achten braucht.

Auch der erste Teil der Abhandlung von Curtis [*5*] über primale Ideale läßt sich übrigens auf *na*-Ringe übertragen, wenn man darauf verzichtet, daß deren adjungierte Ideale sämtlich prim sind.

§ 1. Primideale und Radikale

In dem nicht notwendig assoziativen Ring (*na*-Ring) $\mathfrak{o}$ bezeichne (a) das von dem Ringelement a erzeugte Ideal, d.h. das kleinste zweiseitige Ideal, das a enthält. Das Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ zweier Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{o}$ sei das von der Menge $\{a \cdot b;\ a \subset \mathfrak{a},\ b \subset \mathfrak{b}\}$ in $\mathfrak{o}$ erzeugte Ideal.

Definition 1. *Das Ideal* $\mathfrak{p}$ *ist prim, wenn aus* $(a) \cdot (b) \subseteqq \mathfrak{p}$ *folgt, daß* $a \subset \mathfrak{p}$ *oder* $b \subset \mathfrak{p}$.

Eine zweite Definition des Primideales liefert der

Satz 1. $\mathfrak{p}$ *ist dann und nur dann prim, wenn für Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *in* $\mathfrak{o}$ *aus* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$ *folgt, daß* $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ *oder* $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$.

Beweis. 1. Wenn $\mathfrak{a} \nsubseteqq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} \nsubseteqq \mathfrak{p}$ gibt es zwei Elemente a und b in $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, die nicht in $\mathfrak{p}$ liegen. Wenn $\mathfrak{p}$ überdies prim, liegt $(a) \cdot (b)$ nicht in $\mathfrak{p}$, und

es gibt daher zwei Elemente $a' < (a)$ und $b' < (b)$, deren Produkt $a' \cdot b'$ nicht zu $\mathfrak{p}$ gehört; andernfalls würde nämlich das Ideal $\mathfrak{p}$ das von allen $a' \cdot b'$ erzeugte Ideal enthalten. — 2. Aus $a, b \notin \mathfrak{p}$ folgt $(a), (b) \nsubseteq \mathfrak{p}$. Wenn also $\mathfrak{p}$ der im Satz formulierten Bedingung genügt, ist $(a) \cdot (b) \nsubseteq \mathfrak{p}$.

Diesen Satz kann man auf n Faktoren verallgemeinern, wenn man unter $\mathfrak{P}^{(\nu)}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ das Produkt der n Ideale $\mathfrak{a}_i$ bei einer festen Klammersetzung versteht (zur Bezeichnung vgl. Behrens [3]):

Satz 2. *Wenn $\mathfrak{p}$ prim und $\mathfrak{P}^{(\nu)}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \subseteq \mathfrak{p}$, dann liegt mindestens eines der Ideale $\mathfrak{a}_i$ in $\mathfrak{p}$.*

Beweis durch vollständige Induktion nach n: $n = 1$ ist trivial. — Sei $\mathfrak{P}^{(\nu)}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \mathfrak{P}^{(\varkappa)}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k) \cdot \mathfrak{P}^{(\lambda)}(\mathfrak{a}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. Nach Satz 1 muß mindestens einer der beiden Faktoren $\mathfrak{P}^{(\varkappa)}$ und $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ in $\mathfrak{p}$ liegen, also nach Induktionsannahme auch eines der Ideale $\mathfrak{a}_i$.

Auch für *na*-Ringe gilt der

Satz 3. *Wenn das Ideal $\mathfrak{a}$ in keinem der Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ liegt, enthält $\mathfrak{a}$ ein Element a mit derselben Eigenschaft.*

Beweis wieder durch vollständige Induktion nach n, wobei $n = 1$ trivial ist: Nach Induktionsannahme gibt es, für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$, ein Element a_i in $\mathfrak{a}$ mit a_i nicht in $\mathfrak{p}_k$ für die $n - 1$ Primideale $\mathfrak{p}_k \neq \mathfrak{p}_i$. Wenn für mindestens ein i auch noch $a_i \notin \mathfrak{p}_i$, kann man $a = a_i$ nehmen. Im andern Falle liegen alle a_i in ihren $\mathfrak{p}_i$. Für festes Primideal $\mathfrak{p}_l$ gibt es dann in (a_1) und (a_2) zwei Elemente a_1' bzw. a_2' mit $a_1' \cdot a_2' \notin \mathfrak{p}_l$. Daraus folgt die Existenz von a_2'' in $(a_1' \cdot a_2')$ und von a_3' in (a_3) mit $a_2'' \cdot a_3' \notin \mathfrak{p}_l$, und so weiter bis $a_{l-2}'' \cdot a_{l-1}'$ zwar nicht in $\mathfrak{p}_l$ wohl aber in $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{l-1}$ liegt. Dann gibt es wieder in $(a_{l-2}'' \cdot a_{l-1}')$ ein Element a_{l-1}'' und in (a_{l+1}) ein a_{l+1}' mit $a_{l-1}'' \cdot a_{l+1}' \notin \mathfrak{p}_l$ usw., bis schließlich $a_{n-1}'' \cdot a_n' = b_l$ zu allen $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_l$ gehört, aber nicht zu $\mathfrak{p}_l$. Keines der n Ideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ enthält dann das Element $a = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ aus $\mathfrak{a}$.

Eine dritte Möglichkeit, das Primideal $\mathfrak{p}$ zu definieren ergibt sich aus der Betrachtung der Komplementärmenge $C(\mathfrak{p}) = \{m;\ m < \mathfrak{o},\ m \notin \mathfrak{p}\}$. Diese Menge ist nämlich multiplikativ abgeschlossen oder ein M-System in folgendem Sinne:

Definition 2. *Eine Menge M aus $\mathfrak{o}$ ist ein M-System, wenn es zu je zwei Elementen m_1 und m_2 aus M in den Idealen (m_1) und (m_2) zwei Elemente m_1' bzw. m_2' gibt mit $m_1' \cdot m_2'$ in M. Auch die leere Menge soll ein M-System sein.*

Diese M-Systeme spielen bei den *na*-Ringen die gleiche Rolle wie die von McCoy in [4] für assoziative Ringe definierten M-Systeme, so daß sich ein Teil der Sätze und Beweise von McCoy übertragen läßt. Zunächst folgt aus der Definition eines Primideales sofort der

Satz 4. *Ein Ideal $\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann prim, wenn $C(\mathfrak{p})$ ein M-System ist.*

Man kann in diesem Satz — wie bei McCoy — die Voraussetzung, daß $\mathfrak{p}$ ein Ideal sei, abschwächen. Unter einem *minimalen Primoberideal $\mathfrak{p}$ eines Ideales $\mathfrak{a}$* verstehe man ein Primideal, das zwar $\mathfrak{a}$ umfaßt, aber kein Primoberideal von $\mathfrak{a}$ echt enthält.

Satz 5. *Die Menge* $\mathfrak{p}$ *ist dann und nur dann minimales Primoberideal von* $\mathfrak{a}$, *wenn* $C(\mathfrak{p})$ *ein maximales* $\mathfrak{a}$ *nicht treffendes* M*-System ist, d.h.* $C(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{a} = \emptyset$.

Beweis. 1. Die Menge $\mathfrak{p}$ genüge der Bedingung des Satzes. Da $M = C(\mathfrak{p})$ das Ideal $\mathfrak{a}$ nicht trifft, liegt $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p} = C(M)$. Nach dem Lemma von Zorn existiert nun ein maximales M nicht treffendes Ideal $\mathfrak{p}^*$, das $\mathfrak{a}$ enthält. $\mathfrak{p}^*$ ist prim, wie folgende Überlegung zeigt: Seien a_1 und a_2 nicht in $\mathfrak{p}^*$, also $(\mathfrak{p}^*, a_i) \cap M \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, und etwa b_i in (a_i), $b_i \equiv m_i \pmod{\mathfrak{p}^*}$, m_i in M. Da M ein M-System ist, existieren Elemente m_i' in (m_i) derart, daß das Produkt $m_1' \cdot m_2'$ in M und damit nicht in $\mathfrak{p}^*$ liegt. m_1' entsteht dabei aus m_1 durch eine Reihe von Multiplikationen mit Elementen aus $\mathfrak{o}$ und dazwischengeschaltete Additionen der Produkte bzw. des Elementes m_1 selbst. Wendet man dieselben Operationen auf b_1 an, so ergibt sich ein Element $b_1' \equiv m_1' \pmod{\mathfrak{p}^*}$, das in (b_1) liegt; analog $b_2' \equiv m_2'$. Aus $b_i' < (b_i) \subseteqq (a_i)$, $b_1' \cdot b_2' \equiv m_1' \cdot m_2' \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$ folgt $(a_1) \cdot (a_2) \not\subseteqq \mathfrak{p}^*$, also $\mathfrak{p}^*$ prim. — Da $\mathfrak{p}^*$ M nicht trifft, ist $C(\mathfrak{p}^*)$ nach Satz 4 ein M umfassendes M-System, das, wegen $\mathfrak{p}^* \supseteqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ nicht trifft. Folglich muß $C(\mathfrak{p}^*) = M$ sein, da M als maximal vorausgesetzt war, was $\mathfrak{p}^*$ gleich $\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}$ Primideal nach sich zieht. — Daß schließlich $\mathfrak{p}$ minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ ist, folgt daraus, daß das Komplement $C(\mathfrak{p}')$ eines Primideales $\mathfrak{p}'$ mit $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}' < \mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{a}$ nicht treffendes, M echt umfassendes M-System wäre. — 2. Wenn $\mathfrak{p}$ minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$, ist $C(\mathfrak{p})$ ein $\mathfrak{a}$ nicht treffendes M-System. Es muß maximal sein, weil es sonst ein maximales M-System $M' > M$, $M' \cap \mathfrak{a} = \emptyset$, gäbe, dessen Komplement nach dem in Teil 1 Bewiesenen ein Primoberideal $C(M')$ von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} \subseteqq C(M') < \mathfrak{p}$ wäre. Dabei wurde das Lemma von Zorn auf M-Systeme angewandt; das ist zulässig, weil eine aufsteigende Kette von M-Systemen induktiv ist. (Zum Begriff induktiv vgl. J. Schmidt [*15*].)

In den folgenden Untersuchungen spielt nun der Durchschnitt aller minimalen Primoberideale eines Ideales eine große Rolle.

Definition 3. *Das Radikal* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ *eines Ideales* $\mathfrak{a}$ *ist der Durchschnitt aller minimalen Primoberideale von* $\mathfrak{a}$.

Natürlich ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ ein Ideal. — Nach der Bemerkung am Ende des Beweises des vorigen Satzes könnte man $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ auch als Durchschnitt *aller* Primoberideale von $\mathfrak{a}$ erklären; jedes $\mathfrak{a}$ umfassende Primideal $\mathfrak{p}'$ enthält nämlich ein minimales Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$, da die Komplemente einer absteigenden Kette $\mathfrak{a}$ enthaltender Primideale eine aufsteigende Kette $\mathfrak{a}$ nicht treffender M-Systeme bilden. Daraus läßt sich sogleich ableiten der

Satz 6. $\mathfrak{r}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$.

Beweis. Jedes Primoberideal von $\mathfrak{a}$ oder von $\mathfrak{b}$ ist auch Primoberideal von $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Wenn andererseits das Primideal $\mathfrak{p}$ den Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ enthält, dann auch das Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und folglich, nach Satz 1, mindestens einen der Faktoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Satz 7. $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$.

Beweis. $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$ ist trivial. — Jedes minimale Primoberideal von $\mathfrak{a}$ umfaßt den Durchschnitt aller dieser Ideale, d.h. es ist Primoberideal auch von $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ und enthält damit, nach Def. 3, $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$. Also enthält auch der Durchschnitt $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ aller dieser Ideale $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$.

Dieser Satz ist deshalb außerordentlich wichtig, weil er mitunter die auf Potenzbildungen beruhenden Schlußweisen der additiven Idealtheorie assoziativer Ringe durch Beweismethoden zu ersetzen gestattet, die für beliebige nichtassoziative, und damit nicht einmal mehr potenzassoziative Ringe gelten.

Trivial ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ und die Monotonie, daß aus $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$. Für den folgenden Satz benötigt man aber Satz 7:

Satz 8. Aus $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ folgt $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$.

Beweis. Die Voraussetzung zieht wegen der Monotonie nach sich

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}).$$

Daß $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ die für ein Radikal übliche Eigenschaft von Satz 10 besitzt, erkennt man am bequemsten aus folgendem, von McCoy [4] für assoziative Ringe aufgestellten

Satz 9. *Ein Ringelement r liegt dann und nur dann in $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$, wenn jedes r enthaltende M-System das Ideal $\mathfrak{a}$ trifft.*

Beweis. Wenn r der Bedingung des Satzes genügt, darf ein M-System, das $\mathfrak{a}$ nicht trifft, r nicht enthalten, also liegt r in dessen Komplement. Insbesondere liegt r in den Komplementen der maximalen $\mathfrak{a}$ nicht treffenden M-Systeme, also nach Satz 5 im Durchschnitt $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ aller dieser minimalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$. — Wenn das Element b der Bedingung des Satzes jedoch nicht genügt, existiert ein b enthaltendes M-System, das $\mathfrak{a}$ nicht trifft; also auch ein maximales derartiges M-System, dessen Komplement, wieder nach Satz 5, ein b nicht enthaltendes, minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ ist. Folglich liegt b nicht in $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$.

Definition 4. *Das Radikal des Ringes $\mathfrak{o}$ ist das Radikal $\mathfrak{r}(0)$ seines Nullideales* (0).

Satz 10. $\mathfrak{r}(\mathfrak{o}/\mathfrak{r}(0)) = (0)$.

Beweis. Würde das Radikal $\mathfrak{r}(\mathfrak{o}/\mathfrak{r}(0))$ des Restklassenringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{r}(0)$ ein von $\bar{0}$ verschiedenes Element $\bar{a}$ enthalten, dann läge ein Urbild a von $\bar{a}$ beim natürlichen Homomorphismus H von $\mathfrak{o}$ auf $\mathfrak{o}/\mathfrak{r}(0)$ nicht in $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(0)$. Demnach gäbe es ein a, aber nicht 0 enthaltendes M-System in $\mathfrak{o}$, also auch ein maximales derartiges System M. Sein Komplement $C(M)$ wäre ein Primideal in $\mathfrak{o}$; es müßte also $\mathfrak{r}$ enthalten. Das ist aber nicht möglich, denn nach dem Isomorphiesatz $\mathfrak{o}/C(M) \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{r}/C(M)/\mathfrak{r}$ ginge beim Homomorphismus H das a enthaltende M-System M über in ein $\bar{a}$ enthaltendes M-System $\overline{M}$ in $\mathfrak{o}/\mathfrak{r}$. Da nach Voraussetzung $\bar{a}$ in $\mathfrak{r}(\mathfrak{o}/\mathfrak{r})$ liegt, müßte $\overline{M}$ auch $\bar{0}$ enthalten, während oben gezeigt wurde, daß $\mathfrak{r}$ in $C(M)$, also nicht in M liegt.

Wenn $\mathfrak{b}$ ein Ideal des Ringes $\mathfrak{o}$ ist, läßt $\mathfrak{b}$ sich seinerseits als Ring auffassen und dann dessen Radikal N bilden. Ziemlich trivial ist $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{r}(0) \subseteq N$. Die

genauen Bedingungen aber, unter denen das Gleichheitszeichen gilt, sind mir nicht bekannt.

Ein *Ring* $\mathfrak{o}$ heißt *prim*, wenn sein Nullideal es ist, z.B. der Restklassenring von $\mathfrak{o}$ nach einem Primideal. Da $\mathfrak{r}(0) = (0)$ bedeutet, daß der Durchschnitt aller Primideale von $\mathfrak{o}$ gleich (0) ist, folgt auf dem üblichen Wege (s. z.B. Behrens [3]), daß ein $\mathfrak{r}$-halbeinfacher Ring subdirekte Summe primer Ringe ist.

Über das Verhältnis von $\mathfrak{r}(0)$ zu andern Radikalbegriffen läßt sich sagen, daß $\mathfrak{r}(0)$ ein Nilideal ist (s. Behrens [3]) weil die Menge $\{\mathfrak{P}_n^{(\nu)}(a); n, \nu = 1, 2, \ldots\}$ der irgendwie gebildeten Potenzen von a ein a enthaltendes M-System bildet und daher 0 enthalten muß, falls a in $\mathfrak{r}(0)$ liegt. Das Nilradikal $W(\mathfrak{o})$ umfaßt also das Radikal $\mathfrak{r}(0)$. — In assoziativen Ringen mit absteigender Kettenbedingung für Rechtsideale ist nach Hopkins jedes Nilideal $\mathfrak{i}$ nilpotent, und aus $\mathfrak{i}^n \subseteqq \mathfrak{r}(0) \subseteqq \mathfrak{p}$ für alle Primideale von $\mathfrak{o}$ folgt $\mathfrak{i} \subseteqq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{i} \subseteqq \mathfrak{r}(0)$. In diesem Falle ist daher $\mathfrak{r}(0)$ das Radikal von Wedderburn.

Bei einem Noetherschen Ring (kommutativer und assoziativer Ring mit aufsteigender Kettenbedingung für Ideale und Einselement) fällt $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ zusammen mit dem dort üblichen Radikal als Durchschnitt aller minimalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ (vgl. Krull [10] oder Northcott [12]).

§ 2. Primärideale

Definition 1. *Das Ideal* $\mathfrak{q}$ *ist (rechts-)primär, wenn aus* $(a) \cdot (b) \subseteqq \mathfrak{q}$, $a \notin \mathfrak{q}$ *folgt* $b < \mathfrak{r}(\mathfrak{q})$.

Auf Grund des letzten Absatzes von § 1 geht diese Definition für Noethersche Ringe in die dort übliche über. Ähnlich wie bei den Primidealen kann man auch hier (a) und (b) durch beliebige Ideale ersetzen:

Satz 1. $\mathfrak{q}$ *ist dann und nur dann primär, wenn für beliebige Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *aus* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{a} \nsubseteqq \mathfrak{q}$ *folgt* $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{r}(\mathfrak{q})$.

Beweis. 1. Wenn $\mathfrak{a} \nsubseteqq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{b} \nsubseteqq \mathfrak{r}(\mathfrak{q})$, gibt es Elemente $a < \mathfrak{a}$ und $b < \mathfrak{b}$, die nicht in $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$ liegen. Wenn $\mathfrak{q}$ primär, kann $\mathfrak{q}$ dann nicht $(a) \cdot (b)$, also auch nicht $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ enthalten. — 2. Mit $a \notin \mathfrak{q}$, $b \notin \mathfrak{r}(\mathfrak{q})$ liegen auch (a) und (b) nicht in $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$. Wenn $\mathfrak{q}$ der Bedingung des Satzes genügt, ist $(a) \cdot (b)$ nicht in $\mathfrak{q}$ enthalten, $\mathfrak{q}$ also primär.

Den Hauptunterschied zur Theorie assoziativer Ringe bildet die Tatsache, daß auch bei Voraussetzung sehr scharfer Kettenbedingungen das Radikal eines Primärideales nicht prim zu sein braucht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 1. $\mathfrak{o}$ sei die kommutative Algebra vom Range drei über einem Grundkörper K der Charakteristik null mit folgender Multiplikationstafel für die Basiselemente A, B, C:

	A	B	C
A	0	A	A
B	A	B	A
C	A	A	C

Sie ist ein *na*-Ring, weil $[A \cdot B] \cdot C = A \neq 0 = A \cdot (B \cdot C)$. — Das Produkt zweier Elemente $a = \alpha A + \beta B + \gamma C$, $a' = \alpha' A + \beta' B + \gamma' C$ in $\mathfrak{o}$ ist $a \cdot a' = {}^*A + \beta\beta' B + \gamma\gamma' C$, wobei der Koeffizient von A in der folgenden Untersuchung nicht gebraucht wird. — Die Mengen $(A) = \{\alpha A; \alpha < K\}$, $\mathfrak{p}_1 = \{\alpha A + \gamma C\}$, $\mathfrak{p}_2 = \{\alpha A + \beta B\}$ sind Ideale in $\mathfrak{o}$. (A) ist in jedem echten Ideal von $\mathfrak{o}$ enthalten, denn, wenn $a \neq 0$, ist bei geeigneter Wahl von β' und γ', $[a \cdot a'] \cdot A = (\beta\beta' + \gamma\gamma') A \neq 0$, wenn nicht $\beta = \gamma = 0$. In diesem Falle aber ist a selbst gleich αA. — $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ sind Primideale; wenn nämlich a und a' nicht in $\mathfrak{p}_1$ liegen, also $a \equiv \beta B$, $a' \equiv \beta' B \pmod{\mathfrak{p}_1}$, $\beta, \beta' \neq 0$ sind, gilt

$$(a) \cdot (a') > a \cdot a' \equiv \beta\beta' B \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1}.$$

Analog für $\mathfrak{p}_2$ mit C statt B. — Es ist $(A) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, also gleich dem Radikal $\mathfrak{r}(0)$, da, wegen $(A) \cdot (A) = (0)$, (0) nicht prim ist. Auch $\mathfrak{r}(0)$ ist nicht prim, da $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \subseteqq (A)$. Andererseits ist (0) primär. Beweis: $a \neq 0$ zieht $(a) > A$ nach sich. Wenn außerdem $a' \not\subset \mathfrak{r}$, ist $\beta' \neq 0$ oder $\gamma' \neq 0$, also B oder C in (a'), da A in (a'). Folglich liegt $A = A \cdot B$ oder $A = A \cdot C$ in $(a) \cdot (a')$; dieses Produkt ist also ungleich (0).

Wenn $\mathfrak{q}$ primär ist, braucht $\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$ also nicht prim zu sein. Aber auch umgekehrt, wenn $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ prim ist, braucht $\mathfrak{a}$ nicht primär zu sein, selbst dann nicht, wenn $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ das einzige Primideal von $\mathfrak{o}$ ist. Dafür das

Beispiel 2 mit der Multiplikationstafel

	A	B	C
A	0	A	0
B	A	C	A
C	0	A	C

Daß diese Algebra $\mathfrak{o}$ wieder ein *na*-Ring ist, zeigt $[C \cdot C] \cdot B = A \neq 0 = C \cdot [C \cdot B]$. — Hier ist $a \cdot a' = (\beta\alpha' + (\alpha+\gamma)\beta' + \beta\gamma') A + (\beta\beta' + \gamma\gamma') C$. — Wieder folgt aus $a \neq 0$, daß $(a) \supseteqq (A) = \{\alpha A\}$, denn 1., wenn $\beta \neq 0$, setze $\alpha' = \beta^{-1}$, $\beta' = \gamma' = 0$; 2., wenn $\beta = 0$, $\alpha + \gamma \neq 0$, setze $\gamma' = 0$, $\beta' = (\alpha+\gamma)^{-1}$; 3., wenn $\beta = \alpha + \gamma = 0$, setze $\beta' = 0$, $\gamma' = \gamma^{-1}$, woraus in diesem Falle zunächst $(a) > C$ sich ergibt, aber dann ist $A = C \cdot B < (C)$. — (A) prim erkennt man daran, daß aus a nicht in $(A) = \{\alpha A\}$, d.h. $\beta \neq 0$ oder $\gamma \neq 0$, folgt $C < (a)$; wenn nämlich $\beta \neq 0$, setze in $a \cdot a'$ das $\alpha' = -(\alpha+\gamma) \cdot \beta^{-2}$, $\beta' = \beta^{-1}$, $\gamma' = 0$; und wenn $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$, setze $\beta' = 0$, $\gamma' = \gamma^{-1}$. $a, a' \not\subset (A)$ zieht also nach sich sowohl C in (a) als auch C in (a'), daher $(a) \cdot (a') > C \cdot C \not\subset (A)$. — Das Radikal $\mathfrak{r}(0)$ ist demnach gerade gleich (A), also prim. Trotzdem ist (0) kein Primärideal, denn wegen $(C) = \{\alpha A + \gamma C\}$ ist $(A) \cdot (C) = (0)$, aber $A \neq 0$ und $C \not\subset \mathfrak{r}(0) = (A)$.

Obgleich der Zusammenhang zwischen Primär- und Primidealen hier weniger eng ist als bei den Noetherschen Ringen, allgemeiner als bei den assoziativen Ringen mit aufsteigender Kettenbedingung für Rechtsideale,

läßt sich doch ein wesentlicher Teil der Theorie auch für die nichtassoziativen Ringe entwickeln.

Satz 2. *Mit* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *primär,* $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}')$ *ist auch* $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}'$ *primär mit dem selben Radikal.*

Beweis. Sei $(a) \cdot (b)$ in $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}'$, aber $b \notin \mathfrak{r}(\mathfrak{q})$. Daraus folgt $a < \mathfrak{q}$, da $\mathfrak{q}$ primär. Wegen $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}')$ liegt b ebenfalls nicht in $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}')$, also liegt a auch in $\mathfrak{q}'$. — $\mathfrak{r}(\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}') = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}')$ folgt aus § 1, Satz 6.

Der folgende Satz zeigt, daß der Durchschnitt von Primäridealen mit verschiedenen Radikalen nicht primär ist. Genauer nennt man einen Durchschnitt $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ von Primäridealen *unverkürzbar* (vgl. van der Waerden [*14*], § 87), wenn in ihm kein Primärideal den Durchschnitt der übrigen umfaßt. Dann gilt der

Satz 3. *Wenn* $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ *ein unverkürzbarer Durchschnitt von Primäridealen* $\mathfrak{q}_i$ *ist und nicht alle Radikale* $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$ *einander gleich sind, ist* $\mathfrak{b}$ *kein Primärideal.*

Beweis. Für $j = 1, 2, \ldots, n$ ist $\left[\bigcap_{k \neq j} \mathfrak{q}_k\right] \cdot \mathfrak{q}_j \subseteq \mathfrak{b}$, aber wegen $\bigcap_{k \neq j} \mathfrak{q}_k \nsubseteq \mathfrak{q}_j$ ist $\bigcap_{k \neq j} \mathfrak{q}_k \nsubseteq \mathfrak{b}$. Wenn $\mathfrak{b}$ primär ist, folgt $\mathfrak{q}_j \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{r}(\bigcap \mathfrak{q}_i) = \bigcap \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$, und daraus, nach § 1, Satz 7, $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_j) \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{b})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{b}) = \bigcap \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$. Aus $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_j) \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$ für alle i und j folgt, daß alle $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$ übereinstimmen müssen.

Diese Primärideale kann man auch mit Hilfe des Begriffes relativ — (rechts)prim erklären:

Definition 2. *Der Quotient zweier Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *ist*

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{x;\ x < \mathfrak{o},\ (x) \cdot (b) < \mathfrak{a} \text{ für alle } b \text{ aus } \mathfrak{b}\}.$$

Man sieht sofort, daß $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ein $\mathfrak{a}$ umfassendes Ideal ist, und sagt, $\mathfrak{b}$ ist *relativ prim zu* $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ist.

Satz 4. *Ein Ideal* $\mathfrak{p}$ *ist dann und nur dann prim, wenn* $\mathfrak{p} : \mathfrak{b} = \mathfrak{p}$ *für alle* $\mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{p}$. *Ein Ideal* $\mathfrak{q}$ *ist dann und nur dann primär, wenn* $\mathfrak{q} : \mathfrak{b} = \mathfrak{q}$ *ist für alle* $\mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{q})$.

Beide Behauptungen folgen sofort aus den Definitionen eines Prim- bzw. eines Primärideales.

Korollar. *Sei* $\mathfrak{q}$ *primär und* $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$. *Wenn* $b \notin \mathfrak{p}_\lambda$ *für mindestens ein* λ, *ist* $\mathfrak{q} : (b) = \mathfrak{q}$.

Beweis. Aus $b \notin \mathfrak{p}_\lambda$ folgt $b \notin \mathfrak{r}(\mathfrak{q})$.

Wenn q in $\mathfrak{q}$ liegt, ist natürlich $\mathfrak{q} : (q) = \mathfrak{o}$. In assoziativen Ringen mit aufsteigender Kettenbedingung ist für jedes b aus $\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$ der Quotient $\mathfrak{q} : (b)$ echtes Oberideal von $\mathfrak{q}$ (vgl. Murdoch [*11*], th. 12). Das folgende Beispiel 3 zeigt, daß das für einen *na*-Ring nicht mehr richtig zu sein braucht. Wohl aber läßt sich sagen, daß, wenn $\mathfrak{q}$ primär, aber ungleich $\mathfrak{o}$ ist, stets ein Element b in $\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{q} : (b) > \mathfrak{q}$ existiert: Wenn nämlich $\mathfrak{q}$ sogar prim ist, gilt, für alle b in $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} : (b) = \mathfrak{o}$; wenn aber $\mathfrak{q}$ nicht prim ist, gibt

es zwei Elemente a und b in $\mathfrak{o}$, die beide nicht zu $\mathfrak{q}$ gehören und für die $(a)\cdot(b)$ in $\mathfrak{q}$ liegt. Aus $\mathfrak{q}$ primär folgt dann $b<\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$, und, da $a\notin\mathfrak{q}$, ist $\mathfrak{q}:(b)>\mathfrak{q}$.

Beispiel 3. Wieder sei $\mathfrak{o}$ eine kommutative Algebra über K mit den Basiselementen A, B, E und der Multiplikationstafel

	A	B	E
A	0	A	A
B	A	A	B
E	A	B	E

$\mathfrak{o}$ ist *na*-Ring, weil $A\cdot[B\cdot B]=0\neq A=[A\cdot B]\cdot B$. E ist in $\mathfrak{o}$ das Einselement. — Für $a=\alpha A+\beta B+\varepsilon E$, $a'=\alpha' A+\beta' B+\varepsilon' E$ ist $a\cdot a'=*A+(\varepsilon\beta'+\beta\varepsilon')B+\varepsilon\varepsilon' E$. — $(A)=\{\alpha A;\alpha<K\}$ ist ein Ideal, das in jedem von (0) verschiedenen Ideal enthalten ist. Beweis: Zu untersuchen ist nur der Fall, daß $a\notin(A)$, also $\beta\neq 0$ oder $\varepsilon\neq 0$. Aus $[a\cdot a']\cdot A=[\varepsilon\beta'+[\beta+\varepsilon]\varepsilon']A$ folgt, daß sowohl für $\varepsilon=0$ das Element A in (a) liegt (setze $\varepsilon'=\beta^{-1}$), als auch für $\varepsilon\neq 0$ (setze $\beta'=\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon'=0$). — Wenn $a\notin(A)$, gilt sogar schärfer, daß $(a)\geqq\{\alpha A+\beta B\}=\mathfrak{r}$. Da $A<(a)$, folgt aus dem Ausdruck für $a\cdot a'$, daß $[\varepsilon\beta'+\beta\varepsilon']B+\varepsilon\varepsilon' E$ in (a) liegt, und daraus, daß B in (a) enthalten ist (setze für β' und ε' dieselben Werte wie eben ein). — Das Ideal $\mathfrak{r}$ ist das Radikal $\mathfrak{r}(0)$, weil die einzigen $\mathfrak{r}$ nicht enthaltenden Ideale des Ringes, nämlich (0) und (A), nicht prim sind, wohl aber $\mathfrak{r}$ selbst; einerseits ist nämlich $(A)\cdot(A)=(0)$ sowie $(B)\cdot(B)=\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}=(A)$, und andererseits folgt aus $a, a'\notin\mathfrak{r}$, d.h. aus $a\equiv\varepsilon E$, $a'\equiv\varepsilon' E$ (mod $\mathfrak{r}$), daß $a\cdot a'\equiv\varepsilon\cdot\varepsilon' E\not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{r}$), also $\mathfrak{r}$ prim ist. — Das Ideal (0) ist primär, weil aus $a\neq 0$ folgt $(a)>A$ und weil, falls $a'\notin\mathfrak{r}$ gilt, (a') das Einselement E enthält; denn, wie oben gezeigt, zieht $(a')\not\subseteqq\mathfrak{r}$, also $(a')\not\subseteqq(A)$, nach sich $(a')\geqq\mathfrak{r}$, und daher $(a')>\mathfrak{r}$; dann umfaßt aber $(a)\cdot(a')$ das Element A $E=A\neq 0$. — Obwohl B in $\mathfrak{r}(0)$ liegt, ist $(0):(B)=(0)$, denn wäre in $(x)\cdot(B)=(0)$ das $x\neq 0$, dann enthielte (x) das Element A, also $(x)\cdot(B)$ das Produkt $A\cdot B=A\neq 0$.

Satz 5. *Wenn* $\mathfrak{o}$ *kommutativ,* $\mathfrak{q}$ *primär und* $a\notin\mathfrak{q}$, *ist* $\mathfrak{q}:(a)\subseteqq\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$ *und* $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}:(a))=\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$.

Beweis. x in $\mathfrak{q}:(a)$ ist äquivalent $(x)\cdot(a)=(a)\cdot(x)\subseteqq\mathfrak{q}$, da $\mathfrak{o}$ kommutativ ist. Wenn $a\notin\mathfrak{q}$, liegt $x<\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$, da $\mathfrak{q}$ primär. — Nach § 1, Satz 8, folgt aus $\mathfrak{q}\subseteqq\mathfrak{q}:(a)\subseteqq\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$, daß $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}:(a))=\mathfrak{r}(\mathfrak{q})$ ist.

Bemerkung. Wenn man neben $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ auch noch den Linksquotienten $\{y;(b)\cdot(y)\subseteqq\mathfrak{a}$ für alle b aus $\mathfrak{b}\}$ heranzöge, würde Satz 5 auch noch für nichtkommutative *na*-Ringe gelten, wobei in ihm $\mathfrak{q}:(a)$ durch den Linksquotienten zu ersetzen wäre.

Eine dritte Möglichkeit, diese Primärideale zu definieren, ergibt sich aus folgender Definition:

Definition 3. *M sei ein M-System. Die M-Komponente eines Ideales* $\mathfrak{a}$ *ist* $\mathfrak{a}_M=\{x;(x)\cdot(c)\subseteqq\mathfrak{a}$ *für mindestens ein c aus M*$\}$.

Satz 6. *$\mathfrak{a}_M$ ist ein Ideal in $\mathfrak{o}$.*

Beweis. Mit $x' < (x)$ ist auch $(x') \subseteqq (x)$. Daher braucht nur noch gezeigt zu werden, daß mit x und y auch $x-y$ in $\mathfrak{a}_M$ liegt. Sei $(x)\cdot(c) \subseteqq \mathfrak{a}$ und $(y)\cdot(d) \subseteqq \mathfrak{a}$, $c, d < M$. Für geeignete c' in (c) und d' in (d) liegt das Produkt $c'\cdot d'$ in M, da M ein M-System ist. Andererseits ist das Produkt

$$(x-y)\cdot(c'\cdot d') \subseteqq (x)\cdot(c'\cdot d') + (y)\cdot(c'\cdot d') \subseteqq (x)\cdot(c') + (y)\cdot(d') \subseteqq \mathfrak{a}.$$

Satz 7. *Das Ideal $\mathfrak{q}$ ist dann und nur dann primär, wenn für jedes M-System in $\mathfrak{o}$ entweder $\mathfrak{q}_M = \mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{q}_M = \mathfrak{o}$ gilt.*

Beweis. 1. Das Ideal $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ sei nicht primär, d.h. es gibt ein $b \notin \mathfrak{a}$ und ein $c \notin \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ mit $(b)\cdot(c) \subseteqq \mathfrak{a}$. Sei $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \bigcap \mathfrak{p}_\iota$. Da $c \notin \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$, ist $c \notin \mathfrak{p}_\lambda$ für mindestens ein λ, also c in der Komplementärmenge $C(\mathfrak{p}_\lambda) = M$. Daher liegt b in $\mathfrak{a}_M$ für dieses M, aber nicht in $\mathfrak{a}$, also ist $\mathfrak{a}_M > \mathfrak{a}$. — $\mathfrak{a}_M$ kann aber auch nicht gleich dem ganzen Ring $\mathfrak{o}$ sein, weil sonst c in $\mathfrak{a}_M$ läge und daraus die Existenz eines d in M mit $(c)\cdot(d) \subseteqq \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda$ folgen würde, andererseits aber c und d beide in M, also nicht in dem Primideal $\mathfrak{p}_\lambda$ enthalten wären. — 2. Für mindestens ein M-System sei $\mathfrak{o} > \mathfrak{a}_M > \mathfrak{a}$ und etwa $(b)\cdot(c) \subseteqq \mathfrak{a}$, $b \notin \mathfrak{a}$, $c < M$. Dann muß $M \cap \mathfrak{a}$ leer sein, andernfalls würde nämlich aus der Existenz eines a in $M \cap \mathfrak{a}$ folgen $\mathfrak{o}\cdot(a) \subseteqq \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{o}$. Nun sei M' ein maximales M enthaltendes und $\mathfrak{a}$ nicht treffendes M-System. Nach § 1, Satz 5, ist sein Komplement $C(M') = \mathfrak{p}_\lambda$ ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$. Da

$$c < M \subseteqq M' = C(\mathfrak{p}_\lambda),$$

liegt c nicht in $\mathfrak{p}_\lambda$, also auch nicht in $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \bigcap \mathfrak{p}_\iota$. Aus $c \notin \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$, aber nach Voraussetzung $(b)\cdot(c) \subseteqq \mathfrak{a}$, $b \notin \mathfrak{a}$, erkennt man, daß $\mathfrak{a}$ nicht primär ist.

In Noetherschen Ringen folgt aus der aufsteigenden Kettenbedingung, daß für ein Primärideal $\mathfrak{q}$ eine Potenz des zugehörigen Primideales $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{q}$ enthalten ist. Das erwies sich auch für nichtkommutative, aber assoziative Ringe als richtig (Murdoch [*11*]) und läßt sich auf *na*-Ringe verallgemeinern, wie Satz 9 zeigen wird. Dazu braucht man

Satz 8. *Wenn $\mathfrak{o}$ die aufsteigende Kettenbedingung für zweiseitige Ideale erfüllt, ist das Radikal eines jeden Ideales $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}$ Durchschnitt von nur endlich vielen Primidealen.*

Beweis. Wenn $\mathfrak{a}$ prim, ist alles klar. — Andernfalls gibt es zwei Elemente $b, c \notin \mathfrak{a}$ mit $(b)\cdot(c) \subseteqq \mathfrak{a}$. Hätte nun $\mathfrak{a}$ unendlich viele minimale Primoberideale $\mathfrak{p}_\iota$, dann hätte, wegen $(\mathfrak{a}, b)\cdot(\mathfrak{a}, c) \subseteqq \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}_\iota$ mindestens einer der beiden Faktoren ebenfalls unendlich viele unter den $\mathfrak{p}_\iota$ zu minimalen Primoberidealen, wäre also nicht prim. Derselbe Schluß ließe sich auf $(\mathfrak{a}, b)$ bzw. $(\mathfrak{a}, c)$ anwenden und ergäbe bei Fortsetzung eine aufsteigende Kette echt ineinander enthaltener Ideale, die nicht abbräche, q. e. a.

Satz 9. *In $\mathfrak{o}$ gelte die aufsteigende Kettenbedingung. Daher ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ Durchschnitt bereits endlich vieler Primideale. Dann liegt ein gewisses Produkt $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{p}_i$ in $\mathfrak{a}$, wobei in $\mathfrak{P}$ jedes $\mathfrak{p}_i$ mehrfach auftreten kann.*

Beweis durch Teilerinduktion (vgl. van der Waerden [*14*], § 84): Der Fall $\mathfrak{a}$ prim ist wieder trivial. — Wenn $\mathfrak{a}$ nicht prim, seien b und c wie beim Beweis des vorigen Satzes gewählt und $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_r$ die endlich vielen minimalen Primoberideale von (a, b) bzw. $\mathfrak{p}'_{r+1}, \ldots, \mathfrak{p}'_s$ die von (a, c). Nach Induktionsannahme ist ein gewisses Produkt $\mathfrak{P}'(\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_r) \subseteq (a, b)$ und ein Produkt $\mathfrak{P}''(\mathfrak{p}'_{r+1}, \ldots, \mathfrak{p}'_s) \subseteq (a, c)$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{P}' \cdot \mathfrak{P}'' \subset (a, b) \cdot (a, c) \subseteq \mathfrak{a}$. Jedes der Ideale $\mathfrak{p}'_k$ ist nun Primoberideal von $\mathfrak{a}$, enthält also nach dem zweiten Teil des Beweises von Satz 5 in § 1 eines der minimalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$, etwa $\mathfrak{p}_i(k)$. Daraus folgt, daß auch $\mathfrak{P}'(\mathfrak{p}_{i(1)}, \ldots, \mathfrak{p}_{i(r)}) \cdot \mathfrak{P}''(\mathfrak{p}_{i(r+1)}, \ldots, \mathfrak{p}_{i(s)})$ in $\mathfrak{a}$ liegt.

Korollar. *Bei aufsteigender Kettenbedingung für zweiseitige Ideale in* $\mathfrak{o}$ *liegt eine gewisse Potenz von* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ *in* $\mathfrak{a}$.

Beweis. $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ ist in jedem der $\mathfrak{p}_i$ von Satz 9 enthalten.

Dieses Korollar spielt beim Aufbau der Idealtheorie der *na*-Ringe keine so große Rolle wie bei den assoziativen Ringen, denn durch die Bildungen $\mathfrak{P}' \cdot \mathfrak{P}''$ kommt eine Klammersetzung in die Produkte herein. Es läßt sich z. B. beim Beweis der Sätze 2 und 3 nicht, wie sonst üblich, verwenden, sondern dort wurde $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ herangezogen, s. auch § 3, Satz 1.

Wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ ein Durchschnitt von Primäridealen und, nach dem letzten Korollar, $\mathfrak{P}_i(\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)) \subseteq \mathfrak{q}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ist, liegt $\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_n \subseteq \mathfrak{a}$ unabhängig von der Klammersetzung zwischen den $\mathfrak{P}_i$ (da deren Produkt immer im Durchschnitt liegt), aber abhängig natürlich von der Art der Potenzbildungen bei den einzelnen $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$.

§ 3. Eindeutigkeitssätze für Durchschnitte von Primäridealen

In assoziativen und kommutativen Ringen mit Einselementen garantiert die aufsteigende Kettenbedingung für Ideale, daß jedes Ideal des Ringes sich als Durchschnitt primärer Ideale darstellen läßt. Das ist aber bekanntlich nicht mehr richtig, wenn man die Forderung der Kommutativität wegläßt, z. B. im Ring der Polynome in zwei nicht vertauschbaren Unbestimmten mit Koeffizienten aus einem Körper (s. Murdoch [*11*]). Andererseits liegt es aber auch nicht am Kommutativgesetz allein, denn das Beispiel 2 in § 2 ist eine kommutative Algebra endlichen Ranges, in der (0) weder Primärideal noch als Durchschnitt von Primäridealen darstellbar ist, da jedes von (0) verschiedene Ideal das Ideal $(A) \neq (0)$ enthält. — Mit der üblichen verbandstheoretischen Schlußweise (vgl. van der Waerden [*14*], § 87) kann man auch in *na*-Ringen mit aufsteigender Kettenbedingung für zweiseitige Ideale zeigen, daß sich jedes Ideal als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Ideale darstellen läßt, aber ein irreduzibles Ideal braucht eben nicht primär zu sein.

Dagegen lassen sich die Eindeutigkeitssätze übertragen. Wenn man also fragt, wie weit es möglich ist, einen Durchschnitt von Primäridealen als Durchschnitt von anderen Primäridealen darzustellen, findet man, daß in einer „Normaldarstellung" sowohl die Anzahl der Primärideale als auch

deren zugehörige Radikale festgelegt sind. Auch das Auftreten der „isolierten Komponenten" in jeder solchen Darstellung des Durchschnittsideales läßt sich bei geeigneter Definition dieser Komponenten beweisen.

Zum Begriff der Normaldarstellung gelangt man so: In einer Darstellung eines Ideales $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt endlich vieler Primärideale kann man alle diejenigen, die dasselbe Radikal besitzen, nach § 2, Satz 2, zu einem Primärideal zusammenfassen und dann den unverkürzbaren Durchschnitt bilden, d.h. diejenigen Primärideale, die den Durchschnitt der übrigen umfassen, der Reihe nach weglassen. In der so erhaltenen *Normaldarstellung* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ ist nach § 2, Satz 3, der Durchschnitt beliebiger unter diesen Primäridealen nicht mehr primär und stets ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i) \neq \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_k)$ für $i \neq k$. Wir wollen die $\mathfrak{q}_i$ einer Normaldarstellung von $\mathfrak{a}$ auch *Primärkomponenten* von $\mathfrak{a}$ nennen.

Satz 1. *In zwei Normaldarstellungen* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m$ *und* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n'$ *ist* $m = n$ *und bei passender Numerierung* $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i')$ *für* $i = 1, 2, \ldots, m$.

Beweis. Bei $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ muß $m = n = 1$ und $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1' = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_1') = \mathfrak{o}$ sein. — Es sei also $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und etwa $\mathfrak{r}_m = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_m)$ maximal unter den $m+n$ Idealen $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$, $\mathfrak{r}_j' = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_j')$, d.h. $\mathfrak{r}_m$ werde von keinem der $\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}_j'$ als echtem Oberideal umfaßt. Würde nun $\mathfrak{r}_m$ unter den $\mathfrak{r}_1', \ldots, \mathfrak{r}_n'$ nicht auftreten, so würde auch $\mathfrak{q}_m$ in keinem der $\mathfrak{r}_j'$ enthalten sein, weil $\mathfrak{q}_m \subseteqq \mathfrak{r}_j'$ gemäß § 1, Satz 7, nach sich zöge $\mathfrak{r}_m = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_m) \subseteqq \mathfrak{r}(\mathfrak{r}_j') = \mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_j')) = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_j') = \mathfrak{r}_j'$. Aus $\mathfrak{q}_m \subsetneqq \mathfrak{r}_j'$ für $j = 1, \ldots, n$ folgt nach § 2, Satz 4, $\mathfrak{q}_j' : \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_j'$. Andererseits liegt auch $\mathfrak{q}_m$ in keinem der $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{m-1}$, weil sonst $\mathfrak{r}_m = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_m)$ in einem von ihnen läge, also auf Grund der Maximalität von $\mathfrak{r}_m$ gleich diesem Radikal wäre, was in einer Normaldarstellung unmöglich ist. Daraus folgt $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_i$ für $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Auch in *na*-Ringen gilt die Rechenregel

$$[\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}] : \mathfrak{c} = [\mathfrak{a} : \mathfrak{c}] \cap [\mathfrak{b} : \mathfrak{c}].$$

Mit ihrer Hilfe sieht man sofort

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \mathfrak{q}_m &= \mathfrak{q}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n' = \mathfrak{a} \\ &= \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{m-1}, \end{aligned}$$

da $\mathfrak{q}_m : \mathfrak{q}_m = \mathfrak{o}$ ist. Das widerspricht aber der Unverkürzbarkeit der Normaldarstellung von $\mathfrak{a}$ durch die $\mathfrak{q}_i$. Also tritt $\mathfrak{r}_m$ unter den $\mathfrak{r}_j'$ auf; es sei etwa $\mathfrak{r}_m = \mathfrak{r}_n'$. Sollte $m = 1$ sein, so wäre $\mathfrak{a} : \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{o} = \mathfrak{q}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n'$, was $\mathfrak{q}_j' \subset \mathfrak{o}$ widerspräche (Normaldarstellung!), falls $\mathfrak{r}_1$ ungleich allen $\mathfrak{r}_j'$ wäre. — Nach § 2, Satz 2, ist wegen $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_m) = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_n')$ auch $\mathfrak{q}_m \cap \mathfrak{q}_n' = \mathfrak{q}$ primär und $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{q}_m)$. Nach genau denselben Schlüssen wie oben folgt wegen der Maximalität von $\mathfrak{r}_m$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \mathfrak{q} &= \mathfrak{q}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{n-1}' \\ &= \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{m-1}. \end{aligned}$$

Diese Schlußweise läßt sich für $\mathfrak{a} : \mathfrak{q}$ statt $\mathfrak{a}$ wiederholen und führt schließlich, falls etwa $m < n$ wäre, zu $\mathfrak{o} = \mathfrak{q}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{n-m}'$. Also müßte eines der $\mathfrak{q}_j' = \mathfrak{o}$ sein, die Darstellung von $\mathfrak{a}$ wäre also verkürzbar, q. e. a.

Aus der im Beweis benutzten Rechenregel folgt auch

Satz 2. *Wenn* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$ *und* $\mathfrak{b}\not\subseteq\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$ *für* $i=1,2,\ldots,n$, *ist* $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$.

Satz 3. *M sei ein M-System und* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$, *alle* $\mathfrak{q}_i$ *primär. Ferner sei* $\mathfrak{r}_i=\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$ *und* $M\cap\mathfrak{r}_i=\emptyset$ *für* $i=1,\ldots,m$ *und* $M\cap\mathfrak{r}_k\neq\emptyset$ *für* $k=m+1,\ldots,n$. *Dann ist* $\mathfrak{a}_M=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_m$.

Beweis. 1. Aus x in $\mathfrak{a}_M$ folgt $(x)\cdot(c)\subseteq\mathfrak{a}$ für mindestens ein c aus M. Da $M\cap\mathfrak{r}_i=\emptyset$ für $i=1,\ldots,m$ ist $c\not\subseteq\mathfrak{r}_i$, also x in $\mathfrak{q}_i$ für diese i. — 2. Sei $y<\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_m$. Für $k=m+1,\ldots,n$ ist auch $M\cap\mathfrak{q}_k\neq\emptyset$ nach § 1, Satz 9, da $\mathfrak{r}_k$ das Radikal von $\mathfrak{q}_k$ ist. Sei etwa q_k in $M\cap\mathfrak{r}_k$ für diese k. Da M ein M-System ist, gibt es in (q_{m+1}) und (q_{m+2}) zwei Elemente q'_{m+1} bzw. q'_{m+2} mit $q''_{m+2}=q'_{m+1}\cdot q'_{m+2}$ in M, also auch $q''_{m+2}<\mathfrak{q}_{m+1}\cap\mathfrak{q}_{m+2}\cap M$. Wieder existieren in (q''_{m+2}) und (q_{m+3}) zwei Elemente q'_{m+2} und q'_{m+3} mit $q''_{m+3}=q'_{m+2}\cdot q'_{m+3}$ in M. Und so weiter bis schließlich $q''_n<\mathfrak{q}_{m+1}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n\cap M$ erreicht ist. Dann liegt aber $(y)\cdot(q''_n)$ in $[\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_m]\cdot[\mathfrak{q}_{m+1}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n]\subseteq\mathfrak{a}$ und q''_n in M, also gehört y zu $\mathfrak{a}_M$.

Aus diesem Satz läßt sich der zweite Eindeutigkeitssatz ableiten:

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$ *eine Normaldarstellung von* $\mathfrak{a}$ *und die* $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$ *Durchschnitt jeweils endlich vieler* $\mathfrak{p}_{ik}$, $i=1,\ldots,n$; $k=1,\ldots,n_i$. *Dann tritt* $\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t$ *in jeder Normaldarstellung von* $\mathfrak{a}$ *auf, falls es zu jedem der Primärideale* $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_t$ *unter den zugehörigen minimalen Primoberidealen mindestens eines,* $\mathfrak{p}_{ik_i}=\mathfrak{p}'_i$, *gibt, das keines der zugehörigen minimalen Primoberideale* $\mathfrak{p}_{jk}$ *der restlichen Primärideale enthält.*

Beweis. $C(\mathfrak{p}'_i)=M_i$ ist ein M-System, $i=1,\ldots,t$. Für $j=t+1,\ldots,n$ liegt nun nach Voraussetzung kein $\mathfrak{p}_{jk}$ in $\mathfrak{p}'_i$, also auch nicht $\mathfrak{r}_j=\mathfrak{p}_{j1}\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_{jn_j}$, da $\mathfrak{p}'_i$ prim ist und nach § 1, Satz 2, $\mathfrak{r}_j$ das Produkt der $\mathfrak{p}_{jk}$ enthält. Aus $\mathfrak{r}_j$ nicht in $\mathfrak{p}'_i$ folgt, für $i=1,\ldots,t$, $M_i\cap\mathfrak{r}_j\neq\emptyset$, also ist nach Satz 3 $\mathfrak{a}_{M_i}$ Oberideal von $\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t$. — Andererseits ist $M_i\cap\mathfrak{p}'_i=\emptyset$, folglich tritt, wieder nach Satz 3, in der Durchschnittsdarstellung von $\mathfrak{a}_{M_i}$ zumindest $\mathfrak{q}_i$ auf. Dies zieht, zusammen mit dem zuerst Bewiesenen, $\mathfrak{a}_{M_1}\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_{M_t}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t$ nach sich, wobei zur Definition der linken Seite der Gleichung nur die $\mathfrak{p}'_i$, also nur die Radikale $\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_n$ benötigt werden, die nach Satz 1 in jeder Normaldarstellung von $\mathfrak{a}$ auftreten.

Die Voraussetzung, daß jedes $\mathfrak{r}_i$ Durchschnitt nur endlich vieler Primideale ist, ist nach § 2, Satz 8, sicher dann erfüllt, wenn in $\mathfrak{o}$ die aufsteigende Kettenbedingung für zweiseitige Ideale gilt. Aus dieser Bedingung folgt auch, daß ein Radikal $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ dann und nur dann primär ist, wenn $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ prim ist, denn jedes Primideal ist primär und sein eigenes Radikal, andererseits ist nach § 2, Satz 3, der Durchschnitt endlich vieler Primärideale zu verschiedenen Radikalen nicht primär. Schließlich kann man zeigen den

Satz 5. *Es sei* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$ *und jedes* $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$ *der Durchschnitt nur endlich vieler Primideale* $\mathfrak{p}_{ik}$, $i=1,\ldots,n$; $k=1,\ldots,n_i$. *Dann sind die minimalen Primoberideale von* $\mathfrak{a}$ *genau diejenigen unter den* $\mathfrak{p}_{ik}$, *die in der Menge der* $\mathfrak{p}_{ik}$ *minimal sind.*

Beweis. Nach § 2, Satz 9, liegt das Produkt $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$ in $\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{P}_i(\mathfrak{p}_{i1}, \dots, \mathfrak{p}_{in_i})$ ein Produkt der $\mathfrak{p}_{ik}$ aus $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_i)$ ist. Jedes Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ enthält also nach § 1, Satz 2, mindestens eines der Ideale $\mathfrak{p}_{ik}$, etwa $\mathfrak{p}_{rs}$. Wenn $\mathfrak{p}$ sogar minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ ist, muß $\mathfrak{p}$ gleich diesem $\mathfrak{p}_{rs}$ und $\mathfrak{p}_{rs}$ minimal in der Menge der $\mathfrak{p}_{ik}$ sein. — Wenn andererseits $\mathfrak{p}_{rs}$ minimal in der Menge der $\mathfrak{p}_{ik}$ ist, muß $\mathfrak{p}_{rs}$ nicht nur Oberideal von $\mathfrak{r}(\mathfrak{q}_r)$ und damit von $\mathfrak{a}$ sein, sondern sogar minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$, denn andernfalls enthielte $\mathfrak{p}_{rs}$ als Primideal wieder ein Primideal $\mathfrak{p}_{nv}$ aus der Menge aller Primideale $\mathfrak{p}_{ik}$ als echtes Unterideal, weil aus $\mathfrak{p}_{rs} > \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ folgt, daß $\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_n$ echtes Unterideal von $\mathfrak{p}$ ist.

Literatur

[1] AMITSUR, S. A.: A general theory of radicals. I, II, III. Amer. J. Math. I **74**, 775—786 (1952); II, III **76**, 100—136 (1954). — [2] BAER, R.: Radical ideals. Amer. J. Math. **65**, 537—568 (1943). — [3] BEHRENS, E.-A.: Nichtassoziative Ringe. Math. Ann. **127**, 441—452 (1954). — [4] MCCOY, N. H.: Prime ideals in general rings. Amer. J. Math. **71**, 823—833 (1949). — [5] CURTIS, CH. W.: On additive ideal theory in general rings. Amer. J. Math. **74**, 687—700 (1954). — [6] FITTING, H.: Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen. Math. Ann. **111**, 19—41 (1935). — [7] FUCHS, L.: On primal ideals. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 1—8 (1950). — [8] KRULL, W.: Zweiseitige Ideale in nichtkommutativen Bereichen. Math. Z. **28**, 481—503 (1928). — [9] KRULL, W.: Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Ann. **101**, 729—744 (1929). — [10] KRULL, W.: Idealtheorie. Berlin 1935. — [11] MURDOCH, D. C.: Contributions to noncommutative ideal theory. Canad. J. Math. **4**, 43—57 (1952). — [12] NORTHCOTT, D. G.: Ideal theory. Cambridge 1953. — [13] SMILEY, M. F.: Application of a radical of Brown und McCoy to nonassociative rings. Amer. J. Math. **72**, 93—100 (1950). — [14] WAERDEN, B. L. VAN DER: Moderne Algebra II, 2. Aufl. Berlin 1940. — [15] SCHMIDT, J.: Über die Rolle der transfiniten Schlußweisen in einer allgemeinen Idealtheorie. Math. Nachr. **7**, 165—182 (1952).

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 20. August 1954)

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 183—191 (1956)

Über die Äquivalenz der $|B_k|$-Verfahren

Von
DIETER GAIER

1. *Einleitung.* Vorgelegt sei eine Reihe

$$\sum a_n \tag{1}$$

mit beliebigen komplexen Gliedern[1]) und mit den Teilsummen s_n. Sie heißt B-summierbar zum Wert s, wenn die Transformation

$$B(x; s_\nu) = e^{-x} \sum \frac{s_n x^n}{n!}$$

für $x > 0$ existiert und gegen den Grenzwert s strebt für $x \to +\infty$; darüber hinaus heißt (1) sogar $|B|$-summierbar, wenn das Integral

$$\int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} B(x; s_\nu) \right| dx < \infty$$

ist.

Es kann nun vorkommen, daß die Reihe (1) selbst nicht B-summierbar ($|B|$-summierbar) ist, wohl aber diejenige Reihe, die dadurch entsteht, daß man sämtliche Glieder von (1) um k Stellen nach rechts verschiebt und k Nullen vorschaltet; d.h. die Reihe

$$\underbrace{0 + 0 + 0 + \cdots + 0}_{k} + a_0 + a_1 + \cdots \tag{2}$$

kann B-summierbar ($|B|$-summierbar) sein. In diesem Falle sagt man dann, die Ausgangsreihe (1) sei B_k-summierbar ($|B_k|$-summierbar)[2]).

Diese B_k- und $|B_k|$-Verfahren werden mit wachsendem k stärker. In Verschärfung früherer Ergebnisse von GARTEN und KARAMATA wurde andererseits vor einiger Zeit nachgewiesen, daß sämtliche B_k-Verfahren in der Anwendung auf (1) äquivalent sind, sofern

$$a_n = O(K^n) \qquad (n \to \infty,\ K \text{ fest}) \tag{3}$$

gilt ([4], S. 453); diese Aussage wird falsch, wenn (3) durch die schwächere Forderung

$$a_n = O(K^n \cdot n^{\varepsilon n}) \qquad (n \to \infty,\ K \text{ fest},\ \varepsilon > 0) \tag{4}$$

---

[1]) Statt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ schreiben wir stets $\sum a_n$.

[2]) Diese so definierten Summierungsverfahren sind ausführlich diskutiert z.B. in SANNIA ([10]) und KNOPP ([7] und [8]).

ersetzt wird [5]. Der Zweck dieser Note ist es, das folgende entsprechende Resultat für die $|B_k|$-Verfahren zu beweisen:

Satz 1. *Sämtliche $|B_k|$-Verfahren ($k=0, 1, 2, \ldots$)*[3] *sind in der Anwendung auf* (1) *äquivalent, sofern* (3) *gilt; diese Aussage wird falsch, wenn* (3) *durch die schwächere Forderung* (4) *ersetzt wird.*

Als Hilfsmittel beim Beweis dienen, wie beim entsprechenden Fall der Äquivalenz der B_k-Verfahren, gewisse Sätze aus der Funktionentheorie und insbesondere aus der Theorie der ganzen Funktionen; diese sind auch unabhängig von der hier behandelten Fragestellung interessant und werden dem Beweis von Satz 1 (§ 3) in § 2 vorangestellt.

Der Verf. dankt den Herren K. KNOPP und K. ZELLER für Verbesserungsvorschläge zu der ursprünglichen Fassung der Arbeit.

2. *Hilfssätze über ganze Funktionen.* Die im Winkelraum $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ reguläre Funktion heißt dort vom Exponentialtyp k, wenn

$$M(r) = O(e^{(k+\varepsilon)r}) \qquad (r \to \infty)$$

gilt für jedes $\varepsilon > 0$, aber für kein $\varepsilon < 0$; dabei ist $M(r)$ das Maximum von $|f(z)|$ auf dem Kreisbogen $|z| = r$, $\alpha \leq \arg z \leq \beta$. Zur genaueren Beschreibung des Wachstums von $|f(z)|$ längs Radien dient die Indikatorfunktion

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |f(r e^{i\varphi})|}{r} \qquad (\alpha \leq \varphi \leq \beta).$$

Hilfssatz 1 (A. J. MACINTYRE). *Für die in $\Re(z) \geq 0$ reguläre Funktion $f(z)$ vom Exponentialtyp k sei $h_f(0) \leq 0$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ in $\Re(z) \geq 0$ derart, daß gilt:*

a) $f_1(z)$ *ist eine ganze Funktion vom Exponentialtyp* $\leq k + \varepsilon$;

b) $f_1(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ $(x \to -\infty)$;

c) $f_2(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x \to +\infty)$.

Dieser Hilfssatz findet sich implizit bei A. J. MACINTYRE ([9], S. 14–16); bei BOAS ([2], S. 80) fehlt die Aussage b), die aber a. a. O. (S. 181) benützt wird; bei HARVEY ([6], S. 196) wird behauptet, $f_1(z)$ sei vom Exponentialtyp k, was im allgemeinen nicht zutrifft[4]).

Da kein vollständiger Beweis von Hilfssatz 1 vorzuliegen scheint, wollen wir den bei BOAS ([2], S. 80–81) gegebenen ergänzen.

Beweis von Hilfssatz 1. Auf Grund der Voraussetzung $h_f(0) \leq 0$ existiert die LAPLACE-Transformierte $F(w)$ von $f(z)$ für $\Re(w) > 0$. Sie besitzt überdies, wie in [2], S. 78ff. näher ausgeführt ist, eine analytische Fortsetzung in das

[3]) Wegen des $|B_r| \to |B_s|$-Satzes ($s \geq r \geq 0$) (vgl. [8], S. 8) gilt Satz 1 für alle $|B_k|$-Verfahren ($k \geq 0$, reell).

[4]) Man nehme z. B. $f(z) = C \neq 0$. Wäre in diesem Fall die ganze Funktion $f_1(z)$ mit $f_1(x) = o(1)$ $(x \to -\infty)$ und $f_1(x) = f(x) - f_2(x) = C + o(1)$ $(x \to +\infty)$ vom Exponentialtyp $k = 0$, so wäre (z. B. [2], S. 83, Theorem 6.2.13) $f_1(z)$ eine Konstante, im Widerspruch zu ihrem Verhalten für $x \to \pm\infty$.

untengezeichnete schraffierte Gebiet und ist auf dem Weg $C = C_1 + C_2^{(1)} + C_2^{(2)}$ beschränkt. Mit ihrer Hilfe kann man dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zw} F(w)\, dw = f_1(z) + f_2^{(1)}(z) + f_2^{(2)}(z) \qquad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

schreiben.

Wollen wir zunächst $f_1(z)$ näher betrachten, so zerlegen wir C_1 in seine drei Geradenstücke. Der Beitrag des Weges $w = \varepsilon + iv$ $(-k-\varepsilon \leq v \leq k+\varepsilon)$ gibt eine Funktion

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k-\varepsilon}^{+k+\varepsilon} e^{z\varepsilon} \cdot e^{izv} \cdot F(\varepsilon + iv)\, dv = \frac{e^{z\varepsilon}}{2\pi} \int_{-k-\varepsilon}^{+k+\varepsilon} e^{izv} F(\varepsilon + iv)\, dv.$$

Der zweite Faktor hierin ist eine ganze Funktion vom Exponentialtyp $\leq k+\varepsilon$, wie man sofort sieht, die überdies auf der reellen Achse beschränkt ist; also ist $\varphi_1(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtyp $\leq k + 2\varepsilon$, für die $\varphi_1(x) = O(e^{-|x|\varepsilon})$ $(x \to -\infty)$ gilt. — Weiter gibt der Beitrag des Weges $w = i(k+\varepsilon) + u$ $(0 \leq u \leq \varepsilon)$ eine Funktion

$$\varphi_2(z) = \frac{e^{iz(k+\varepsilon)}}{2\pi i} \int_0^{\varepsilon} e^{uz} F\big(i(k+\varepsilon)+u\big)\, du,$$

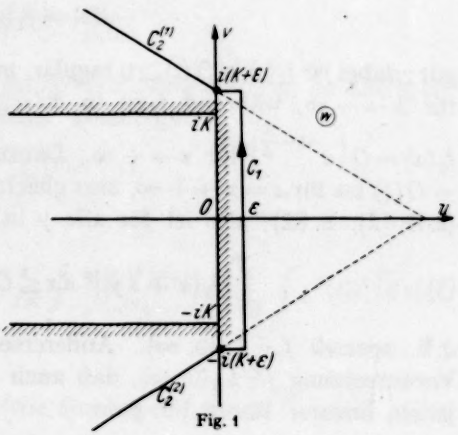


Fig. 1

was ebenfalls eine ganze Funktion vom Exponentialtyp $\leq k+2\varepsilon$ ergibt. Die Abschätzung des Integrals führen wir nach partieller Integration aus. Man erhält für $z = -x$ $(x > 0)$

$$|\varphi_2(-x)| = O\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +\infty).$$

Entsprechend behandelt man den Beitrag, der vom dritten Geradenstück herrührt, und erhält insgesamt in $f_1(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtyp $\leq k+2\varepsilon$, mit $f_1(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ $(x \to -\infty)$.

Daher ist $f_2^{(1)}(z) + f_2^{(2)}(z)$ in $\Re(z) \geq 0$ regulär, und eine einfache Abschätzung auf Grund der Beschränktheit von $F(w)$ auf C zeigt ferner (z.B. [2], S. 81) die Gültigkeit von $f_2^{(1)}(x) + f_2^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x \to +\infty)$. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Für die in $\Re(z) \geq 0$ reguläre Funktion $f(z)$ vom Exponentialtyp sei $\int_0^{\infty} |f(x)|^p\, dx < \infty$ $(p > 0)$. Dann ist auch $\int_0^{\infty} |f(x+iy)|^p\, dx < \infty$, gleichmäßig in jedem beschränkten Intervall $-a \leq y \leq +a$.*

Der erste Teil der Aussage ist bekannt ([2], S. 99), doch benötigen wir zum Beweis von Satz 2 weiter unten auch den zweiten Teil der Aussage von Hilfssatz 2.

Beweis von Hilfssatz 2. Wir betrachten zunächst alle y in $0 \leq y \leq a$. Wir haben $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ ([2], S. 99), weshalb für die Funktion $g(z) = (z+i+1)^{1/p} \cdot f(z)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 für ein gewisses k erfüllt sind $\left(\text{es ist ja } h_f(\varphi) = h_g(\varphi) \text{ in } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}\right)$. Zerlegt man $g(z)$ entsprechend der dortigen Aussage,

$$g(z) = (z+i+1)^{1/p} \cdot f(z) = g_1(z) + g_2(z),$$

so sieht man sofort, daß in $\Re(z) \geq 0$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

gilt; dabei ist $f_1(z)$ in $\Im(z) \geq 0$ regulär, mit der Abschätzung $f_1(x) = O\left(|x|^{-1-\frac{1}{p}}\right)$ für $x \to -\infty$, während $f_2(z)$ in $\Re(z) \geq 0$ regulär ist, mit der Abschätzung $f_2(x) = O\left(x^{-1-\frac{1}{p}}\right)$ für $x \to +\infty$. Daraus folgt nun einerseits, daß $z^{1+\frac{1}{p}} \cdot f_2(z) = O(1)$ ist für $z = x \to +\infty$, also gleichmäßig im Halbstreifen $x \geq 0$, $0 \leq y \leq a$ (z. B. [2], S. 82); also ist für alle y in $\langle 0, a \rangle$

$$\int_0^\infty |f_2(x+iy)|^p \, dx \leq C \int_0^\infty \left(x^{-1-\frac{1}{p}}\right)^p dx \leq A_2, \tag{5}$$

d. h. speziell $f_2 \in L_p(0, \infty)$. Andererseits folgt daraus, zusammen mit der Voraussetzung $f \in L_p(0, \infty)$, daß auch $f_1 = f - f_2 \in L_p(0, \infty)$ ist ($L_p(0, \infty)$ ist ja ein linearer Raum für jedes $p > 0$), also

$$\int_0^\infty |f_1(x)|^p \, dx < \infty.$$

Wegen $f_1(x) = O\left(|x|^{-1-\frac{1}{p}}\right)$ für $x \to -\infty$ ist aber auch $\int_{-\infty}^0 |f_1(x)|^p \, dx < \infty$, insgesamt also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^p \, dx < \infty.$$

Daraus folgt nun aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x+iy)|^p \, dx \leq e^{p k' y} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^p \, dx \qquad (0 \leq y \leq a), \tag{6}$$

wenn k' den Typ von $f_1(z)$ in $\Im(z) \geq 0$ bezeichnet[5]). Insgesamt ist also $\int_0^\infty |f_s(x+iy)|^p \, dx \leq A_s$ $(s = 1, 2)$, also $\int_0^\infty |f(x+iy)|^p \, dx \leq A$ für y in $0 \leq y \leq a$. Entsprechend schließt man für die y in $-a \leq y \leq 0$, und Hilfssatz 2 ist bewiesen.

[5]) Die Ungleichung (6) findet sich ohne Beweis bei BOAS ([2], S. 98, Theorem 6.7.7), doch läßt sich der Beweis ganz in Analogie zum Beweis des dortigen Satzes 6.7.4 führen, indem man wieder die R. NEVANLINNAsche Darstellung einer in $\Im(z) > 0$ regulären Funktion bzw. deren Abschätzung durch ihre Werte auf der reellen Achse ([2], S. 93) heranzieht.

Hilfssatz 3. *Die Funktion $f(z)$ sei im abgeschlossenen Quadrat $\overline{Q}$ (Q: $|x|<1$, $|y|<1$; $z=x+iy$) mit dem Rand R regulär. Dann gibt es zu jedem $k=0, 1, 2, \ldots$ und $p>0$ Konstanten $A(k,p)$ derart, daß gilt*

$$|f^{(k)}(0)|^p \leq A(k,p) \int_R |f(z)|^p \, |dz| . \tag{7}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $k=0$. Ist $f(0)=0$, so ist nichts zu beweisen. Es sei daher $f(0) \neq 0$ und insbesondere $f(z) \not\equiv 0$, weshalb $f(z)$ nur endlich viele Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in Q hat; sie seien ihrer Vielfachheit entsprechend aufgeführt. Nun bezeichne $w=g_\nu(z)$ eine konforme Abbildung von Q auf $|w|<1$ mit $g_\nu(z_\nu)=0$; $g_\nu(z)$ ist in Q regulär und hat genau eine Nullstelle in Q an der Stelle z_ν. Daher ist die Funktion

$$F(z) = \frac{f(z)}{g_1(z) \cdot \cdots \cdot g_n(z)}$$

in Q regulär und nullstellenfrei. In $\overline{Q}$ ist diese Funktion stetig, da alle $g_\nu(z)$ in $\overline{Q}$ stetig und auf dem Rande $\neq 0$ sind. Daher gilt

$$\{F(0)\}^p = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\{F(z)\}^p \, dz}{z} ,$$

also

$$|f(0)|^p \leq |F(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_R \frac{|F(z)|^p \, |dz|}{|z|} = \frac{1}{2\pi} \int_R \frac{|f(z)|^p \, |dz|}{|z|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_R |f(z)|^p \, |dz| ,$$

also gilt (7) im Falle $k=0$.

Für den Fall $k=1$ betrachten wir die Funktion $f_1(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$. Die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 sind erfüllt, und seine bereits bewiesene Gültigkeit im Falle $k=0$ liefert

$$\left\{ \begin{aligned} |f_1(0)|^p = |f'(0)|^p &\leq A(0,p) \int_R \frac{|f(z)-f(0)|^p}{|z|^p} \, |dz| \\ &\leq A(0,p) \int_R [|f(z)| + |f(0)|]^p \, |dz| . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

α) $0<p\leq 1$. Es gilt $[|f(z)|+|f(0)|]^p \leq |f(z)|^p + |f(0)|^p$, und somit folgt aus (8)

$$|f'(0)|^p \leq A(0,p) \left\{ \int_R |f(z)|^p \, |dz| + |f(0)|^p \int_R |dz| \right\} ,$$

also zusammen mit (7) im Fall $k=0$

$$|f'(0)|^p \leq A(0,p) \, [1 + 8A(0,p)] \int_R |f(z)|^p \, |dz| .$$

β) $p \geq 1$. Die Minkowskische Ungleichung liefert dann

$$\left\{ \int_R [|f(z)| + |f(0)|]^p \, |dz| \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_R |f(z)|^p \, |dz| \right\}^{1/p} + \left\{ \int_R |f(0)|^p \, |dz| \right\}^{1/p} .$$

Verwendet man zur Abschätzung des zweiten Terms wieder (7) im Fall $k=0$, addiert beide Terme und potenziert mit p, so folgt aus (8) sofort die Gültigkeit von (7) für $k=1$ auch für $p \geq 1$.

Ganz entsprechend verfährt man in den Fällen $k=2, 3, \ldots$; z.B. betrachtet man im Fall $k=2$ die Hilfsfunktion $f_2(z)=\frac{f(z)-f(0)-f'(0)\,z}{z^2}$ und wendet auf sie wieder die Ungleichung (7) für $k=0$ an. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Wichtig für unsere Anwendung zur Äquivalenz der $|B_k|$-Verfahren ist nun der

Satz 2. *Für die in $\Re(z) \geq 0$ reguläre Funktion $f(z)$ vom Exponentialtyp sei $\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx < \infty$ $(p>0)$. Dann ist auch $\int_0^\infty |f'(x)|^p\,dx < \infty$.*

Zusatz 1. *Die Aussage von Satz 2 wird falsch für ganze Funktionen $f(z)$ der Ordnung >1.*

Beweis. Für ein $x_0 > 1$ seien die Wege C_1, C_2, C_3, C_4 wie folgt gewählt:

$$\left.\begin{array}{ll} C_1\colon\ x=x_0+1,\ -1\leq y\leq +1; & C_2\colon\ x_0+1\geq x\geq x_0-1,\ y=1; \\ C_3\colon\ x=x_0-1,\ +1\geq y\geq -1; & C_4\colon\ x_0-1\leq x\leq x_0+1,\ y=-1; \end{array}\right\} (z=x+iy),$$

ferner sei $C=C(x_0)=C_1+C_2+C_3+C_4$. Dann ist mit einer von x_0 unabhängigen Konstanten B

$$|f'(x_0)|^p \leq B \int_{C(x_0)} |f(z)|^p\,|dz| = B \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i(x_0)} |f(z)|^p\,|dz|$$

(Hilfssatz 3). In der Abschätzung für $\int_\alpha^\beta |f'(x_0)|^p\,dx_0$ $(1<\alpha<\beta<\infty)$ tritt daher einmal der Term

$$\int_\alpha^\beta \int_{-1}^{+1} |f(x_0+1+iy)|^p\,dy\,dx_0 < \int_{-1}^{+1}\int_0^\infty |f(x+iy)|^p\,dx\,dy$$

auf, was unter einer von α, β unabhängigen Schranke bleibt (Hilfssatz 2). Andererseits rührt von $C_2(x_0)$ in der Abschätzung von $\int_\alpha^\beta |f'(x_0)|^p\,dx_0$ der Term

$$\int_\alpha^\beta \int_{-1}^{+1} |f(x_0+t+i)|^p\,dt\,dx_0 \tag{9}$$

her. Setzen wir

$$\varphi_1(x) = \int_0^x |f(t+i)|^p\,dt \qquad (x>0),$$

so wird dieser Ausdruck

$$\int_\alpha^\beta [\varphi_1(x_0+1)-\varphi_1(x_0-1)]\,dx_0 = \int_{\beta-1}^{\beta+1} \varphi_1(t)\,dt - \int_{\alpha-1}^{\alpha+1} \varphi_1(t)\,dt < 2\varphi_1(\beta+1),$$

also bleibt auch (9) unter einer von α, β unabhängigen, endlichen Schranke. Entsprechend schließt man für die von den Wegteilen $C_3(x_0)$, $C_4(x_0)$ herrührenden Terme, und man hat insgesamt $\int_0^\infty |f'(x)|^p\,dx < \infty$, womit Satz 2 bewiesen ist.

Auch der Zusatz 1 ist bewiesen, sobald wir gezeigt haben:

Zu jedem $p>0$ und $\varepsilon>0$ gibt es eine ganze Funktion $f(z)$ vom Normaltyp der Ordnung $1+\varepsilon$, für die $\int_0^\infty |f(x)|^p dx < \infty$, aber $\int_0^\infty |f'(x)|^p dx = \infty$ ist.

Wir wählen die Größen σ und δ mit $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ und $0 \leq \delta < 1$ so, daß $\sigma + \delta > \frac{1}{p}$ und $\sigma + \delta \leq \frac{1}{p} + \varepsilon$ ist, und definieren dann die beiden folgenden ganzen Funktionen $g_1(z)$, $g_2(z)$.

$g_1(z) = E_\alpha\left(z \cdot e^{i\frac{\pi\alpha}{2}}\right)\left(\alpha = \frac{1}{1+\varepsilon}\right)$, wobei $E_\alpha(t)$ die MITTAG-LEFFLERsche Funktion vom Normaltyp der Ordnung $\frac{1}{\alpha} = 1+\varepsilon$ ist. Die Funktion $g_1(z)$ hat die Eigenschaften

$$g_1(x) = O(1) \qquad (x \to +\infty),$$
$$|g_1'(x)| = o(1) + \frac{x^\varepsilon}{\alpha^2} \qquad (x \to +\infty);$$

diese Eigenschaften lassen sich leicht aus einer Integraldarstellung für $E_\alpha(z)$ ableiten ([1], S. 272–275 und [5]).

$g_2(z)$ soll eine ganze Funktion vom Exponentialtyp sein, die für $x \to +\infty$ das Verhalten zeigt

$$g_2(x) = x^{-\delta} + O(x^{-1}) \qquad (x \to +\infty).$$

Für $\delta = 0$ nehme man einfach $g_2(z) = 1$, für $0 < \delta < 1$ folgt die Existenz von $g_2(z)$ aus einer Anwendung von Hilfssatz 1 auf die in $\Re(z) \geq 0$ reguläre Funktion $(z+1)^{-\delta}$; man lege sie so fest, daß sie für $x > 0$ positiv werde.

Nun betrachten wir die ganze Funktion vom Normaltyp der Ordnung $1+\varepsilon$

$$f(z) = g_1(z) \cdot \left(\frac{\sin z}{z}\right)^\sigma \cdot g_2(z) = g_1(z) \cdot f_1(z).$$

Für sie gilt in $x \geq 1$ die Abschätzung (K_i Konstanten)

$$|f(x)| \leq K_1 \cdot x^{-\sigma} \cdot x^{-\delta}, \quad \text{also ist} \quad |f(x)|^p \leq K_2 \cdot x^{-\sigma p - \delta p},$$

und auf Grund der Wahl $p(\sigma+\delta) > 1$ ist somit jedenfalls $\int_0^\infty |f(x)|^p dx < \infty$.

Danach untersuchen wir die Ableitung $f'(z) = g_1(z) f_1'(z) + g_1'(z) f_1(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$. Nach Konstruktion war $h(z) = z^{\sigma+\delta} \cdot f_1(z)$ eine in $\Re(z) > 0$ reguläre Funktion vom Exponentialtyp, die für $x \geq 1$ beschränkt war. Also ist ([2], S. 82) $h(z)$ gleichmäßig beschränkt in jedem Halbstreifen $|y| \leq a$, $x \geq 1$, und eine einfache Anwendung der CAUCHYschen Formel zeigt die Beschränktheit von $h'(x)$ für $x \geq 1$, d.h. $|f_1'(x)| \leq K_3 \cdot x^{-\sigma-\delta}$ $(x \geq 1)$ und somit $|\varphi_1(x)| \leq K_4 \cdot x^{-\sigma-\delta}$ $(x \geq 1)$; daher ist infolge unserer Wahl $p(\sigma+\delta) > 1$ die Funktion $\varphi_1(x) \in L_p(0, \infty)$.

Andererseits haben wir für $\varphi_2(x)$ eine Abschätzung nach unten:

$$|\varphi_2(x)| \geq K_5 \cdot x^\varepsilon |\sin x|^\sigma \cdot x^{-\sigma-\delta} \quad (x \geq 1),$$

also ist

$$\int_1^\infty |\varphi_2(x)|^p dx \geq K_6 \cdot \int_1^\infty |\sin x|^{p\sigma} \cdot x^{p(\varepsilon-\sigma-\delta)} dx = +\infty,$$

d.h. $\varphi_2(x) \notin L_p(0, \infty)$. Dann ist aber auch $f'(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \notin L_p(0, \infty)$, also $\int_0^\infty |f'(x)|^p dx = \infty$, und dies war zu zeigen.

3. *Äquivalenz der $|B_k|$-Verfahren.* Wir kommen nun auf unsere ursprüngliche Fragestellung zurück und wollen Satz 1 beweisen. Offensichtlich genügt es, aus der Existenz von $|B_1| - \sum a_n$ die Existenz von $|B| - \sum a_n$ zu erschließen, da ja das umgekehrte sicher richtig ist. Es sei also

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots = 0 + a_0 + a_1 + \cdots; \qquad t_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu = s_{n-1},$$

und $|B| - \sum b_n$ existent, d.h.

$$\int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} B(x; t_\nu) \right| dx < \infty. \tag{10}$$

Auf Grund unserer Voraussetzung (3) gilt $|t_n| \leq M_1 n \cdot K^n \leq M_2 \cdot (K+1)^n$ für $n \geq 0$ und Konstanten M_2, K, also haben wir für die ganze Funktion $B(z; t_\nu)$ die Abschätzung

$$|B(z; t_\nu)| \leq e^{|z|} M_2 \cdot \sum \frac{(K+1)^n |z|^n}{n!} = M_2 \cdot e^{|z|(K+2)},$$

d.h. $B(z; t_\nu)$ und also auch $\frac{d}{dz} B(z; t_\nu)$ ist eine ganze Funktion vom Exponentialtyp. Setzen wir daher in Satz 2 $p = 1$ und berücksichtigen die Annahme (10), so folgt aus Satz 2

$$\int_0^\infty \left| \frac{d^2}{dx^2} B(x; t_\nu) \right| dx < \infty. \tag{11}$$

Nun hängen aber $B(x; t_\nu)$ und $B(x; s_\nu)$ zusammen durch die Transformation

$$B(x; t_\nu) = e^{-x} \int_0^x e^t B(t; s_\nu)\, dt, \tag{12}$$

und es ist

$$\frac{d}{dx} B(x; t_\nu) = B(x; s_\nu) - B(x; t_\nu),$$

also

$$\frac{d}{dx} B(x; s_\nu) = \frac{d^2}{dx^2} B(x; t_\nu) + \frac{d}{dx} B(x; t_\nu). \tag{13}$$

Diese Relation, zusammen mit (10) und (11), liefert sofort

$$\int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} B(x; s_\nu) \right| dx < \infty,$$

d.h. $|B| - \sum a_n$ existiert, falls (3) und (10) gelten.

Um zu sehen, daß aus der Existenz von $|B| - \sum b_n$ noch nicht die von $|B| - \sum a_n$ zu folgen braucht, falls nur (4) gilt, definieren wir die Folge $\{a_n\}$ durch die Relation

$$\sum \frac{t_n z^n}{n!} = e^z \int_0^z f(t)\, dt,$$

wobei $f(z)$ die im Beweis zu Zusatz 1 für die Zahlen $p = 1$ und $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ konstruierte ganze Funktion vom Normaltyp der Ordnung $\frac{1}{1-\varepsilon}$ ist. Dann erfüllt $\{a_n\}$ die Voraussetzung (4), was etwa aus der Tatsache gefolgert werden kann, daß $\sum \frac{t_n z^n}{n!}$ eine ganze Funktion vom Normaltyp der Ordnung $\frac{1}{1-\varepsilon}$ ist, zusammen mit der Koeffizientenabschätzung für solche Funktionen ([1], S. 238). Weiter ist

$$\int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} B(x; t_\nu) \right| dx < \infty,$$

d.h. $|B_1| - \sum a_n$ existiert; jedoch ist

$$\int_0^\infty \left| \frac{d^2}{dx^2} B(x; t_\nu) \right| dx = +\infty, \quad \text{also} \quad \int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} B(x; s_\nu) \right| dx = +\infty,$$

wegen (13), d.h. $|B| - \sum a_n$ existiert nicht. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Literatur

[1] Bieberbach, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II. Leipzig 1931. — [2] Boas jr., R. P.: Entire Functions. New York 1954. — [3] Duffin, R. J., and A. C. Schaeffer: Power series with bounded coefficients. Amer. J. Math. **67**, 141 bis 154 (1945). — [4] Gaier, D.: Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren. Math. Z. **58**, 453—455 (1953). — [5] Gaier, D.: On the change of index for summable series. Erscheint demnächst in Pacific J. Math. — [6] Harvey, A. R.: The mean of a function of exponential type. Amer. J. Math. **70**, 181—202 (1948). — [7] Knopp, K.: Bemerkung zum Borelschen Limitierungsverfahren. Rend. Circ. Mat. Palermo **54**, 331—334 (1930). — [8] Knopp, K.: Einige Bemerkungen zur A-, E_k- und B_k-Summierung. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **1**, 1—10 (1952). — [9] Macintyre, A. J.: Laplace's transformation and integral functions. Proc. London Math. Soc. (2) **45**, 1—20 (1938/39). — [10] Sannia, G.: Nuovo metodo di sommazione delle serie: Estensione del metodo di Borel. Rend. Circ. Mat. Palermo **42**, 303—322 (1917).

Stuttgart, Technische Hochschule, Mathematisches Institut A

(Eingegangen am 19. Juni 1955)

GROOT, J. DE
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 192—194 (1956)

A System of Continuous, Mutually Non-differentiable Functions

By

J. DE GROOT

The following problem was raised by MYCIELSKI: *does there exist a system —of potency of the continuum—of continuous, real valued functions such that any two different functions of the system—say $F(x)$ and $G(x)$—have no (finite or infinite) derivative with respect to each other?* I.e., for each x

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{G(x+h) - G(x)}$$

does not exist. One might expect that *the answer is positive*[1]). Indeed, we shall prove that among the system of functions

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n f_n(x), \tag{1}$$

where the r_n are positive real numbers and $f_n(x)$ denotes the distance between x and the nearest number of the form $m/10^n$, where m is an integer, such systems occur.

More precisely, the following system $\{F_\alpha(x)\}$ $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$ satisfies the properties required:

$$F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\alpha,n}\, t_n f_{k_n}(x), \tag{2}$$

where

$$\delta_{\alpha,2n} = \varepsilon_{\alpha n}, \quad \delta_{\alpha,2n-1} = 1 - \varepsilon_{\alpha n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

$$1, \varepsilon_{\alpha 1}\, \varepsilon_{\alpha 2} \cdots \varepsilon_{\alpha n} \cdots = \sum_{x=0}^{\infty} 2^{2^{[x\alpha]} - 2^x} \tag{4}$$

(the left hand side denotes the dyadic expansion of the corresponding real number in the right hand side for every α under consideration), and where t_n is a sequence of positive numbers with

$$t_n \geq 3 \sum_{i=1}^{n-1} t_i \tag{5}$$

and k_n is a sequence of positive integers tending to infinity such that

$$t_n < 2^{k_n}. \tag{6}$$

[1]) J. MYCIELSKI gave a proof using the continuum hypothesis (in litt.).

The functions (1) are clearly related to well-known non-differentiable functions, defined in VAN DER WAERDEN [1] and KNOPP [2].

First we prove a lemma which itself is perhaps of some interest, since we give an effective proof of it and the system of sequences is given explicitly[2]).

LEMMA. *There exists a system of continuously many sequences*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, \qquad \text{each} \qquad a_i = 0 \quad \text{or} \quad 1,$$

such that any two distinct sequences of the system have different elements on infinitely many corresponding places ($a_{\varkappa_i} \neq a'_{\varkappa_i}$ for an infinite number of indices $\varkappa_i$).

Proof. The *"von Neumann-numbers"* [4] in (4) form a system of continuously many algebraically independent numbers. The dyadic expansions of two such distinct numbers y_1 and y_2 differ in infinitely many places; otherwise $y_1 - y_2$ should be rational, in contradiction with the algebraical independency. So, the system of sequences denoted in (4) satisfies the property mentioned.

From this follows in particular that any two different sequences $\{\delta_{\alpha,n}\}$, $\{\delta_{\alpha',n}\}$, defined by (3), have the stronger property

$$(7) \qquad \begin{cases} \delta_{\alpha,n_i} = 0, \quad \delta_{\alpha',n_i} = 1 & (i = 1, 2, \ldots), \\ \delta_{\alpha,m_i} = 1, \quad \delta_{\alpha',m_i} = 0 & (i = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

for suitable sequences of positive integers n_i and m_i.

Using this result and exploiting the elegant proof in [1], due to A. HEYTING), we reach our goal as follows.

Each $F_\alpha(x)$ is continuous since the series (2) is uniformly convergent in view of (6).

Let x be a real number, expressed as a decimal. If the q-th figure is 4 or 9, let $x_q = x - 10^{-q}$; otherwise let $x_q = x + 10^{-q}$. Then it follows from the definition of $f_n(x)$, that

$$\begin{aligned} f_n(x_q) - f_n(x) &= \pm 10^{-q} && (n < q) \\ &= 0 && (n \geq q). \end{aligned}$$

Hence, assuming $\alpha \neq \alpha'$,

$$Q = \frac{F_\alpha(x_q) - F_\alpha(x)}{F_{\alpha'}(x_q) - F_{\alpha'}(x)} = \frac{\sum_{n=1}^{q-1} \pm \delta_{\alpha,n} t_n}{\sum_{n=1}^{q-1} \pm \delta_{\alpha',n} t_n}.$$

[2]) The lemma itself is contained in the following general set-theoretical theorem of C. KURATOWSKI [3], p. 330: given an infinite set S of potency m, there exists a family—of potency 2^m—of subsets $X, Y, \ldots$ of S, such that the potency of $X \setminus Y$ equals m for every pair of different sets X. Y.

If $q-1$ takes one of the values n_i we find for the quotient Q in view of (7) and (5)

$$|Q| \leq \left| \frac{\sum_{i=1}^{n_i-1} l_i}{2 \sum_{i=1}^{n_i-1} l_i} \right| = \frac{1}{2}.$$

If, on the other hand $q-1$ takes a value m_i, we find

$$|Q| \geq \left| \frac{2 \sum_{i=1}^{m_i-1} l_i}{\sum_{i=1}^{m_i-1} l_i} \right| = 2.$$

Hence, if $i \to \infty$, thus $x_{n_i}, x_{m_i} \to x$ the difference-quotient Q has no limit, finite or infinite and the proof is completed.

Remark. From our result follows easily, that each of the functions (2) is non-differentiable itself.

References

[1] WAERDEN, B. L. VAN DER: Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion. Math. Z. **32**, 474—475 (1930). — [2] KNOPP K.: Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbaren Funktionen. Math. Z. **2**, 1—26 (1918). — [3] KURATOWSKI, C.: Topologie, vol. I. Warszawa 1952. — [4] NEUMANN, J. v.: Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. Math. Ann. **99**, 134—141 (1928).

Math. Inst. der Universität, Amsterdam C (Holland)

(Eingegangen am 23. September 1955)

WITT, E.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 195—216 (1956)

Die Unterringe der freien Lieschen Ringe

Von
ERNST WITT

In Analogie zu dem von O. SCHREIER stammenden Satz, daß *jede Untergruppe einer freien Gruppe wieder frei ist*, soll hier der bereits von mir angekündigte Satz[1]) bewiesen werden, daß *jeder Unterring eines freien* LIE*schen Ringes wieder frei ist*, wobei ein Körper als Koeffizientenbereich vorausgesetzt wird. Diesen Satz habe ich 1938 im Anschluß an meine Untersuchungen über die assoziative Hülle LIEscher Ringe vermutet, aber erst 1940 beweisen können. Der Grundgedanke dieses Beweises ergibt sich durch Analogieübertragung bei geeigneter Auffassung des SCHREIERschen Beweises: Das von SCHREIER eingeführte Repräsentantensystem liefert bei Multiplikation mit Gruppenelementen eine monomiale Darstellung der Gruppe mit der besonderen Eigenschaft, daß die von 1 verschiedenen Koeffizienten der Darstellungsmatrizen der Erzeugenden der ganzen Gruppe ein freies Erzeugendensystem der Untergruppe bilden.

Für die von MAGNUS[2]) stammenden wichtigen gruppentheoretischen Anwendungen müssen ganze Zahlen als Koeffizienten genommen werden. In diesem Fall gilt nun der obige Satz nicht mehr uneingeschränkt, wie schon ganz einfache Beispiele zeigen, jedoch läßt er sich für viele gruppentheoretisch wichtige Unterringe beweisen.

Es sei gestattet, hier die Theorie von MAGNUS in kurzen Zügen darzulegen. $\mathfrak{G}$ sei eine beliebige (auch nichtkommutative) additiv geschriebene Gruppe. Mit den Bezeichnungen

$$(1) \qquad a\,b = a + b - a - b$$

$$(2) \qquad a^b = b + a - b$$

lassen sich die von PH. HALL stammenden Regeln

$$(3) \qquad a\,b + b\,a = 0, \qquad a\,a = 0$$

$$(4) \qquad a\,(b + b') = a\,b + a\,b' + (b'\,a)\,b$$

$$(5) \qquad (a\,b)\,c^b + (b\,c)\,a^c + (c\,a)\,b^a = 0$$

approximativ als Regeln eines LIEschen Ringes deuten[3]).

[1]) WITT, E.: Über freie Ringe und ihre Unterringe. Math. Z. **58**, 113—114 (1953). — Nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit erfuhr ich durch Herrn LAZARD, daß ŠIRŠOV diesen Satz inzwischen unabhängig bewiesen hat. ŠIRŠOV, A. I.: Unteralgebren freier LIEscher Algebren. [Russisch.] Mat. Sbornik (2) **33**, 441—452 (1953). Diese Arbeit war mir bisher nicht zugänglich.

[2]) MAGNUS, W.: Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren. J. reine u. angew. Math. **177**, 105—115 (1937). Ein ausgedehntes Literaturverzeichnis findet sich bei M. LAZARD: Sur les groupes nilpotents et les anneaux de LIE. Ann. sci. Ecole norm. sup. (III. Sér.) **71**, 101—190 (1954).

[3]) Durch Ausdrücken von $a\,(b + c) + b\,(c + a) + c\,(a + b) = 0$ nach (4) bekommt man eine neungliedrige Identität, welche genau dieselben Dienste wie (5) leistet. Es gilt übrigens allgemein bei zyklischer Vertauschung $a_1(a_2 + \cdots + a_n) + \cdots = 0$.

$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ bezeichne nun die von allen Elementen a, b bzw. allen Kommutatoren $a\,b$ erzeugte Untergruppe ($a\in\mathfrak{A}$, $b\in\mathfrak{B}$). Mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind auch $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Nach (5) gilt für Normalteiler

(8) $$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}\subseteq(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})\,\mathfrak{A}+(\mathfrak{C}\,\mathfrak{A})\,\mathfrak{B} \qquad \text{(PH. HALL)}.$$

Für die charakteristischen Normalteiler $\mathfrak{G}^n$ der absteigenden Zentralreihe, die induktiv durch $\mathfrak{G}^n=\mathfrak{G}^{n-1}\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^1=\mathfrak{G}$ erklärt sind, gilt dann

(9) $$\mathfrak{G}^i\,\mathfrak{G}^k\subseteq\mathfrak{G}^{i+k} \qquad \text{(PH. HALL)},$$

wie sich nach (8) bei beliebigem k durch Induktion nach i ergibt:

$$\mathfrak{G}^i\,\mathfrak{G}^k=(\mathfrak{G}^{i-1}\,\mathfrak{G})\,\mathfrak{G}^k\subseteq(\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}^k)\,\mathfrak{G}^{i-1}+(\mathfrak{G}^k\,\mathfrak{G}^{i-1})\,\mathfrak{G}$$
$$\subseteq\mathfrak{G}^{k+1}\,\mathfrak{G}^{i-1}+\mathfrak{G}^{k+i-1}\,\mathfrak{G}\subseteq\mathfrak{G}^{i+k}.$$

Für $a\in\mathfrak{G}^\alpha$, $b, b'\in\mathfrak{G}^\beta$, $c\in\mathfrak{G}^\gamma$ gelten dann nach (9)

(1′) $$a+b\subseteq b+a+\mathfrak{G}^{\alpha+\beta}$$

(3) $$a\,b+b\,a=0, \qquad a\,a=0,$$

(4′) $$a(b+b')\subseteq a\,b+a\,b'+\mathfrak{G}^{\alpha+\beta+1},$$

(4″) $$a(b+\mathfrak{G}^{\beta+1})\subseteq a\,b+\mathfrak{G}^{\alpha+\beta+1},$$

(5′) $$a(b\,c)+b(c\,a)+c(a\,b)\subseteq\mathfrak{G}^{\alpha+\beta+\gamma+1},$$

wobei die Glieder $\mathfrak{G}^n$ die Abweichungen von den genauen Regeln eines LIE-schen Ringes angeben.

Für eine Menge X von Unbestimmten sei nun

$\mathfrak{L}$ der von X erzeugte freie LIEsche Ring,

$\mathfrak{G}$ die von X erzeugte freie Gruppe,

$\mathfrak{A}$ der von X erzeugte freie assoziative Ring mit Einselement.

$\mathfrak{L}_{(n)}$, $\mathfrak{A}_{(n)}$ mögen die entsprechenden homogenen Moduln n-ten Grades bezeichnen. Nach den erwähnten approximativen Regeln haben Elemente von $\mathfrak{L}_{(n)}$ in gleicher Schreibweise auch in $\mathfrak{G}^n/\mathfrak{G}^{n+1}$ einen Sinn, und dabei entsteht eine homomorphe Abbildung φ_n von $\mathfrak{L}_{(n)}$ auf $\mathfrak{G}^n/\mathfrak{G}^{n+1}$. *Es gilt nun die wichtige Tatsache, daß φ_n ein Isomorphismus ist, wodurch jeder Satz über freie* LIE*sche Ringe unmittelbar eine Bedeutung für freie Gruppen hat.* Zum Nachweis dessen wird eine Abbildung ψ_n von $\mathfrak{G}^n/\mathfrak{G}^{n+1}$ in $\mathfrak{A}_{(n)}$ angegeben, für welche die zusammengesetzte Abbildung $\psi_n\varphi_n$ gerade Bestandteil der kanonischen Abbildung von $\mathfrak{L}_{(n)}$ in $\mathfrak{A}_{(n)}$ bedeutet, die Produkte von $\mathfrak{L}$ in Kommutatoren von $\mathfrak{A}$ überführt und die nach BIRKHOFF-MAGNUS-WITT[4]) eine

[4]) BIRKHOFF, G.: Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices. Ann. of Math. (2) **38**, 526—532 (1937). — MAGNUS, W.[2]), u. E. WITT: Treue Darstellung LIEscher Ringe. J. reine u. angew. Math. **177**, 152—160 (1937).

isomorphe Abbildung ist. Hierzu werden unendliche Reihen

$$a = 1 + a_1 + a_2 + \cdots \qquad (a_n \in \mathfrak{A}_{(n)})$$

betrachtet, die bei formaler Multiplikation eine von MAGNUS eingeführte Gruppe $\mathfrak{M}$ bilden. Für die Reihen

$$a = 1 + a_i + \cdots, \quad a' = 1 + a_i' + \cdots, \quad b = 1 + b_k + \cdots$$

ergibt sich

$$a\,a' = 1 + (a_i + a_i') + \cdots \quad \text{und} \quad a\,b\,a^{-1}\,b^{-1} = 1 + (a_i\,b_k - b_k\,a_i) + \cdots,$$

wobei jeweils Glieder höheren Grades fortgelassen sind. Vermöge

$$\psi(x) = 1 + x \qquad (x \in X)$$

wird nun eine homomorphe Abbildung ψ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{M}$ erzeugt, für welche sich mit $g \in \mathfrak{G}^n$

$$\psi(g) = 1 + \psi_n(g) + \cdots \qquad (\psi_n(g) \in \mathfrak{A}_{(n)})$$

die gewünschte Abbildung ψ_n von $\mathfrak{G}^n/\mathfrak{G}^{n+1}$ in $\mathfrak{A}_{(n)}$ ergibt.

Diese Theorie von MAGNUS bleibt auch dann noch gültig, wenn der darin eingehende Begriff des graduierten Ringes in folgender Weise verallgemeinert wird:

Zugrunde gelegt sei (wie in § 2, 2) eine feste Abbildung $x \to |x| > 1$ $(x \in X)$ in den **wohlgeordneten**[5]) kommutativen Kegel $\mathfrak{S}$ einer geordneten Gruppe. $\mathfrak{L}_{(s)}$ bzw. $\mathfrak{A}_{(s)}$ seien die homogenen Bestandteile vom „Grade" s, dabei sei $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{A}$ direkte Summe der $\mathfrak{L}_{(s)}$ bzw. $\mathfrak{A}_{(s)}$.

Die im Sinne von § 1 formalen Reihen $\sum a_s\,s$ mit $a_1 = 1$, $a_s \in \mathfrak{A}_{(s)}$ bilden dann wieder eine multiplikative Gruppe $\mathfrak{M}$. Indem man wieder die Elemente von $\mathfrak{L}$ unter Beibehaltung der Schreibweise als Elemente von $\mathfrak{G}$ auffaßt, seien $\mathfrak{G}_s$ und $\mathfrak{H}_s$ die von $\bigcup_{t \geq s} \mathfrak{L}_{(t)}$ bzw. $\bigcup_{t > s} \mathfrak{L}_{(t)}$ in $\mathfrak{G}$ erzeugten Untergruppen. Die Zuordnung

$$\mathfrak{L}_{(n)} \to \mathfrak{G}^n/\mathfrak{G}^{n+1} \to \mathfrak{A}_{(n)} \quad \text{mit} \quad \psi(x) = 1 + x$$

der ursprünglichen Theorie braucht man jetzt nur noch zu ersetzen durch

$$\mathfrak{L}_{(s)} \to \mathfrak{G}_s/\mathfrak{H}_s \to \mathfrak{A}_{(s)} \quad \text{mit} \quad \psi(x) = 1 + x \cdot |x|.$$

Dieser allgemeinere Begriff des graduierten Ringes bietet auch sonst wesentliche Vorteile. Zum Beispiel überträgt sich die in § 3 hiermit formulierte Voraussetzung IV über freie LIEsche Ringe $\mathfrak{L}$ auf alle homogenen Unterringe $\mathfrak{U}$ mit torsionslosem Faktormodul $\mathfrak{L}/\mathfrak{U}$ (Satz 5), während bei dem üblichen Grundbegriff diese Voraussetzung einfach bedeutet, daß $\mathfrak{L}$ nur endlich viele Erzeugende hat, eine Eigenschaft, die sich gewiß nicht immer auf $\mathfrak{U}$ überträgt.

Das in § 1 eingeführte Hilfsmittel der formalen Konvergenz erlaubt die Aufstellung einer einfachen Beziehung zwischen den Rangzahlen von $\mathfrak{L}_{(s)}$ und $\mathfrak{A}_{(s)}$ (Satz 6), die ihrerseits wieder Grundlage für weitere Schlüsse darstellt und zu einem Kriterium für freie Unterringe führt.

[5]) Unter **Wohlordnung** wird hier stets eine Ordnung mit Minimalbedingung verstanden.

Die Theorien von MAGNUS und BIRKHOFF-WITT gelten sinngemäß auch bei sog. p-LIEschem Ring $\mathfrak{L}$ (auch eingeschränkter LIEscher Ring genannt) für Primzahlcharakteristik p, bei dem außer den LIEschen Verknüpfungen noch eine Operation $x \to x^p$ erklärt ist mit den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} x^p \circ y &= x \circ (x \circ (\ldots (x \circ y))) \\ (x+y)^p &= x^p + y^p + \Lambda(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (p \text{ Faktoren } x)$$

mit einem in naheliegender Weise bestimmten LIEschen Polynom $\Lambda(x, y)$. Wie im gewöhnlichen Fall hat auch $\mathfrak{L}$ wieder eine assoziative Hülle $\mathfrak{L}$, in der dann $x^p = x x \ldots x$ (p Faktoren) gilt. Mit Hilfe der oben erwähnten Isomorphismen ψ_n lassen sich nach MAGNUS mühelos zwei weitere Regeln von HALL herleiten:

$$\left.\begin{aligned} &(6p) \qquad (pa)\, b \in a(a(\ldots b)) + p\,\mathfrak{G}^2 \\ &(7p) \qquad p(a+a') \in pa + pa' + \mathfrak{G}^p + p\,\mathfrak{G}^2 \end{aligned}\right\} \quad (p \text{ Faktoren } a),$$

worin $\mathfrak{G}^2, \mathfrak{G}^p$ der oben erklärten absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{G}$ angehören und allgemein $p\mathfrak{C}$ die von allen pc erzeugte Untergruppe bedeute ($c \in \mathfrak{C}$). Zusammen mit (3), (4), (5) dienen diese Regeln zur Herleitung des Analogons der Theorie von MAGNUS für den p-Fall. Dabei ist natürlich die bisherige absteigende Zentralreihe durch die „absteigende p-Zentralreihe" zu ersetzen, nämlich durch die schwächste Folge $\mathfrak{G}_i$ mit

$$\mathfrak{G}_i\,\mathfrak{G}_k \leqq \mathfrak{G}_{i+k}, \qquad p\,\mathfrak{G}_i \leqq \mathfrak{G}_{pi}, \qquad \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}.$$

Auch die im folgenden dargestellte Theorie der Erzeugung von Unterringen eines LIEschen Ringes läßt sich sinngemäß auf p-LIEsche Ringe übertragen. Änderungen, die sich bei Betrachtung *dieses p-Falles* ergeben, werden an den betreffenden Stellen ohne nähere Begründung angemerkt; die Formelnummern sind dann mit Index p versehen.

In § 4 werden gewisse minimale Basen eines freien LIEschen Ringes konstruiert. Eine Basis dieser Art habe ich 1942 angegeben[6]), eine andere fand M. HALL 1950[7]).

Am Schluß der Arbeit zeigen einige Beispiele, daß bei geeignetem Koeffizientenbereich nicht jeder Unterring eines freien LIEschen Ringes frei erzeugbar ist.

§ 1. Formale Konvergenz

In einer geordneten Gruppe (in der also aus $x \leqq y$, $x' \leqq y'$ auch $x x' \leqq y y'$ folgt) sei $\mathfrak{S}$ der **Kegel** aller Elemente $s \geqq 1$. Mit einem assoziativen

[6]) Vortrag an der Universität Berlin. Hauptgegenstand war der hier dargestellte Beweis des Hauptsatzes. In einem 1944 an der Universität Göttingen gehaltenen Vortrag bewies ich den für gruppentheoretische Anwendungen wichtigen Satz 5. Die in der vorliegenden Arbeit dargestellte Theorie bis einschließlich Satz 9 war der Inhalt einer Vortragsreihe, die ich im Herbst 1953 auf Einladung der Universität Barcelona hielt.

[7]) MARSHALL HALL jr.: A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups. Proc. Amer. Math. Soc. 1, 575—581 (1950).

Koeffizientenring P mit Einselement sei dann $\mathfrak{R}$ der Ring derjenigen formalen Summen

$$a = \sum \alpha_s s \qquad (s \in \mathfrak{S},\ \alpha_s \in \mathsf{P}),$$

bei dem zu jedem t für fast alle $s \leq t$ $\alpha_s = 0$ ist (d.h. bis auf endlich viele Ausnahmen). Die Multiplikation in $\mathfrak{R}$ sei erklärt durch

$$a\,b = \sum \alpha_s s \cdot \sum \beta_{s'} s' = \sum_{ss'=t} (\sum \alpha_s \beta_{s'})\, t.$$

$\mathfrak{R}_t$ bezeichne das Ideal aller $a \in \mathfrak{R}$ mit $\alpha_s = 0$ für alle $s \leq t$.

In $\mathfrak{R}$ werde nun eine Topologie eingeführt, indem der von den Idealen $\mathfrak{R}_t$ erzeugte Filter als Umgebungsfilter der 0 gewählt wird. Diese Topologie werde die *Topologie der formalen Konvergenz* genannt. Der so erklärte topologische Ring $\mathfrak{R}$ ist *Hausdorffsch* wegen $\bigcap_t \mathfrak{R}_t = 0$. Ferner ist er *vollständig*, denn in einem CAUCHY-Filter gehören die Approximationsmengen der Feinheit $\mathfrak{R}_t$ sämtlich derselben Restklasse $\sum_{s \leq t} \alpha_s s \bmod \mathfrak{R}_t$ an. Sie geben also Anlaß zur Konstruktion eines Limeselementes $\sum \alpha_s s$ aus $\mathfrak{R}$, weil die Koeffizienten α_s eines Elementes a aus $\mathfrak{R}$ für $s \leq t$ bereits durch $a \bmod \mathfrak{R}_t$ bestimmt sind. — $\mathfrak{R}_t$ läßt sich übrigens charakterisieren als abgeschlossenes Ideal in $\mathfrak{R}$, das möglichst viele Elemente aus $\mathfrak{S}$, aber nicht t enthält.

In diesem Ring $\mathfrak{R}$ gelten folgende einfache Regeln über Summierbarkeit und Multiplizierbarkeit:

1. $A = \sum \pm a_i$ ist genau dann summierbar (i aus einer Menge I),

$B = \prod (1 + a_i)$ ist genau dann multiplizierbar (i aus einer Kette I, d.h. I total geordnet),

$C = \sum^{(<)} a_{i_1} \dots a_{i_n}$ ist genau dann summierbar (n variabel ≥ 0; $i_1 < \dots < i_n$ aus einer Kette I),

wenn für jedes t nur endlich viele $a_i \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{R}_t$ sind, und in diesem Falle ist $B = C$.

2. Sind $\sum a_i$ und $\sum b_k$ (i aus Menge I, k aus Menge K) summierbar, so gilt

$$(\sum a_i)\,(\sum b_k) = \sum a_i\, b_k$$

mit summierbarer rechter Seite. Entsprechendes gilt auch für endlich viele Faktoren.

3. $\mathfrak{R}$ besteht genau aus den Werten der summierbaren Summen $\sum \alpha_s s$, unter denen also die endlichen Summen einen dichten Teilring von $\mathfrak{R}$ bilden.

Im folgenden sei $\mathfrak{S}$ **wohlgeordnet**[5]), d.h. jede nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{S}$ enthalte mindestens ein minimales Element (*Minimalbedingung*). $\mathfrak{R}_1$ bezeichnet das Ideal der Summen $\sum \alpha_s s$ mit $s > 1$. Ferner sei $\mathfrak{a}_n$ die Menge aller Produkte aus n Faktoren, die einer Menge $\mathfrak{a}$ entnommen sind.

Hilfssatz. *Für jede endliche Teilmenge* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_1$ *gilt* $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{a}_n = 0$.

Hiernach sind Potenzreihen $\sum a_i z^i$ mit $z \in \mathfrak{R}_1$ stets summierbar.

Beweis. Für vorgelegtes t kommen in den formalen Reihenentwicklungen $\sum \alpha_s s$ der endlich vielen $a \in \mathfrak{a}$ insgesamt nur endlich viele s mit $1 < s \leq t$ wirklich vor. Für jedes dieser s sei $t s^{-m_s}$ das kleinste in $\mathfrak{S}$ liegende Element der Kette $t > t s^{-1} > t s^{-2} > \cdots$. Dann ist $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{R}_t$ für alle $n > \sum m_s$; denn angenommen, beim Ausrechnen von $a_1 \ldots a_n \in \mathfrak{a}_n$ käme wirklich ein Monom $s_1 \ldots s_n \leq t$ vor, so erhielte man, da einer seiner Faktoren s mehr als m_s mal auftritt, $s^{m_s+1} \leq s_1 \ldots s_n \leq t$, im Widerspruch zur Definition von m_s.

Satz 1. *Aus der Summierbarkeit von* $A = \sum a_i$ $(i \in I)$ *mit* $a_i \in \mathfrak{R}_1$ *folgt im Sinne der Summierbarkeit bzw. Multiplizierbarkeit*

$$(1-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum a_{i_1} \ldots a_{i_n} \qquad (n \text{ variabel} \geq 0;\ i_\nu \text{ aus Menge } I)$$

$$\left(\prod (1-a_i)\right)^{-1} = \prod (1-a_i)^{-1} = \sum\nolimits^{(\leq)} a_{i_1} \ldots a_{i_n}$$

$$(n \text{ variabel};\ i_1 \leq \cdots \leq i_n \text{ aus Kette } I)$$

und umgekehrt.

Beweis. $\mathfrak{a}$ sei die endliche Menge der $a_i \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{R}_t$. Nach dem Hilfssatz ist für genügend großes n $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{R}_t$. Das besagt die Summierbarkeit der Summe rechts oben, woraus man die der anderen Summen durch Zusammenfassen oder Weglassen erhält. Die Gleichungen des Satzes brauchen nur mod $\mathfrak{R}_t$ bewiesen zu werden und sind dann selbstverständlich. —

Unter formalen Summen und Produkten seien immer die hier behandelten summierbaren Summen und multiplizierbaren Produkte verstanden.

Wenn der Koeffizientenring P alle rationalen Zahlen enthält, so hat man die üblichen Beziehungen zwischen den Potenzreihen e^z, $\log(1+z)$, $(1+z)^a$ für $z \in \mathfrak{R}_1$, $a \in \mathfrak{R}$ unter der Voraussetzung $az = za$.

Beim Studium der *freien* LIE*schen Ringe* kommt man bei *vertauschbarem* $\mathfrak{S}$ und rationalem Körper P auf formale Identitäten der Gestalt

$$(1) \qquad 1 - \sum_s \varepsilon_s s = \prod_s (1-s)^{\beta_s} \qquad (s > 1 \text{ aus } \mathfrak{S};\ \varepsilon_s, \beta_s \in \mathsf{P}),$$

durch welche die ε_s *von den* β_s *und umgekehrt „rekursiv" abhängen.* Dabei sind mit den β_s auch die ε_s ganze Zahlen und umgekehrt. In den Anwendungen sind die ε_s und β_s natürliche Zahlen (Ränge).

Der negative Logarithmus von (1) ist

$$(2) \qquad \sum_h h^{-1} \left(\sum_s \varepsilon_s s\right)^h = \sum_{s,d} \beta_s d^{-1} s^d \qquad (h, d = 1, 2, \ldots).$$

Vergleich der Koeffizienten γ_t von t liefert

$$(3) \qquad \gamma_t = \sum_{\substack{h, t_\nu \\ \prod t_\nu = t}} h^{-1} \varepsilon_{t_1} \ldots \varepsilon_{t_h} = \sum_{\substack{d, s \\ s^d = t}} d^{-1} \beta_s.$$

In $\mathfrak{S}$ heiße eine zyklische Halbgruppe $\{t_0^n\}$ $(n \geq 0)$ **rein abgeschlossen,** wenn aus $s^d \in \{t_0^n\}$, $d \geq 1$, immer $s \in \{t_0^n\}$ folgt. Nach (3) gilt in diesem Fall

$$(4) \qquad n\gamma(t_0^n) = \sum_{d \mid n} \frac{n}{d} \beta(t_0^{n/d}) \qquad (\gamma(s) = \gamma_s \text{ usw.}).$$

Durch MOEBIUSsche Umkehrung ergibt das

$$\beta(t_0^n) = \sum_{d\,n} \frac{\mu(d)}{d}\,\gamma(t_0^{n/d}), \tag{5}$$

und das ist nach (3) explizit durch die ε_s ausdrückbar.

Hat $\mathfrak{S}$ *unabhängige vertauschbare Erzeugende* s_i, so liegt jedes Element t in einer rein abgeschlossenen zyklischen Halbgruppe. Man findet so für $t = t_0^n$

$$\beta_t = \sum \frac{\mu(d)}{h\,d}\,\varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_h}, \tag{6}$$

summiert über alle Lösungen von $\prod t_\nu^d = t$. Sind nur für die Erzeugenden s_i die $\varepsilon_{s_i} \neq 0$, so ist

$$\beta(s_1^{n_1} \dots s_r^{n_r}) = \frac{1}{n} \sum_{d\,n_i} \frac{\mu(d)\,\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{n_1}{d}\right)! \dots \left(\frac{n_r}{d}\right)!}\,\varepsilon_{s_1}^{n_1/d} \dots \varepsilon_{s_r}^{n_r/d} \qquad (n = \sum n_i) \tag{7}$$

und insbesondere

$$\beta(s_1^n) = \frac{1}{n} \sum_{d\,n} \mu(d)\,\varepsilon_{s_1}^{n/d}. \tag{8}$$

Für p-LIE-*Ringe* lauten die entsprechenden Formeln:

$$1 - \sum_s \varepsilon_s s = \prod_s \left(\frac{1-s}{1-s^p}\right)^{\beta_s} \qquad (s > 1 \text{ aus } \mathfrak{S};\ \varepsilon_s, \beta_s \in \mathsf{P}), \tag{1p}$$

$$\sum_h h^{-1} \left(\sum_s \varepsilon_s s\right)^h = \sum_{s,d} \beta_s\, d^{-1} (s^d - s^{pd}) \qquad (h, d = 1, 2, \dots), \tag{2p}$$

$$\gamma_t = \sum_{\substack{h,\, t_\nu \\ \Pi t_\nu = t}} h^{-1}\,\varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_h} = \sum_{\substack{d,\, s \\ s^d = t}} d^{-1}\,\beta_s - \sum_{\substack{d,\, s \\ s^{pd} = t}} d^{-1}\,\beta_s, \tag{3p}$$

$$n\,\gamma(t_0^n) = \sum_{d\,n} \frac{n}{d}\,\beta(t_0^{n/d}) - \sum_{p\,d\,n} \frac{n}{d}\,\beta(t_0^{n/pd}). \tag{4p}$$

Die übrigen Formeln $(5p), \dots, (8p)$ *erhält man durch die Ersetzung*

$$\mu(d) \to \mu_p(d) = \mu(d_0)\,\varphi(p^h) \qquad (d = d_0\,p^h,\ p \nmid d_0).$$

φ ist hierbei die EULERsche Funktion. — Der Schluß $(4p) \Rightarrow (5p)$ läßt sich durch eine etwas umständliche Induktion führen.

§ 2. Relationen für Erzeugende eines Lieschen Ringes und eines Unterringes

1. $\mathfrak{L}$ sei ein LIEscher Ring, in dem die Multiplikation mit $a \circ b$ bezeichnet werde, und $\mathfrak{U}$ ein Unterring von $\mathfrak{L}$, beide mit einem kommutativen Koeffizientenring Γ mit Einselement. Dabei sei $\mathfrak{L}$ durch eine Menge X von Erzeugenden x mit gewissen Relationen gegeben. *Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen I und II, die jedenfalls erfüllbar sind, wenn* Γ *ein Körper ist, soll für eine geeignete Erzeugung* Y *von* $\mathfrak{U}$ *ein System definierender Relationen angegeben werden.*

2. Bei fester Abbildung $x \to |x| > 1$ in den *wohlgeordneten*[5]) *kommutativen Kegel* $\mathfrak{S}$ einer geordneten Gruppe bezeichne $\mathfrak{L}_s$ bzw. $\mathfrak{L}_{(s)}$ den von allen LIEschen Produkten

$$x_1 \circ \cdots \circ x_n \text{ (beliebige Klammerung, Faktorenzahl } \geq 1,\ x_\nu \in X)$$

mit $|x_1| \ldots |x_n| \leq s$ bzw. mit $|x_1| \ldots |x_n| = s$ aufgespannten Γ-Modul. Es ist

$$\mathfrak{L}_s \circ \mathfrak{L}_t \subseteq \mathfrak{L}_{st}, \qquad \mathfrak{L}_{(s)} \circ \mathfrak{L}_{(t)} \subseteq \mathfrak{L}_{(st)}.$$

Für den homogenen Fall, daß $\mathfrak{L}$ direkte Summe aller $\mathfrak{L}_{(s)}$ ist, definieren wir für später: Die Elemente und Untermoduln von $\mathfrak{L}_{(s)}$ heißen homogen vom Betrag s. Ein Unterring von $\mathfrak{L}$ heißt *homogen*, wenn er *direkte* Summe homogener Moduln beliebiger Beträge ist (ein homogener Unterring braucht also kein homogener Modul zu sein). So ist z.B. $\mathfrak{L}$ selbst ein homogener Ring, wenn seine Erzeugung X frei ist. Analog wird eine Basis *homogen* genannt, wenn sie aus lauter homogenen Elementen beliebiger Beträge besteht. Für das weitere wird zunächst keine Homogenität vorausgesetzt.

Voraussetzung I. $\mathfrak{L}$ *habe eine Basis* B, *die Basen für* $\mathfrak{U}$ *und jedes* $\mathfrak{L}_s$ *enthält.* (Als Basis wird stets eine freie Γ-Modulbasis verstanden.)

Durchschnittsbildung liefert dann eine Basis für $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{L}_s$. Wir denken uns B irgendwie **total geordnet.** Für die spätere Definition von $d_{ik}(a)$ sei dabei jedes Element aus $B \cap \mathfrak{U}$ größer als die Elemente im Komplement von $B \cap \mathfrak{U}$.

3. $\tilde{\mathfrak{L}}$ sei die nach der Theorie von BIRKHOFF-WITT existierende *universelle assoziative Hülle* von $\mathfrak{L}$ mit adjungiertem Einselement, in der also die Kommutatorrelationen

$$a\,a' = a'\,a + a \circ a' \qquad (a, a', a \circ a' \in \mathfrak{L})$$

erfüllt sind. Das „Korrekturglied" $a \circ a'$ denke man sich für das folgende linear durch die Basis B von $\mathfrak{L}$ ausgedrückt. Nach der erwähnten Theorie bilden die geordneten Monome $b_1 \ldots b_n$ mit $b_1 \leq \cdots \leq b_n$ ($b_i \in B$, $n \geq 0$) eine Basis von $\tilde{\mathfrak{L}}$. Im p-Fall sind nur die Monome $b_1 \ldots b_n$ mit $b_1 \leq \cdots \leq b_n$ zu betrachten, bei denen nirgends p gleiche Faktoren auftreten. In beiden Fällen werden **diese Bedingungen für die Basismonome** $b_1 \ldots b_n$ im folgenden einheitlich mit

$$\mathfrak{o}(b_1, \ldots, b_n)$$

bezeichnet. Die übrigen $\prod b_i$ lassen sich dadurch linear auf diese Basis reduzieren, indem die obigen Kommutatorrelationen sukzessive auf verkehrt nebeneinanderstehende b_i angewandt werden, wobei im p-Fall noch die Ersetzung von b_i^p durch die entsprechende Linearkombination aus B als weitere Reduktion hinzukommt. Dies Verfahren werde kurz als **Ordnungsprozeß** bezeichnet. Aussagen, die im folgenden mit dem Ordnungsprozeß verbunden sind, lassen sich stets einfach durch Induktion nach der Anzahl der Schritte beweisen, jedoch lassen wir Einzelausführungen zugunsten größerer Übersichtlichkeit beiseite und begnügen uns hier mit diesem allgemeinen Hinweis.

In $\tilde{\mathfrak{L}}$ bezeichne X_s bzw. $X_{(s)}$ den von allen assoziativen Produkten

$$x_1 \dots x_n \qquad (n \geqq 0,\ x_\nu \in X)$$

mit $|x_1| \dots |x_n| \leqq s$ bzw. $|x_1| \dots |x_n| = s$ aufgespannten Γ-Modul. Es ist dann wieder

$$X_s X_t \subseteqq X_{st}, \qquad X_{(s)} X_{(t)} \subseteqq X_{(st)}.$$

Falls $\tilde{\mathfrak{L}}$ homogen ist, heißen die Elemente von $X_{(s)}$ wieder homogen vom Betrage s, analog wie vorhin. $\tilde{\mathfrak{L}}$ ist dann ein homogener Ring. Allgemein heiße s eine *Schranke* für die Elemente von X_s. Nur die Elemente aus Γ haben die Schranke 1. Weiter sei B_s bzw. B_s° der von allen Produkten $b_1 \dots b_n$ aufgespannte Γ-Modul, für welche $b_\nu \in B \cap X_{s_\nu}$ und $s_1 \dots s_n \leqq s$ ist, bzw. außerdem noch $\mathfrak{v}(b_1, \dots, b_n)$ gilt.

Indem man nun unter Berücksichtigung der Voraussetzung I die $x \in X$ durch die $b \in B$ linear ausdrückt und umgekehrt die b geeignet als assoziative Polynome in den x schreibt, sieht man, daß $X_s = B_s$ ist. Darüber hinaus ist $B_s = B_s^\circ$, da sich der *Ordnungsprozeß* von B_s innerhalb X_s durchführen läßt. Da ferner die Basis B von $\mathfrak{L}$ in der Basis $\tilde{B}$ von $\tilde{\mathfrak{L}}$ enthalten ist, folgt

$$\mathfrak{L} \cap X_s = \mathfrak{L} \cap B_s^\circ = \mathfrak{L}_s.$$

Ausreichend und sogar einfacher wäre es gewesen, von vornherein die Voraussetzung I durch Ersetzung von $\mathfrak{L}_s$ durch $\mathfrak{L} \cap X_s$ abzuschwächen. Aber dann hätte die Voraussetzung nicht direkt $\mathfrak{L}$, sondern $\tilde{\mathfrak{L}}$ betroffen.

4. Im folgenden sei $\mathfrak{U}_s = \mathfrak{U} \cap X_s$ und

$$(1) \qquad \mathfrak{B}_s = \mathfrak{U} \cap \sum_{\substack{t_\nu < s \\ \text{l. } t_\nu \leqq s}} \mathfrak{U}_{t_1} \dots \mathfrak{U}_{t_n} \qquad (t_\nu < s \text{ ist wesentlich!}).$$

Beachtet man nun wieder, daß die Basis B von $\mathfrak{L}$ in der Basis $\tilde{B}$ von $\tilde{\mathfrak{L}}$ enthalten ist, so kann man

$$(2) \qquad \mathfrak{B}_s = \sum_{t<s} \mathfrak{U}_t + \sum_{t<s} \mathfrak{U}_t \circ \mathfrak{U}_{t^{-1}s},$$

$$(2\,p) \qquad \mathfrak{B}_s = \sum_{t<s} \mathfrak{U}_t + \sum_{t<s} \mathfrak{U}_t \circ \mathfrak{U}_{t^{-1}s} + \sum_{t^p \leqq s} \mathfrak{U}_t^p$$

zeigen: In der Tat kann durch Anwendung des erwähnten *Ordnungsprozesses* auf (1) die Faktorenzahl auf $n \leqq 2$ reduziert werden. $n = 1$ liefert dann die erste Summe von (2), während für $n = 2$ eine nochmalige Reduktion auf die zweite Summe in (2) führt.

Voraussetzung II. *Für jedes $s \in \mathfrak{S}$ hat $\mathfrak{U}_s/\mathfrak{B}_s$ eine Basis, deren allgemeines Element mit y_s bezeichnet sei.*

Aus (2) folgt durch Induktion (weil $\mathfrak{S}$ ja wohlgeordnet war), daß der Γ-Modul $\mathfrak{U}_s$ von den LIEschen Produkten $y_{s_1} \circ \cdots \circ y_{s_n}$ beliebiger Klammerung mit $\prod s_\nu \leqq s$ erzeugt wird. Insbesondere wird der LIEsche Unterring $\mathfrak{U}$ von der Menge Y aller $y_s, y_t, \dots$ erzeugt. — $\tilde{\mathfrak{U}}$ bezeichne nun die

assoziative Hülle von $\mathfrak{U}$ mit Einselement. Aus dem eben Bewiesenen oder aus (1) folgt, daß $\tilde{\mathfrak{U}} \cap X_s = \tilde{\mathfrak{U}} \cap B_s^\circ$ von den assoziativen Produkten $y_{s_1} \dots y_{s_n}$ mit $\prod s_\nu \leq s$ erzeugt wird. Dies werde symbolisch durch $\tilde{\mathfrak{U}} \cap X_s = Y_s$ ausgedrückt.

5. Die gesuchten Relationen zwischen den $y \in Y$ werden nun gewonnen mit Hilfe einer bestimmten Darstellung $D(a)$ von $\tilde{\mathfrak{L}}$. Hierzu sei $\{c_k\}$ die Familie aller geordneten Potenzprodukte der in B steckenden Basis von $\mathfrak{L}/\mathfrak{U}$. Das leere Produkt sei dabei $c_0 = 1$. Indem man $a\,c_k$ durch die Basis $\tilde{B}$ ausdrückt, erhält man vermöge

$$a\,c_k = \sum c_i\, d_{ik}(a) \tag{3}$$

eine Darstellung von $\tilde{\mathfrak{L}}$ durch zeilenfinite Matrizen $\big(d_{ik}(a)\big)$ mit Koeffizienten aus $\tilde{\mathfrak{U}}$. Insbesondere ist

$$d_{i0}(\tilde{u}) = \delta_{i0} \cdot \tilde{u} \qquad (\tilde{u} \in \tilde{\mathfrak{U}};\ \delta_{00} = 1,\ \text{sonst}\ \delta_{i0} = 0). \tag{4}$$

Für $a \in \mathfrak{L}$ treten bei Anwendung des *Ordnungsprozesses* auf $a\,c_k$ *bei jedem Schritt*, wie sich durch Induktion ergibt, nur solche Glieder $\lambda b_1 \dots b_n$ ($n \geq 1$, $b_\nu \in B$) auf, die nach Streichung höchstens *eines* der b_ν die Gestalt λc_j haben. Dementsprechend sieht also die rechte Seite von (3) aus. Daher ist

$$d_{ik}(\mathfrak{L}) \subseteqq \Gamma + \mathfrak{U} \quad \textit{und} \quad d_{0k}(\mathfrak{L}) \subseteqq \mathfrak{U}. \tag{5}$$

Mit $s(a)$ und $t(a)$ seien allgemein Schranken von $a \in \tilde{\mathfrak{L}}$ bezeichnet, mit der Abkürzung

$$s_k = s(c_k) \quad \text{und} \quad t_i = t(c_i). \tag{6}$$

Mit willkürlichen Schranken $s(a)$, s_k liegt $a\,c_k$ in X_r, $r = s(a) \cdot s_k$. Wegen $X_r = B_r^\circ$ ist $a\,c_k$ Linearkombination aus Monomen $b_1 \dots b_n$, für welche das Produkt passender Schranken $\leq r$ ist. So erhält man für jedes Glied von (3) mit $d_{ik}(a) \neq 0$:

$$s(a) \cdot s_k \geq t_i \cdot t\big(d_{ik}(a)\big). \tag{7}$$

Hierbei sind, wie gesagt, die Schranken $s(a)$, s_k willkürlich und die Schranken t_i und $t\big(d_{ik}(a)\big)$ dazu passend zu wählen. Dabei kann $t_0 = t(1) = 1$ genommen werden. Da $\mathfrak{S}$ in einer geordneten Gruppe liegt, folgt aus (7) für $a = x$

$$1 \leq t\big(d_{ik}(x)\big) \leq t_i^{-1} |x|\, s_k \qquad d_{ik}(x) \in Y_{t_i^{-1}|x|\,s_k} \qquad (t_i^{-1}|x|\, s_k \geq 1). \tag{8}$$

6. Jedes $d_{ik}(x) \in Y_{t_i^{-1}|x|\,s_k}$ läßt sich entsprechend als assoziatives Polynom in den y ausdrücken. Unter den verschiedenen Möglichkeiten, dies zu tun, sei eine ausgewählt, allerdings in Abhängigkeit von der Schranke $t_i|x|\, s_k$. Nun lassen sich für jedes Glied der rechten Seite von

$$d_{i0}\big(\sum \lambda\, x_1 \dots x_n\big) = \sum \lambda\, d_{ik}(x_1) \dots d_{jl}(x_{n-1})\, d_{l0}(x_n) \tag{9}$$

die willkürlichen Schranken $\mathfrak{s}$ vom rechten Faktor anfangend nacheinander so normieren, daß $s(x_\nu) = |x_\nu|$ und s_k jeweils gleich dem im vorhergehenden

Schritt in Übereinstimmung mit (7) bestimmten t_h ist:

$$s_0 = 1\,, \quad s_l = t_l\,, \quad s_j = t_j, \ldots . \tag{10}$$

Damit ist jedem Polynom $f = \sum \lambda x_1 \ldots x_n$ in wohlbestimmter Weise ein Polynom $d_{i0}(f)$ in den Unbestimmten y zugeordnet.

Unter den Voraussetzungen I und II gilt nun der

Hauptsatz. *Das von der Gesamtheit aller Relationen $r(x) = 0$ induzierte System von Relationen $d_{i0}(r) = 0$ in den y erzeugt alle assoziativen Relationen in den y. Sind insbesondere die x freie Erzeugende von $\mathfrak{L}$, so sind die y freie Erzeugende von $\mathfrak{U}$. Im Falle eines Körpers als Koeffizientenbereich Γ ist jeder Unterring eines freien* LIEschen *Ringes wieder frei.*

Beweis. $\mathfrak{R}$ sei das durch die Relationen $d_{i0}(r) = 0$ definierte Ideal in dem von den Unbestimmten y_s erzeugten Ring. Die Restklasse von y_s mod $\mathfrak{R}$ sei mit y'_s bezeichnet. Entsprechend läßt sich mit Hilfe von (9) für $f \in \mathfrak{L}$ eine Restklasse $d'_{i0}(f)$ mod $\mathfrak{R}$ nach Konstruktion von $\mathfrak{R}$ *eindeutig* bilden. Da nun für die y' nur Relationen gelten, die für die y sicher erfüllt sind, hat man eine kanonische homomorphe Abbildung mit $y' \to y$. Der Hauptsatz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß die Anwendung von d'_{00} die Umkehrung dieser Abbildung bewirkt.

Es sei T der Gültigkeitsbereich von

$$d'_{i0}(y_t) = \delta_{i0} \cdot y'_t \qquad (t \in T)\,. \tag{11}$$

Indem man $d'_{i0}(f)$ als erste Spalte einer Darstellungsmatrix auffaßt, die in ihren übrigen Teilen allerdings mehrdeutig ist, folgt, daß d'_{00} jedes Polynom in $y_t (t \in T)$ homomorph auf das entsprechende Polynom in y'_t abbildet. Zur Vollendung des Beweises genügt es daher

$$d'_{i0}(y_s) = \delta_{i0}\, y'_s \tag{12}$$

für beliebiges s durch Induktion zu bestätigen. Angenommen also, T enthalte alle Indizes $t < s$. Nun sei

$$y_s = \sum \lambda x_1 \ldots x_n \quad \text{mit} \quad |x_1| \ldots |x_n| \leq s\,. \tag{13}$$

In der nach (4) und (9) bestehenden Relation in den y

$$d_{i0}(y_s) = \sum \lambda\, d_{ik}(x_1) \ldots d_{jl}(x_{n-1})\, d_{l0}(x_n) = \delta_{i0}\, y_s \tag{14}$$

ist das Produkt der zugehörigen normierten Schranken

$$[t_i^{-1} |x_1| t_k] \ldots [t_j^{-1} |x_{n-1}| t_l]\, [t_l^{-1} |x_n|] \leq t_i^{-1} s \leq s\,. \tag{15}$$

Hier ist jede Schranke $[\,] \leq s$. Der Fall $[\,] = s$ kann bei jedem Monom höchstens einmal auftreten, die anderen Schranken $[\,]$ sind dann gleich 1 und die zugehörigen $d_{\alpha\beta}(x) \in \Gamma$, ferner ist dann rechts $t_i = 1$, also $i = 0$. Da dann die linke Schranke $[|x_1| t_k] > 1$ ist, ist *sie* es mit dem Wert s.

Hiernach kommen in der Relation (14) nur die y_t mit $t \leq s$ vor, dabei die Basiselemente von $\mathfrak{U}_s/\mathfrak{B}_s$ höchstens linear. Aber gerade auf Grund der Basiseigenschaft heben sich die letzteren in der Relation identisch fort. Also ist (14) in Wirklichkeit nur eine Relation zwischen y_t mit $t < s$ und geht daher durch Anwendung von d'_{00} in (12) über. Damit ist der Hauptsatz bewiesen. Nach der Diskussion von $[\,] = s$ folgt außerdem nach (14) mit $i = 0$ unter Beachtung von (5) der

Satz 2. *$\mathfrak{U}_s/\mathfrak{B}_s$ wird linear aufgespannt von den $d_{0k}(x)$ mit $|x|\, t_k = s$.*

Hier tritt das Problem auf, eine Basis B von $\mathfrak{L}$ zu finden, die so beschaffen ist, daß die von Null verschiedenen $d_{0k}(x)$ linear unabhängig sind, *so daß man deren Gesamtheit als die Erzeugung Y von $\mathfrak{U}$ nehmen kann*, von der im Hauptsatz die Rede ist. Eine solche Basis B heiße im folgenden eine **ökonomische** *Basis bezüglich* $\mathfrak{U}$. Die Frage nach der Existenz einer ökonomischen Basis wird in Satz 10 behandelt.

7. Für den Fall, daß Γ ein Körper ist, nehme man einen *total wohlgeordneten* Kegel, z.B. den (unendlichen) zyklischen Kegel $\{\xi^n\}$ und etwa $|x| = \xi$ (d.h. additiv: den Kegel der natürlichen Zahlen und Grad $x = 1$). Eine Basis B der in Voraussetzung I beschriebenen Art läßt sich dann so bilden, daß man eine nach Beträgen geordnete Basis von $\mathfrak{U}$ zu einer nach Beträgen geordneten Basis von $\mathfrak{L}$ ergänzt. Die Möglichkeit dieser Basiskonstruktion läßt sich leicht aus der angenommenen totalen Wohlordnung von $\mathfrak{S}$ beweisen. Auch in anderen Fällen ist es oft vorteilhaft, den Kegel $\mathfrak{S}$ und die Abbildung $x \to |x|$ passend zu wählen.

Eine Vereinfachung im Beweis tritt ein, wenn jedes c_k nur *eine* minimale Schranke hat (z.B. wenn $\mathfrak{S}$ total wohlgeordnet ist). Dann kann von vornherein $s_k = t_k =$ dieser minimalen Schranke gesetzt werden. Dadurch wird es möglich, allgemein $d_{jk}(\sum \lambda x_1 \ldots x_n)$ eindeutig als Polynom in den y zu erklären. Ebenso wie der Hauptsatz wird dann folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *Das von einem definierenden System von Relationen $r_\alpha(x) = 0$ induzierte System der Komponenten der Matrixrelationen $r_\alpha(d_{ik}(x)) = 0$ erzeugt alle assoziativen Relationen in den y.*

8. Berechnung von $d_{0k}(a)$ $(a \in \mathfrak{L})$ bei spezieller Basis B zur Anwendung von Satz 2.

Voraussetzung III. *Die in Voraussetzung I angenommene Basis B sei so beschaffen, daß für jedes $b_1 \notin \mathfrak{U}$ die Menge der $b \geq b_1$ linear einen Unterring von $\mathfrak{L}$ aufspannt $(b_1, b \in B)$.*

Dies trifft z.B. zu, wenn alle Elemente der Basis homogen und die $b_\beta \in \mathfrak{L}/\mathfrak{U}$ nach aufsteigenden Beträgen geordnet sind (wobei also die Abbildung $b_\beta \to |b_\beta|$ isoton ist). In diesem Falle sind die $|b_\beta|$ natürlich total wohlgeordnet.

Es sei hier hervorgehoben, daß an den Voraussetzungen I und III das Wichtigste die Aussagen über die Relativbasis von $\mathfrak{L}/\mathfrak{U}$ sind. Auf die Basis von $\mathfrak{U}$ könnte man in vielen Fällen verzichten.

Im Fall $c_k = b_1 \dots b_r$ werde die deutlichere **Bezeichnung** eingeführt:

$$d_{0k}(a) = a \bullet b_1 \dots b_r, \qquad (a \in \mathfrak{L}). \tag{16}$$

Ferner bedeute

$$\sum_{\nu} \lambda_\nu b_\nu * b_\mu = \sum_{b_\nu > b_\mu} \lambda_\nu b_\nu \circ b_\mu. \tag{17}$$

Satz 4. *Unter der Voraussetzung III hat man für die rekursive Darstellung der* $d_{0k}(a)$:

$$\sum \lambda_\nu b_\nu \bullet 1 = \sum_{b_\nu \in \mathfrak{U}} \lambda_\nu b_\nu, \tag{18}$$

$$d_{0k}(b) = b \bullet b_1 \dots b_r = (b * b_1) \bullet b_2 \dots b_r \qquad (b \in B,\ r > 0), \tag{19}$$

(19p) *dazu noch im p-Fall* $b \bullet b_1 \dots b_r = b^p \bullet b_p \dots b_r$ *falls* $b = b_1 = \dots = b_{p-1}$.

Insbesondere gilt die explizite Formel

$$d_{0k}(a) = a \bullet b_1 \dots b_r = \big(((a * b_1) * \dots) * b_r\big) \bullet 1, \tag{20}$$

(20p) *(im p-Fall modifiziert sich allerdings die rechte Seite, wenn unter den b_r, $p-1$ gleiche vorkommen).*

Beweis. (19) ist trivial für $b \leq b_1$. Für $b > b_1$ ist

$$b\, b_1 b_2 \dots b_r = (b * b_1)\, b_2 \dots b_r + b_1\, b\, b_2 \dots b_r$$

und hier ist zu zeigen, daß $b_1 b b_2 \dots b_r$ keinen Beitrag zu $d_{0k}(a)$ liefert. Das folgt daraus, daß bei jedem Schritt des Ordnungsprozesses, wie man durch Induktion sieht, immer b_1 erster Faktor und alle übrigen Faktoren $\geq b_1$ sind (im p-Fall ist die Zahl der zu b_1 gleichen Faktoren $\leq p-1$). Trivial ist auch (18); (20) folgt aus (18) und (19).

§ 3. Unterringe eines freien Lieschen Ringes mit einem Hauptidealring Γ als Koeffizientenbereich

Es werde folgende Voraussetzung gemacht:

Voraussetzung IV. *$\mathfrak{L}$ sei der mit der Erzeugung X freie* LIEsche *Ring mit einem kommutativen Hauptidealring Γ als Koeffizientenbereich. Die zugrunde gelegte Abbildung $x \to |x| > 1$ in den wohlgeordneten*[5]) *kommutativen Kegel $\mathfrak{S}$ einer geordneten Gruppe sei so beschaffen, daß für jedes $s \in \mathfrak{S}$ nur endlich viele x einen Betrag $|x| \leq s$ haben, mit anderen Worten, $\sum |x|$ sei formal summierbar.*

Die Summierbarkeit läßt sich immer erreichen, z.B. indem man die x eineindeutig auf assoziative und kommutative Unbestimmte ξ bezieht und den Kegel der aus den ξ gebildeten Monome, geordnet im Sinne der Teilbarkeit, zugrunde legt. Dieser Kegel heiße der zugehörige **monomiale** Kegel.

Aus der Summierbarkeit von $\sum |x|$ folgt

$$(1 - \sum |x|)^{-1} = \sum \alpha_s s \tag{1}$$

mit formal summierbarer rechter Seite, in der die natürliche Zahl α_s, ihrem Bildungsgesetz entsprechend, den Rang von $X_{(s)}$ angibt, die formale Summierbarkeit also einfach die *Endlichkeit des Ranges* von $X_s = \sum_{t \leq s} X_{(t)}$ bedeutet.

Hilfssatz. *Die Voraussetzung II ist eine Folge der Voraussetzungen I und IV.*

Beweis. $\mathfrak{y}_t$ sei der von den Elementen y_t in Voraussetzung II erzeugte Untermodul von $\mathfrak{U}_t$. Für $t<s$ sei bereits $\mathfrak{U}_t = \mathfrak{B}_t \dotplus \mathfrak{y}_t$ gezeigt. Da Γ ein Hauptidealring ist, genügt es wegen der Endlichkeit des Ranges von X_s, in dem $\mathfrak{U}_s$ liegt, die Torsionslosigkeit von $\mathfrak{U}_s/\mathfrak{B}_s$ zu beweisen. Dazu sei für ein beliebiges Primelement $\pi \in \Gamma$ und für $u \in \mathfrak{U}_s$

$$\pi u = f(y_t) \in \mathfrak{B}_s \qquad (t<s). \tag{2}$$

Es werde nun die Abbildung $\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}/\pi\mathfrak{L}$ vorgenommen. Der neue Koeffizientenbereich Γ/π ist ein Körper. Bei dieser Abbildung bleibt jede direkte Zerlegung $\mathfrak{L} = \sum \mathfrak{M}_\nu$ direkt, also bleibt B aus Voraussetzung I eine Basis mit gleicher Eigenschaft. Folglich bleibt $\mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{L}_\sigma$ bestehen, und nach (2) § 2 behält $\mathfrak{B}_\sigma$ seine alte Bedeutung. Da die $\mathfrak{U}_\sigma$ direkte Summanden von $\mathfrak{L}$ sind, bleibt $\mathfrak{U}_t = \mathfrak{B}_t \dotplus \mathfrak{y}_t$ für $t<s$ auch nach der Abbildung bestehen. Da Γ/π ein Körper ist, gilt die Voraussetzung II sicher nach der Abbildung, insbesondere bestehen dann nach dem Hauptsatz für die y_t mit $t<s$ keinerlei Relationen. Das bedeutet aber, daß in (2) $\pi u = f(y_t) = \pi g(y_t)$ ist, und, weil $\mathfrak{L}$ torsionslos ist, $u = g(y_t) \in \mathfrak{B}_s$, wie zu zeigen war.

Unter der Voraussetzung IV gilt der für die Anwendungen in der Gruppentheorie wichtige Satz:

Satz 5. *Jeder homogene Unterring $\mathfrak{U}$ eines freien* LIE*schen Ringes $\mathfrak{L}$ mit torsionslosem Faktormodul $\mathfrak{L}/\mathfrak{U}$ läßt sich durch homogene Elemente y frei erzeugen. Die Voraussetzung IV überträgt sich von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{U}$ hinsichtlich $y \to |y|$.*

Beweis. Zur Anwendung des Hauptsatzes ist nach dem eben bewiesenen Hilfssatz nur noch die Voraussetzung I nachzuprüfen.

$\mathfrak{L}_{(s)}$ und $\mathfrak{U}_{(s)} = \mathfrak{U} \cap X_{(s)}$ haben als Untermoduln des freien Γ-Moduls $X_{(s)}$ Basen bezüglich Γ. Als torsionsloser Faktormodul des endlichen Γ-Moduls $\mathfrak{L}_{(s)}$ hat auch $\mathfrak{L}_{(s)}/\mathfrak{U}_{(s)}$ eine Γ-Basis. Die Vereinigung B der Γ-Basen aller $\mathfrak{U}_{(s)}$ und $\mathfrak{L}_{(s)}/\mathfrak{U}_{(s)}$ ist dann eine homogene Basis, die die Voraussetzung I erfüllt. Zugleich sieht man, daß $\mathfrak{U}$ eine freie homogene Erzeugung Y hat. $\sum |y|$ hat schließlich nach (1) die summierbare Majorante $\sum \alpha_s s$.

Unter der Voraussetzung IV gilt der für numerische Rangberechnungen grundlegende

Satz 6. *Zwischen den freien Erzeugenden X und einer homogenen Basis B von $\mathfrak{L}$ besteht die formale Relation*

$$(1 - \sum |x|)^m = \prod (1 - |b|)^m \qquad (x \in X,\ b \in B,\ m = \pm 1), \tag{3}$$

$$(1 - \sum |x|)^m = \prod \left(\frac{1 - |b|}{1 - |b|^p}\right)^m \qquad (x \in X,\ b \in B,\ m = \pm 1). \tag{3p}$$

Mit anderen Worten: Für einen freien LIE*schen Ring gilt unter der Voraussetzung IV*

$$1-\sum \varepsilon_s s=\prod(1-s)^{\beta_s}, \tag{4}$$

$$1-\sum \varepsilon_s s=\prod\left(\frac{1-s}{1-s^p}\right)^{\beta_s}, \tag{4p}$$

wo ε_s die Anzahl der freien Erzeugenden x vom Betrage s und β_s die Anzahl der homogenen Basiselemente b vom Betrage s bezeichnet.

Wie schon in § 1 gesagt, sind durch (4) *die ε_s von den β_s und umgekehrt „rekursiv" abhängig.*

Beweis von Satz 6. Von $\mathfrak{Q}$ kennen wir folgende zwei homogene Basen: 1. Alle Potenzprodukte der x, und 2. die geordneten Potenzprodukte der b. Daher ist

$$\sum |x_1|\dots|x_n| = \sum{}^{(o)} |b_1|\dots|b_n| \qquad [n \text{ variabel } \geq 0;\ o(b_1,\dots,b_n)]. \tag{5}$$

Die Summierbarkeit der linken Seite folgt dabei nach Satz 1 aus derjenigen von $\sum|x|$. Nach demselben Satz ist (5) gleichwertig mit (3).

Hat $\mathfrak{Q}$ ε Erzeugende und wird $|x|=\xi\in\{\xi^n\}$ zugrunde gelegt, so findet man nach § 1 (8) für den Rang des in x homogenen Moduls $\mathfrak{Q}_{(n)}$ (der Index wird hier additiv geschrieben) die Formel

$$\psi_n(\varepsilon)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)\,\varepsilon^{n/d}, \tag{6}$$

die ich 1937 bewiesen habe[8]). Im p-Fall gilt nach § 1 (8p) die entsprechende Rangformel

$$\psi_n(\varepsilon)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d_0)\,\varphi(p^h)\,\varepsilon^{n/d} \qquad (d=d_0\,p^h,\ p\nmid d_0) \tag{6p}$$

mit der EULERschen Funktion $\varphi(p^h)$.

Aus Satz 6 erhält man, ebenfalls unter Voraussetzung IV:

Satz 7. *Ein Unterring* $\mathfrak{U}$ *eines freien* LIE*schen Ringes* $\mathfrak{Q}$, *der von Moduln* $\mathfrak{Q}_{(t)}$, $t\in T\subseteqq\mathfrak{S}$, *erzeugt wird, ist stets frei.*

Beweis. Nach Satz 5 ist nur zu zeigen, daß $\mathfrak{Q}/\mathfrak{U}$ torsionsfrei ist. Wegen der Homogenität von $\mathfrak{Q}$ genügt es, dies für alle $\mathfrak{Q}_{(s)}/\mathfrak{U}_{(s)}$ ($s\in\mathfrak{S}$) zu beweisen. — K sei der Quotientenkörper von Γ und π bezeichne die Primelemente von Γ. Ferner seien $K\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}/\pi\mathfrak{Q}$ die freien LIEschen Ringe, die man aus $\mathfrak{Q}$ erhält, indem man statt Γ die Körper K bzw. Γ/π als Koeffizientenbereich wählt. Für die Ränge von $K\mathfrak{Q}_{(s)}$ bzw. $\mathfrak{Q}_{(s)}/\pi\mathfrak{Q}_{(s)}$ gelten dann Relationen der Form (4), jedesmal mit denselben $\varepsilon_s(\mathfrak{Q})$, also stimmen diese Ränge überein. Ferner sind nach dem Hauptsatz auch $K\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}/\mathfrak{U}\cap\pi\mathfrak{Q}$ frei, so daß für diese ebenfalls Bedingungen der Gestalt (4) gelten. Aus der Voraussetzung des Satzes und § 2, (2) folgt, daß in jedem dieser Fälle entweder $\varepsilon_s=0$ oder β_s

[8]) WITT, E.: Treue Darstellung LIEserch Ringe. J. reine u. angew. Math. **177**, 152—160 (1937).

bekannt ist, nämlich gleich $\beta_s(\mathfrak{L})$. Da sich hieraus die übrigen ε_s und β_s jedesmal durch dieselbe Formel (4) bestimmen, haben alle ε_s und β_s für $K\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}/\mathfrak{U}\cap\pi\mathfrak{L}$ dieselben Werte.

Wegen Voraussetzung IV sind nun die $\mathfrak{L}_{(s)}$ endliche Γ-Moduln. Man kann hier also den Hauptsatz für abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden anwenden. Danach hätte $\mathfrak{L}_{(s)}/\mathfrak{U}_{(s)}$ genau dann Torsion, wenn bei passendem $\pi\in\Gamma$ der Rang von $\frac{\mathfrak{L}_{(s)}/\pi\mathfrak{L}_{(s)}}{\mathfrak{U}_{(s)}/\pi\mathfrak{U}_{(s)}}$ größer wäre als der von $K\mathfrak{L}_{(s)}/K\mathfrak{U}_{(s)}$. Dies kann aber nicht eintreten, denn diese Ränge sind nach dem eben Gesagten jedesmal gleich der Differenz zwischen den Rängen von $K\mathfrak{L}_{(s)}$ und $K\mathfrak{U}_{(s)}$, also ist $\mathfrak{L}_{(s)}/\mathfrak{U}_{(s)}$ torsionsfrei, und das sollte gezeigt werden.

Als Anwendung hiervon läßt sich z. B. der Rang β_{i+k} von $\mathfrak{L}_{(i)}\circ\mathfrak{L}_{(k)}$ explizit berechnen $(i\leq k)$:

$$\beta_{i+k}=\gamma_{i+k}\big(\psi_i(\varepsilon)\big)+\psi_i(\varepsilon)\cdot\big(\psi_k(\varepsilon)-\gamma_k(\psi_i(\varepsilon))\big), \tag{7}$$

wobei stets $\gamma_\nu=\psi_{\nu/i}$ bedeute und letzteres für echt gebrochene Indizes als Null erklärt wird. (7) läßt sich folgendermaßen zeigen:

Der von $\mathfrak{L}_{(i)}$ und $\mathfrak{L}_{(k)}$ erzeugte Unterring $\mathfrak{U}$ ist nach Satz 7 frei und hat im Falle $i<k$, den wir zunächst betrachten, $\varepsilon_{(i)}+\varepsilon_{(k)}$ freie Erzeugende, wenn $\varepsilon_{(i)}$, $\varepsilon_{(k)}$ den Rang von $\mathfrak{B}_{(i)}$ bzw. $\mathfrak{B}_{(k)}$ bedeuten. In $\beta_{i+k}=\gamma_{i+k}(\varepsilon_{(i)})+\varepsilon_{(i)}\varepsilon_{(k)}$ ist $\varepsilon_{(i)}=\psi_i(\varepsilon)$ wegen $\mathfrak{B}_{(i)}=\mathfrak{L}_{(i)}$, und $\varepsilon_{(k)}$ ergibt sich aus der Rangformel $\psi_k(\varepsilon)-\varepsilon_{(k)}=\gamma_k(\varepsilon_{(i)})$ für $\mathfrak{L}_{(k)}/\mathfrak{B}_{(k)}$. Durch Einsetzung folgt jetzt (7). Für $i=k$ ist analog $\beta_{2i}=\gamma_{2i}(\varepsilon_{(i)})=\gamma_{2i}\big(\psi_i(\varepsilon)\big)$, und wegen $\gamma_i\big(\psi_i(\varepsilon)\big)=\psi_i(\varepsilon)$ gilt wieder (7).

Für den Fall $i<k$ läßt sich dies übrigens auch ohne Eingehen auf den LIEschen Ring $\mathfrak{L}$ selbst, allein aus der Beziehung (4), erhalten. Man hat für $\mathfrak{U}$

$$1-\varepsilon_{(i)}\xi^i-\varepsilon_{(k)}\xi^k=(1-\xi^i)^{\beta_i(\mathfrak{L})}(1-\xi^k)^{\beta_k(\mathfrak{L})}\prod_{n\neq i,k}(1-\xi^n)^{\beta_n(\mathfrak{U})}$$

und, daneben, für $\mathfrak{L}_{(i)}$

$$1-\varepsilon_{(i)}\xi^i=\prod(1-\xi^\nu)^{\gamma_\nu(\varepsilon_{(i)})}.$$

Durch Division erhält man dann

$$1-\frac{\varepsilon_{(k)}\xi^k}{1-\varepsilon_{(i)}\xi^i}=(1-\xi^k)^{\beta_k(\mathfrak{L})-\gamma_k(\varepsilon_{(i)})}\prod_{n\neq i,k}(1-\xi^n)^{\beta_n(\mathfrak{U})-\gamma_n(\varepsilon_{(i)})}.$$

[Der erste Faktor rechts fällt wegen $\beta_i(\mathfrak{L})=\varepsilon_{(i)}=\gamma_i(\varepsilon_{(i)})$ fort.] Durch Vergleich der Koeffizienten von ξ^k und ξ^{i+k} erhält man dann

$$\varepsilon_{(k)}=\beta_k(\mathfrak{L})-\gamma_k(\varepsilon_{(i)})\quad\text{und}\quad\varepsilon_{(i)}\varepsilon_{(k)}=\beta_{i+k}(\mathfrak{U})-\gamma_{i+k}(\varepsilon_{(i)}),$$

was für $\beta_{i+k}=\beta_{i+k}(\mathfrak{U})$ dasselbe wie oben liefert. Eine völlig analoge Rechnung läßt sich im p-Fall mit Hilfe der Formel $(4p)$ durchführen. —

Üblicherweise versteht man unter der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{L}$ die Folge

$$\mathfrak{L}^k=\sum_{m\geq k}\mathfrak{L}_{(m)}. \tag{8}$$

Als Anwendung von Satz 6 werde folgende Aufgabe gelöst:

Aufgabe. *Unter Voraussetzung IV sollen die Rangzahlen $\beta_s(\mathfrak{L}^k)$ aus den Rangzahlen $\beta_s(\mathfrak{L})$ numerisch bestimmt werden, ohne dabei im* LIEschen *Ring zu rechnen.*

Aus (4) mit $\beta_s = \beta_s(\mathfrak{L})$ bekommt man zunächst die Anzahl ε_s der freien Erzeugenden x von $\mathfrak{L}$ vom Betrage s. Da $\mathfrak{L}^k/\mathfrak{L}^{k+1}$ isomorph ist zum Modul aller in den x homogenen LIEschen Polynome vom Grade k, lautet (4) für die neue Abbildung $x \to |x| \cdot \xi$ in das direkte Produkt $\mathfrak{S} \times \{\xi^n\}$ von $\mathfrak{S}$ mit dem (unendlichen) zyklischen Kegel $\{\xi^n\}$

$$(9) \qquad 1 - \sum \varepsilon_s s \xi = \prod_{s,k} (1 - s\xi^k)^{\beta_s(\mathfrak{L}^k) - \beta_s(\mathfrak{L}^{k+1})},$$

$$(9p) \qquad 1 - \sum \varepsilon_s s \xi = \prod_{s,k} \left(\frac{1 - s\xi^k}{1 - s^p \xi^{pk}}\right)^{\beta_s(\mathfrak{L}^k) - \beta_s(\mathfrak{L}^{k+1})}.$$

Hiermit lässen sich aus den ε_s die Differenzen $\beta_s(\mathfrak{L}^k) - \beta_s(\mathfrak{L}^{k+1})$ berechnen, und aus ihnen, ausgehend von $\beta_s(\mathfrak{L})$, rekursiv die gewünschten $\beta_s(\mathfrak{L}^k)$.

Von gewissen Teilbasen von $\mathfrak{L}$ kann man unter Umständen a priori feststellen, daß zwischen ihren Elementen keine LIEschen Relationen möglich sind. Unter Voraussetzung IV gilt

Satz 8. *Ist innerhalb einer Teilmenge S des Kegels $\mathfrak{S}$ kein Element als Produkt darstellbar, so ist die Menge $Y = \cup B_{(s)}$ von Basen $B_{(s)}$ der homogenen Moduln $X_{(s)}$ $(s \in S)$ frei, d.h. der von Y erzeugte Unterring $\mathfrak{U}$ hat Y als freie Erzeugung.*

Beweis. $\mathfrak{U}$ ist ein homogener Ring, bestehend aus den homogenen Moduln $\mathfrak{U}_{(t)}$ mit $t = \prod s_\mu$, $s_\mu \in S$. Nun kann in Beweis des Hauptsatzes für einen homogenen Unterring $\mathfrak{U}$ mit gleicher Wirkung $\mathfrak{U}_s$ durch $\mathfrak{U}_{(s)}$, und $\mathfrak{V}_s$ durch

$$\mathfrak{V}_{(s)} = \mathfrak{V}_s \cap \mathfrak{U}_{(s)} = \mathfrak{U} \cap \sum_{\substack{t_\nu < s \\ \Pi t_\nu = s}} \mathfrak{U}_{(t_1)} \dots \mathfrak{U}_{(t_n)}$$

ersetzt werden. S hat nun die Eigenschaft, daß $\mathfrak{V}_{(s)} = 0$ ist, daher kann in der Voraussetzung II als Basis von $\mathfrak{U}_s/\mathfrak{V}_s$ gerade $B_{(s)}$ genommen werden, und die Vereinigung dieser Basen ist dann nach dem Hauptsatz frei.

Erweiterung von Satz 8. Ersetzt man in einer homogenen freien Menge Y jedes Element y vom Betrag s durch ein

$$y^* = y + \sum y_i \quad \text{mit} \quad |y_i| < s$$

[bzw. durchgehend $|y_i| > s$], so entsteht wieder eine freie Menge.

Beweis. Angenommen $r(u)$ sei ein LIEsches Polynom mit $r(y^*) = 0$. Ist $r_0(u)$ der homogene Bestandteil höchsten [bzw. niedrigsten] Grades von $r(u)$, so müßte auch $r_0(y) = 0$ sein, obwohl Y frei angenommen war.

In ähnlicher Weise kommt man zu folgendem

Satz 9. *Zwischen zwei linear unabhängigen Elementen a und b eines freien* LIEschen *Ringes $\mathfrak{L}$ gibt es überhaupt keine Relationen.*

Dagegen kann es bei drei Elementen natürlich Relationen geben, z.B. zwischen $a, b, a \circ b$.

Im p-Fall ist Satz 9 in der vorliegenden Fassung falsch, da ja zwischen a und a^p eine Relation besteht. Statt dessen läßt sich hier sagen, daß *es für* 1 *Element* $a \neq 0$ *keine Relationen gibt*, wie man in $\tilde{\mathfrak{L}}$ sieht.

Beweis. a und b werden bereits aus einer endlichen Teilmenge $X_0 \subseteq X$ erzeugt. Für den Beweis genügt es, $X = X_0$ anzunehmen. Es werde $|x| = \xi$ im zyklischen Kegel $\mathfrak{S} = \{\xi^n\}$ festgesetzt. Durch eine geeignete umkehrbare lineare Transformation kann man nun erreichen, daß die homogenen Leitglieder a_n und b_m der höchsten Grade n und m linear unabhängig sind. Es genügt nach dem obigen Beweis, zu zeigen, daß $Y = \{a_n, b_m\}$ frei ist. Dies wird fast ebenso wie Satz 8 bewiesen, nur wird man hier $\mathfrak{B}_{(\xi^n)} = \mathfrak{B}_{(\xi^m)} = 0$ direkt begründen.

Die geeignete Umkehrung von Satz 6 ergibt ein Kriterium dafür, daß ein LIEscher Ring frei ist: $\mathfrak{L}$ sei ein von einer Familie $\{x_\iota\}$, $\iota \in I$, erzeugter homogener LIEscher Ring mit einem kommutativen Hauptidealring Γ als Koeffizientenbereich. Die zugrunde gelegte Abbildung $x_\iota \to |x_\iota|$ in den wohlgeordneten Kegel $\mathfrak{S}$ einer geordneten Gruppe sei so beschaffen, daß $\sum |x_\iota| = \sum \varepsilon_s s$ formal summierbar ist. β_s sei der Rang von $\mathfrak{L}_{(s)}$ modulo seiner Torsion.

Kriterium. $\{x_\iota\}$ *ist genau dann eine freie Erzeugung von* $\mathfrak{L}$, *falls*

$$\prod (1 - s)^{\beta_s} = 1 - \sum \varepsilon_s s, \tag{10}$$

$$\prod \left(\frac{1 - s}{1 - s^p}\right)^{\beta_s} = 1 - \sum \varepsilon_s s. \tag{10p}$$

Beweis. $\bar{\mathfrak{L}}$ sei der aus lauter verschiedenen Unbestimmten $\bar{x}_\iota$ erzeugte freie LIEsche Ring ($\iota \in I$). Es werde $|\bar{x}_\iota| = |x_\iota|$ gesetzt. Hierdurch wird $\bar{\mathfrak{L}}$ ein homogener Modul. Nach Satz 6 folgt aus (10), daß β_s zugleich der Rang des freien Γ-Moduls $\bar{\mathfrak{L}}_{(s)}$ ist. Daher muß $\bar{\mathfrak{L}}_{(s)}$ isomorph zu seinem Faktormodul $\mathfrak{L}_{(s)}$ sein. Aus der Homogenität von $\mathfrak{L}$ folgt jetzt, daß $\bar{x}_\iota \to x_\iota$ einen Isomorphismus erzeugt.

Explizite Angabe einer freien Erzeugung eines Unterringes $\mathfrak{U}$ unter gewissen Bedingungen. Für die b_i einer Basis B von $\mathfrak{L}$ bedeute

$$\mathfrak{u}(b_1, \ldots, b_n) \qquad (n \geq 0), \tag{11}$$

daß die früher erklärte Relation $\mathfrak{o}(b_1, \ldots, b_n)$ und außerdem $b_i \notin \mathfrak{U}$ besteht.

Satz 10. $\mathfrak{U}$ *sei bezüglich der Erzeugung* X *ein homogener Unterring des* LIEschen *Ringes* $\mathfrak{L}$ *mit der Basis* B. *Außer den Voraussetzungen I bis IV werde* $X \subseteq B$ *angenommen. Dann wird* $\mathfrak{U}$ *von den Elementen*

$$y = d_{0k}(x) = x \bullet b_1 \ldots b_n \quad \begin{cases} \text{mit} & \mathfrak{u}(b_1, \ldots, b_n) \\ \text{aber nicht} & \mathfrak{u}(x, b_1, \ldots, b_n) \end{cases} \tag{12}$$

frei erzeugt.

Satz 10 besagt genau, daß B eine ökonomische Basis von $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{U}$ ist. In Verbindung mit Satz 4 ergeben sich in speziellen Fällen fertige Formeln für eine Erzeugung von $\mathfrak{U}$.

Beweis von Satz 10: Nach Satz 2 wird $\mathfrak{U}$ von diesen $d_{0k}(x)$ erzeugt, da im Fall $\mathfrak{u}(x, b_1, \ldots, b_n)$ $d_{0k}(x) = 0$ ist. In der folgenden Abzählung ist zu beachten, daß aus $\mathfrak{u}(x, b_1, \ldots, b_n)$ auch $\mathfrak{u}(b_1, \ldots, b_n)$ folgt. Durchläuft e die Menge $E = B - B \cap \mathfrak{U}$, so hat man

$$(13)\quad \begin{cases} \sum |y| - 1 = \sum |x| \prod (1 - |e|)^{-1} - \prod (1 - |e|)^{-1} \\ \qquad = (\sum |x| - 1) \prod (1 - |e|)^{-1} = - \prod (1 - |b|) \prod (1 - |e|)^{-1}, \end{cases}$$

$$(13\,p)\quad \begin{cases} \sum |y| - 1 = \sum |x| \prod \frac{1 - |e|^p}{1 - |e|} - \prod \frac{1 - |e|^p}{1 - |e|} \\ \qquad = (\sum |x| - 1) \prod \frac{1 - |e|^p}{1 - |e|} = - \prod (1 - |b|) \prod \frac{1 - |e|^p}{1 - |e|} \end{cases}$$

und damit ist das Kriterium (10) für die Familie $\{y\}$ erfüllt, q. e. d.

Besteht speziell die Erzeugung X aus k und E aus $\varkappa$ Elementen und ist immer $|x| = \xi \in \mathfrak{S}$ (ξ fest), so erhält man aus (13) eine explizite Formel für die Anzahl der Erzeugenden y von $\mathfrak{U}$, die den Grad $n \neq 0$ in den Erzeugenden x von $\mathfrak{L}$ haben, durch den Koeffizienten von ξ^n in

$$(14)\qquad \sum |y| - 1 = \frac{k\xi - 1}{(1 - \xi)^\varkappa} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n \frac{k-1}{\varkappa - 1} - 1\right) \binom{n + \varkappa - 2}{n} \xi^n,$$

$$(14\,p)\qquad \sum |y| - 1 = (k\xi - 1) \left(\frac{1 - \xi^p}{1 - \xi}\right)^\varkappa \qquad \text{(ein Polynom)}.$$

Besonderes Interesse verdient der Fall $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}^2$. Hierfür ist $E = X$ (im endlichen Fall $\varkappa = k$), und die Erzeugung Y von $\mathfrak{L}'$, die zugleich Basis von $\mathfrak{L}'/\mathfrak{L}''$ ist, besteht nach den Sätzen 10 und 4 genau aus allen Produkten

$$(15)\qquad ((x_\alpha \circ x_\beta) \circ \cdots) \circ x_\gamma \quad \text{mit} \quad x_\alpha > x_\beta, \mathfrak{v}(x_\beta, \ldots, x_\gamma),$$

die mindestens zwei Faktoren enthalten. Im p-Fall kommen noch die Produkte

$$((x^p \circ x_\beta) \circ \cdots) \circ x_\gamma \quad \text{mit} \quad x > x_\beta, \mathfrak{v}(x_\beta, \ldots, x_\gamma)$$

hinzu.

Wiederholt man diesen Schritt $\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$ auf $\mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}''$, $\mathfrak{L}'' \to \mathfrak{L}'''$, usw., so kommt man zu einer Basis B_K von $\mathfrak{L}$, die nur aus Monomen besteht.

§ 4. d-Basen

$\mathfrak{L}$ sei ein freier LIEscher Ring mit der Erzeugung X und $x \to |x|$ die Abbildung in den zugehörigen monomialen Kegel. Für einen homogenen Unterring $\mathfrak{M}$ bezeichne $|\mathfrak{M}|$ die Gesamtheit der in $\mathfrak{M}$ auftretenden Beträge.

Vorgelegt sei eine absteigende Kette $\mathfrak{U}_n$ ($\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{L}$) von Unterringen von $\mathfrak{L}$ mit den Eigenschaften:

α) $\mathfrak{L}/\mathfrak{U}_n$ ist torsionslos.

β) Für jede in X homogene freie Erzeugung X_n von $\mathfrak{U}_n$ ist $\mathfrak{U}_{n+1}$ homogen bezüglich des durch X_n bestimmten monomialen Kegels $\mathfrak{S}_n$.

γ) $\lim |\mathfrak{U}_n| = 0$ (bezüglich $\mathfrak{S}$).

$\mathfrak{L}_{(m)}$ bezeichne den Modul aller homogenen Elemente vom Grad m in X. Die wichtigsten Beispiele für solche Folgen $\mathfrak{U}_n$ sind

(Z) die absteigende Zentralreihe $\mathfrak{L}^n = \sum_{m \geq n} \mathfrak{L}_{(m)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

(K) die Kommutatorreihe $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^2, (\mathfrak{L}^2)^2, \ldots$.

Es werde hier nur die Gültigkeit der Bedingung β) im Falle (Z) nachgewiesen, da die übrigen Bedingungen für (Z) und (K) ganz offensichtlich erfüllt sind. Man konstruiere eine in X_n homogene Basis A von $\mathfrak{L}^n$, die dann nach Voraussetzung auch in X homogen ist. A enthält daher eine Basis B für den in X homogenen Modul $\mathfrak{L}^{n+1}$, und da A in X_n homogen ist, gilt dasselbe auch für $\mathfrak{L}^{n+1}$.

Satz 11. *Unter den oben genannten Voraussetzungen besitzt $\mathfrak{L}$ eine der Kette $\mathfrak{U}_n$ angepaßte d-Basis B, d.h.*

1. *B enthält eine Basis von $\mathfrak{U}_n$, deren irgendwie totalgeordnetes Komplement mit E_n bezeichnet sei,*

2. *in der durch E_n vermittelten Darstellung $d_{ik}^{\mathfrak{L} \to \mathfrak{U}_n}$ von $\mathfrak{L}$ durch Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{U}_n$ ist*

$$X_n = \bigcup_k d_{0k}^{\mathfrak{L} \to \mathfrak{U}_n}(X)^* \subseteq B$$

*eine freie homogene Erzeugung von $\mathfrak{U}_n$, wobei * Weglassung aller Nullen bedeute.*

Die sich aus der Kommutatorreihe ergebende d-Basis B_K habe ich 1942 in einem Vortrag an der Universität Berlin auf dem Wege über die Darstellung d_{ik} behandelt. Auf direktem Wege (ohne die Darstellung d_{ik}) ist PH. HALL 1950 auf die d-Basis B_Z gekommen, die sich hier aus der absteigenden Zentralreihe ergibt.

Beweis. In folgender Weise werden rekursiv totalgeordnete, in X homogene Relativbasen E_n von $\mathfrak{L}/\mathfrak{U}_n$ konstruiert $(E_0 = \emptyset)$ derart, daß X_n eine freie homogene Erzeugung von $\mathfrak{U}_n$ ist. Hat man E_n schon konstruiert, so ist nach β) $\mathfrak{U}_{n+1}$ bezüglich des durch X_n bestimmten monomialen Kegels homogen. Ist A_τ eine Basis des homogenen Moduls $\mathfrak{U}_{n+1(\tau)}$ $(\tau \in \mathfrak{S}_n)$ und C_τ eine Basis des torsionslosen Moduls $\mathfrak{U}_{n(\tau)}/\mathfrak{U}_{n+1(\tau)}$, wobei in A_τ und C_τ *nach Möglichkeit* Elemente von X_n aufzunehmen sind, so ist $B_n = \bigcup_\tau (A_\tau \cup C_\tau)$ eine bezüglich $\mathfrak{S}_n$ homogene Basis von $\mathfrak{U}_n$, die X_n und eine Basis von $\mathfrak{U}_{n+1}$ enthält. Nun ist $E_{n+1} = E_n \cup \bigcup C_\tau$ sicher eine bezüglich $\mathfrak{S}$ homogene Basis von $\mathfrak{L}/\mathfrak{U}_{n+1}$, für welche nach Satz 10 X_{n+1} eine freie homogene Erzeugung von $\mathfrak{U}_{n+1}$ ist. Damit sind die E_n mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert.

Jetzt werde gezeigt, daß $B = \bigcup E_n$ eine homogene Basis von $\mathfrak{L}$ ist. Für gegebenes $\sigma \in \mathfrak{S}$ gibt es nach γ) ein n derart, daß $|\mathfrak{U}_n|$ keine Beträge $\leq \sigma$ enthält. Daher enthält E_n eine Basis von $\mathfrak{L}_{(s)}$. Da ferner die E_n eine aufsteigende Kette bilden, folgt die lineare Unabhängigkeit von B. Ferner liegt $B - E_n$ nach Konstruktion in $\mathfrak{U}_n$ und muß daher eine Basis von $\mathfrak{U}_n$ sein.

Nun werde $X_n \subseteqq \cup E_n$ nachgewiesen. Aus dem Transitivitätssatz für die Darstellungen d_{ik} folgt

$$X_{n+1} = d_{0k}^{\mathfrak{U}_n \to \mathfrak{U}_{n+1}}(X_n).$$

Dabei ist

$$d_{0k}^{\mathfrak{U}_n \to \mathfrak{U}_{n+1}}(X_n \cap \mathfrak{U}_{n+1}) = X_n \cap \mathfrak{U}_{n+1},$$

folglich

$$X_n \cap \mathfrak{U}_{n+1} \subseteqq X_{n+1}, \quad \text{und auch} \quad X_n \cap \mathfrak{U}_m \subseteqq X_m \qquad (m \geqq n).$$

Wegen γ) gilt nun $\cap \mathfrak{U}_n = 0$, daher liegt ein $x \in X_n$ in einem letzten $\mathfrak{U}_m$ $(m \geqq n)$ und muß demnach zu E_{m+1} gehören. Damit ist Satz 11 bewiesen. —

Von jetzt ab sei $\mathfrak{L}$ als *gewöhnlicher* LIEscher Ring vorausgesetzt, d. h. es liege nicht der p-Fall vor. Außerdem werde angenommen, daß stets $\mathfrak{U}_n^2 \subseteqq \mathfrak{U}_{n+1}$ erfüllt ist, wie z. B. bei den Folgen (Z) und (K). Dann lassen sich aus dem eben Bewiesenen noch einige Folgerungen ziehen. — In der totalen Ordnung der betrachteten d-Basis B sei stets $E_n < E_{n+1}$. Nun gilt:

Satz 12. *Jedes Element einer der Kette $\mathfrak{U}_n$ angepaßten totalgeordneten d-Basis von $\mathfrak{L}$ ist eindeutig ein „kanonisches Produkt"*.

$$p_r = \big(((x \circ b_1) \circ \cdots) \circ b_{r-1}\big) \circ b_r \qquad (r = 0, 1, \ldots;\ p_0 = x \in X)$$

mit $b_1 \leqq \cdots \leqq b_r$ und $p_0 > b_1, \ldots, p_{r-1} > b_r$ (in B), und umgekehrt gehört p_r unter diesen Bedingungen zu B.

Eine totalgeordnete Basis B von $\mathfrak{L}$ mit dieser Eigenschaft werde **kanonisch** genannt.

Der *Beweis* von Satz 12 läßt sich auf mannigfache Weise durch Induktion führen oder indem man sich auf den engen Zusammenhang der Bildung p_r mit dem Prozeß $X \to X_n$ bezieht. Wir wählen folgende Beweisanordnung.

1. Es werde $r > 0$ und $b_r \in E_n$ angenommen und die Umkehrung durch Induktion nach n bewiesen. Von den $b_1, \ldots, b_r$ mögen genau ϱ Elemente in E_0 liegen. Für $\varrho = 0$ ist $b_1 \in \mathfrak{U}_1$, also $x \in \mathfrak{U}_1$ wegen der Bedingung $x > b_1$. Allgemein ist nach Satz 4, (20)

$$y = \big((x \circ b_1) \circ \cdots\big) \circ b_\varrho \in X_1$$

und nach Induktionsvoraussetzung bezüglich $\mathfrak{U}_1/\mathfrak{U}_{n+1}$ ist

$$z = \big((y \circ b_{\varrho+1}) \circ \cdots\big) \circ b_r \in B.$$

2. Es werde $z \in X_{n+1}$ $(n \geqq 0)$ angenommen und die eindeutige Zerlegbarkeit in ein kanonisches Produkt durch Induktion nach n bewiesen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es bezüglich $\mathfrak{U}_1/\mathfrak{U}_{n+1}$ eine eindeutige kanonische Zerlegung

$$z = \big((y \circ b_{\varrho+1}) \circ \cdots\big) \circ b_r \quad \text{mit} \quad y \in X_1,$$

und darin gestattet y bezüglich $\mathfrak{U}_0/\mathfrak{U}_1$, wie früher gezeigt wurde, eine eindeutige kanonische Zerlegung

$$y = \big((x \circ b_1) \circ \cdots\big) \circ b_\varrho.$$

Die hier auftretende Aufspaltung in zwei Schritte läßt sich nicht vermeiden, wie unter 1. gezeigt wurde. Daraus folgt die Eindeutigkeit von $z = p_r$.

In derselben Weise erhält man sofort durch Induktion den

Zusatz. *$b_r \in E^n$ ist gleichbedeutend* mit $p_r \in X^{n+1}$, $p_r \notin X^n$.

Eine einfache Umformung der Definition der kanonischen Basis B führt zu folgender Kennzeichnung von *arithmetischem Charakter*, die hier ohne Beweis angefügt werde.

Satz 13. *Eine totalgeordnete Basis B von $\mathfrak{L}$ ist genau dann kanonisch, wenn folgende drei Bedingungen zugleich erfüllt sind:*

1. *B enthält die freie Erzeugung X von $\mathfrak{L}$ und besteht nur aus Monomen in X.*

2. *Jedes Element aus $B - X$ ist innerhalb B eindeutig zerlegbar in $a \circ b$ mit $a > b$.*

3. *$a \circ b$ mit $a, b \in B$, $a > b$, gehört genau dann zu B, falls $a \in X$ oder*

$$a = a_1 \circ a_2, \quad a_1 > a_2 \leqq b, \quad a_i \in B.$$

§ 5. Beispiele

$\mathfrak{L}$ sei der von x, y erzeugte freie LIEsche Ring über dem Koeffizientenbereich Γ der ganzen Zahlen. p sei eine Primzahl.

1. $\mathfrak{U} = \Gamma(px, py)$ ist frei, obwohl $\mathfrak{L}/\mathfrak{U}$ Torsion hat. Die Freiheit folgt aus der durch $x \to px$, $y \to py$ erzeugten Isomorphie.

2. $\mathfrak{U} = \Gamma(px, py, px \circ y)$ ist nicht frei, da $px \circ y$ im Faktorkommutatorring $\mathfrak{U}/\mathfrak{U}'$ die Ordnung p hat.

3. $\mathfrak{U} = \Gamma(x, py, y + x \circ y)$ ist nicht frei, obwohl $\mathfrak{U}/\mathfrak{U}'$ keine Torsion hat. Dies soll bewiesen werden. Wegen

$$p \cdot (y + x \circ y) = py + x \circ py \equiv py \bmod \mathfrak{U}'$$

wird $\mathfrak{U}/\mathfrak{U}'$ linear von x, $y + x \circ y$ erzeugt und ist daher torsionslos.

Angenommen, $\mathfrak{U}$ wäre ein freier Unterring. Dann müßte $\mathfrak{U}$ von zwei Elementen A, B erzeugt werden, weil rational gerechnet $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{L}$ zusammenfällt. Durch etwaige unimodulare Ersetzung von A, B läßt sich erreichen, daß deren Leitglieder (homogene Glieder höchsten Grades) linear unabhängig sind. Nun sieht man, daß A und B vom Grad 1 sind, denn sonst wäre nicht x und py in $\Gamma(A, B)$ enthalten. Da $y + x \circ y$ nicht der additiven Gruppe (x, py) angehört, gilt die Modulrelation

$$(x, y) \geqq (A, B) > (x, py).$$

Nun ist $(x, y)/(x, py)$ einfach, folglich $(A, B) = (x, y)$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}$, was aber sicher mod $p\mathfrak{L}$ falsch ist.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 26. März 1955)

EBEL, I.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 217—228 (1956)

Analytische Bestimmung der Darstellungsanzahlen natürlicher Zahlen durch spezielle ternäre quadratische Formen mit Kongruenzbedingungen

Von
ILSE EBEL

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden nach den Methoden von H. PETERSSON [1] Darstellungsanzahlen natürlicher Zahlen durch spezielle ternäre quadratische Formen mit Kongruenzbedingungen für die ganzzahligen Variablen ermittelt. Die behandelten Fälle sind in dem folgenden Schema enthalten:

Form	Kongruenzbedingungen
$Q_1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$	(a) $n_1 \equiv 0 \bmod 4,\ n_2 \equiv 0 \bmod 4,\ n_3 \equiv 1 \bmod 4,$ (b) $n_1 \equiv 1 \bmod 4,\ n_2 \equiv 2 \bmod 4,\ n_3 \equiv 2 \bmod 4,$
$Q_2 = 3n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$	(c) $n_1 \equiv 0 \bmod 2,\ n_2 \equiv 0 \bmod 6,\ n_3 \equiv 1 \bmod 6,$ (d) $n_1 \equiv 1 \bmod 2,\ n_2 \equiv 1 \bmod 6,\ n_3 \equiv 3 \bmod 6,$ (e) $n_1 \equiv 0 \bmod 2,\ n_2 \equiv 2 \bmod 6,\ n_3 \equiv 3 \bmod 6,$ (f) $n_1 \equiv 0 \bmod 2,\ n_2 \equiv 0 \bmod 6,\ n_3 \equiv 2 \bmod 6,$ (g) $n_1 \equiv 1 \bmod 2,\ n_2 \equiv 0 \bmod 6,\ n_3 \equiv 1 \bmod 6,$ (h) $n_1 \equiv 1 \bmod 2,\ n_2 \equiv 2 \bmod 6,\ n_3 \equiv 3 \bmod 6.$

Die Untersuchung verläuft ähnlich wie in den von H. MAASS [2] behandelten Fällen.

Der Ansatz benutzt die einfachen Theta-Reihen

$$(1) \qquad \vartheta_\lambda(\tau, h, N) = \sum_{m \equiv h \bmod N} m^\lambda e^{\frac{\pi i m^2 \tau}{N}}, \quad \lambda = 0 \text{ oder } 1,$$

die in [3] untersucht worden sind. Gewisse Produkte je dreier solchen Reihen mit $\lambda = 0$ liefern die erzeugenden Potenzreihen für die gesuchten Anzahlfunktionen. Die Bestimmung der Darstellungsanzahlen beruht auf dem klassischen Verfahren, nach dem sich jede ganze Modulform (hier die erwähnten Produkte von Theta-Reihen) mit Hilfe von Reihen vom Eisensteinschen Typ additiv auf eine ganze Spitzenform reduzieren läßt. Die benötigten Eisenstein-Reihen ergeben sich aus dem allgemeinen Ansatz (vgl. [1])

$$(2) \qquad \varphi(\tau, s) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)} \frac{1}{\sigma(A, L)\, v(L)\, (m_1\tau + m_2)^r\, |m_1\tau + m_2|^s}$$

durch Anwendung des Heckeschen Summationsverfahrens.

Die in den behandelten Fällen vorliegende funktionentheoretische Situation ist vollständig übersehbar und sehr einfach: Für alle acht auftretenden

Produkte aus Theta-Reihen (1) ist die genaue Transformationsgruppe bekannt. Daraus ergibt sich die Kenntnis der jeweils zugehörigen Eisenstein-Reihe (2) und die Möglichkeit, ihre Fourier-Koeffizienten durch Klassenzahlen imaginär-quadratischer Körper auszudrücken. Es zeigt sich andererseits, daß die ganzen Spitzenformen, zu denen man durch die oben genannte klassische Reduktion gelangt, einer jeweils eingliedrigen, durch eine Theta-Reihe (1) mit $\lambda = 1$ aufgespannten Schar angehören. Damit liegt hier der äußerst ungewöhnliche Fall vor, daß die Fourier-Koeffizienten der Spitzenformen ein sehr viel einfacheres Bildungsgesetz befolgen als die der Eisenstein-Reihen.

Zur Durchführung der Untersuchung werden zunächst in § 1 die auftretenden Formenklassen, Multiplikatorsysteme, Spitzen (eines Fundamentalbereiches) und Drehreste, die aus Theta-Reihen (1) gebildeten Formen und die zu den Spitzen mit verschwindendem Drehrest gehörigen Ansätze (2) zusammengestellt. § 2 enthält die Behandlung der Reihen (2) nach dem Heckeschen Summationsverfahren, welches die Nullwerte $\varphi(\tau, 0; v, \zeta)$ (v Multiplikatorsystem, ζ rationale Spitze) dieser Reihen als ganze Modulformen in τ erscheinen läßt und zugleich deren Fourier-Koeffizienten durch Klassenzahlen imaginär-quadratischer Körper auszudrücken lehrt. Danach lassen sich (§ 3) leicht die zwischen den Formen bestehenden linearen Relationen angeben, die schließlich die gesuchten Ausdrücke für die Darstellungsanzahlen liefern.

Diese Ausdrücke enthalten in dem Spezialfall, daß die darzustellende natürliche Zahl n ein Quadrat ist, nur noch elementare Funktionen, weil dann Diskriminante, Klassenzahl und Einheitswurzelanzahl des eingehenden quadratischen Zahlkörpers sofort angebbar sind.

Im allgemeinen, d.h. stets dann, wenn n kein Quadrat ist, fallen die von den Theta-Reihen (1) mit $\lambda = 1$ herrührenden Zusatzglieder in den Ausdrücken für die Darstellungsanzahlen fort. Die Darstellungsanzahlen werden dann rein durch die Koeffizienten der Eisenstein-Reihen gegeben. Damit ist für die Nicht-Quadratzahlen n die Situation hier die gleiche, wie sonst für alle natürlichen n in den Fällen, in denen die auftretenden Formenscharen keine nicht identisch verschwindenden Spitzenformen enthalten.

Die vorliegende Untersuchung wurde von Herrn K. WOHLFAHRT in Münster durchgesehen und zum Druck vorbereitet. Von ihm stammen die zusätzlichen Bemerkungen am Schluß der Arbeit (nach der Zusammenstellung der Formeln für die Darstellungsanzahlen A, B).

§ 1

I. Die Linearschar der ganzen Modulformen $\{\Gamma_0[8], -\frac{3}{2}, v_0\}$ mit

$$v_0(L) = e^{\frac{\pi i}{4}} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* e^{\frac{\pi i}{4}\delta(\beta-1)} \quad \text{für} \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0[8]$$

hat den Rang 2. Die Drehreste $\varkappa$ in den Spitzen ζ eines Fundamentalbereiches von $\Gamma_0[8]$ sind

ζ	∞	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\varkappa$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$\{\Gamma_0[8], -\frac{3}{2}, v_0\}$ enthält die ganzen Modulformen

$$\vartheta_1(\tau, 1, 4),$$

$$\Theta_0\left(\tau \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}\right) = \vartheta_0^2(\tau, 0, 4)\,\vartheta_0(\tau, 1, 4),$$

$$\Theta_0\left(\tau \middle| \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}\right) = \vartheta_0(\tau, 1, 4)\,\vartheta_0^2(\tau, 2, 4),$$

deren erste mit $\eta^3(\tau) = \sqrt[8]{\Delta(\tau)}$ übereinstimmt, wie man etwa aus der Jacobischen Identität findet.

Zur Spitze $\zeta = 0$ ergibt sich aus (2) der Ansatz

$$\varphi(\tau, s; v_0, 0) = 2 \sum_{\substack{m_1 > 0,\ m_1 \equiv 1 \bmod 2 \\ (m_1, m_2) = 1}} \left(\frac{m_2}{m_1}\right) \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}(m_1 m_2 + m_1 + 1)}}{(m_1\tau + m_2)^{\frac{3}{2}} |m_1\tau + m_2|^s}.$$

II. Die Linearschar der ganzen Modulformen $\{\Gamma_0[12], -\frac{3}{2}, v_1\}$ mit

$$v_1(L) = e^{\frac{\pi i}{4}} \left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)_* e^{\frac{\pi i}{12}\delta(2\beta - 3)} \quad \text{für} \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0[12]$$

hat den Rang 3. Die Drehreste $\varkappa$ in den Spitzen ζ eines Fundamentalbereiches von $\Gamma_0[12]$ sind

ζ	∞	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\varkappa$	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

$\{\Gamma_0[12], -\frac{3}{2}, v_1\}$ enthält die ganzen Formen

$$\vartheta_1(\tau, 1, 6),$$

$$\Theta_0\left(\tau \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \vartheta_0(\tau, 0, 2)\,\vartheta_0(\tau, 0, 6)\,\vartheta_0(\tau, 1, 6),$$

$$\Theta_0\left(\tau \middle| \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \vartheta_0(\tau, 1, 2)\,\vartheta_0(\tau, 1, 6)\,\vartheta_0(\tau, 3, 6),$$

$$\Theta_0\left(\tau \middle| \begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \vartheta_0(\tau, 0, 2)\,\vartheta_0(\tau, 2, 6)\,\vartheta_0(\tau, 3, 6),$$

deren erste eine Spitzenform ist.

Zur Spitze $\zeta = 0$ ergibt sich aus (2) der Ansatz:

$$\varphi(\tau, s; v_1, 0) = 2 \sum_{\substack{m_1 > 0,\ m_1 \equiv \pm 1 \bmod 6 \\ (m_1, m_2) = 1}} \left(\frac{2m_2}{m_1}\right) \frac{e^{-\frac{\pi i}{12}(2m_1 m_2 + 3m_1 + 3)}}{(m_1\tau + m_2)^{\frac{3}{2}} |m_1\tau + m_2|^s}$$

und zur Spitze $\zeta = \frac{1}{2}$:

$$\varphi\left(\tau, s; v_1, \frac{1}{2}\right) = 2 \sum_{\substack{m_1 > 0,\ m_1 \equiv \pm 2 \bmod 12 \\ (m_1, m_2) = 1}} \left(\frac{m_2}{\frac{1}{3}m_1}\right) \frac{e^{-\frac{\pi i}{24}(m_1 m_2 + 3m_1 + 8)}}{(m_1\tau + m_2)^{\frac{3}{2}} |m_1\tau + m_2|^s}.$$

III. Die entsprechenden Angaben für $\{\Gamma_0[12], -\frac{3}{2}, v_2\}$ mit

$$v_2(L) = e^{\frac{\pi i}{4}} \left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)_* e^{\frac{\pi i}{12}\delta(8\beta-3)} \quad \text{für} \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0[12]$$

lauten: Rang der Linearschar $=3$,

ζ	∞	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\varkappa$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

$\vartheta_1(\tau, 2, 6)$, (Spitzenform),

$$\Theta_0\left(\tau \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \vartheta_0(\tau, 0, 2)\,\vartheta_0(\tau, 0, 6)\,\vartheta_0(\tau, 2, 6),$$

$$\Theta_0\left(\tau \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \vartheta_0(\tau, 1, 2)\,\vartheta_0(\tau, 0, 6)\,\vartheta_0(\tau, 1, 6),$$

$$\Theta_0\left(\tau \middle| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \vartheta_0(\tau, 1, 2)\,\vartheta_0(\tau, 2, 6)\,\vartheta_0(\tau, 3, 6),$$

$$\varphi(\tau, s; v_2, 0) = 2 \sum_{\substack{m_1 > 0,\ m_1 \equiv \pm 1 \bmod 6 \\ (m_1, m_2) = 1}} \left(\frac{2m_2}{m_1}\right) \frac{e^{-\frac{\pi i}{12}(8m_1m_2 + 3m_1 + 3)}}{(m_1\tau + m_2)^{\frac{3}{2}} |m_1\tau + m_2|^s},$$

$$\varphi\left(\tau, s; v_2, \frac{1}{4}\right) = 2 \sum_{\substack{m_2 > 0,\ m_1 \equiv \pm 4 \bmod 12 \\ (m_1, m_2) = 1}} \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) \frac{e^{-\frac{\pi i}{12}(2m_1m_2 + 9m_2 - 1)}}{(m_1\tau + m_2)^{\frac{3}{2}} |m_1\tau + m_2|^s}.$$

§ 2

Die auftretenden Reihen $\varphi(\tau, s; v, \zeta)$ haben die Gestalt

$$\varphi(\tau, s; v, \zeta) = 2 \sum_{\substack{m_1 \in \mathfrak{M} \\ (m_1, m_2) = 1}} \frac{\varepsilon(m_1, m_2)}{(m_1\tau + m_2)^r |m_1\tau + m_2|^s},$$

wo $\mathfrak{M}$ eine gewisse Menge natürlicher Zahlen ist und

$$\varepsilon(m_1, m_2 + t m_1) = \varepsilon(m_1, m_2)$$

mit einer natürlichen Zahl t gilt, die als minimal mit dieser Eigenschaft angenommen werden mag und dann eindeutig durch ε bestimmt ist. Mit Hilfe der Formel

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+\omega)^r |m+\omega|^s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n x}\, dx}{(x+\omega)^r |x+\omega|^s}, \qquad \Im\mathfrak{m}\,\omega > 0,$$

gewinnt man daraus die Entwicklung

$$\varphi(\tau, s; v, \zeta) = \frac{2}{t^{r+s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(s; \mathfrak{M}, \varepsilon)\, A_n\left(s, \frac{\tau}{t}\right),$$

wo

$$A_n(s, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n x}\, dx}{(x+\omega)^r\, |x+\omega|^s},$$

$$T_n(s; \mathfrak{M}, \varepsilon) = \sum_{m \in \mathfrak{M}} \frac{1}{m^{r+s}} \sum_{\substack{j \bmod tm \\ (j,m)=1}} \varepsilon(m, j)\, e^{\frac{2\pi i n j}{tm}}$$

ist.

Hier braucht nur der Fall $r = \frac{3}{2}$ betrachtet zu werden. Dann gilt nach [2]:

1. $A_n(s, \omega)$ ist ganze Funktion in s für $n \neq 0$,

2. $A_0(s, \omega)$ ist regulär für $\Re e\, s > -\frac{1}{2}$,

3. $A_n(s, \omega) = O(e^{-\delta |n|})$ für $|n| \to \infty$ mit passendem $\delta > 0$, gleichmäßig in s, wenn s in einem beschränkten Bereich variiert, und

4. $$A_n(0, \omega) = \begin{cases} 0, \text{ falls } n \leqq 0, \\ \dfrac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3\pi i}{4}}\, n^{\frac{1}{2}}\, e^{2\pi i n \omega}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}, \text{ falls } n > 0. \end{cases}$$

Die in $T_n(s; \mathfrak{M}, \varepsilon)$ auftretenden Summen über j lassen sich auf das Symbol

$$K(m, n) = e^{\frac{\pi i}{4}(m-1)} \sum_{\substack{j \bmod m \\ (j,m)=1}} \left(\frac{j}{m}\right) e^{\frac{2\pi i n j}{m}}$$

zurückführen, welches für positive, ganze, ungerade m und ganze n erklärt ist und

$$K(m_1 m_2, n) = K(m_1, n)\, K(m_2, n) \quad \text{für} \quad (m_1, m_2) = 1$$

erfüllt. Überdies besitzt $K(m, n)$ die folgenden Werte, wenn m eine ungerade Primzahlpotenz ist (vgl. [1]):

$$K(p^\nu, n) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad p^{\nu-1} \nmid n, \\ p^{\nu-\frac{1}{2}} \left(\dfrac{2n}{p^{\nu-1}}\right), & \text{falls} \quad p^{\nu-1} \mid n,\ p^\nu \nmid n,\ \nu \equiv 1 \bmod 2, \\ 0, & \text{falls} \quad p^{\nu-1} \mid n,\ p^\nu \mid n,\ \nu \equiv 1 \bmod 2, \\ -p^{\nu-1}, & \text{falls} \quad p^{\nu-1} \mid n,\ p^\nu \nmid n,\ \nu \equiv 0 \bmod 2, \\ \varphi(p^{\nu-1}), & \text{falls} \quad p^{\nu-1} \mid n,\ p^\nu \mid n,\ \nu \equiv 0 \bmod 2. \end{cases}$$

Die Reduktion liefert in den fünf betrachteten Fällen:

1. $\mathfrak{M} = \{m \mid m > 0,\ m \equiv 1 \bmod 2\},\ t = 8$:

$$\sum_{\substack{j \bmod 8m \\ (j,m)=1}} \left(\frac{j}{m}\right) e^{-\frac{\pi i}{4}(mj+m+1)+\frac{2\pi i n j}{8m}} = \begin{cases} 8\, e^{\frac{3\pi i}{2}} \left(\frac{-2}{m}\right) K(m,n), \\ \qquad\qquad \text{falls } n \equiv 1 \bmod 8, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

2. $\mathfrak{M} = \{m \mid m > 0,\ m \equiv \pm 1 \bmod 6\},\ t = 12$:

$$\sum_{\substack{j \bmod 12m \\ (j,m)=1}} \left(\frac{2j}{m}\right) e^{-\frac{\pi i}{12}(2mj+3m+3)+\frac{2\pi i n j}{12m}} = \begin{cases} 12\, e^{\frac{3\pi i}{2}} \left(\frac{-6}{m}\right) K(m,n), \\ \qquad\qquad \text{falls } n \equiv 1 \bmod 12, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

3. $\mathfrak{M} = \{m \mid m > 0,\ m \equiv \pm 2 \bmod 12\},\ t = 12$:

$$\sum_{\substack{j \bmod 12m \\ (j,m)=1}} \left(\frac{j}{\frac{1}{2}m}\right) e^{-\frac{\pi i}{24}(mj+3m+8)+\frac{2\pi i n j}{12m}} = \begin{cases} 12\,(-1)^{\frac{n-1}{4}}\, e^{-\frac{7\pi i}{12}} \left(\frac{-6}{\frac{1}{2}m}\right) K\left(\frac{m}{2}, n\right), \\ \qquad\qquad \text{falls } n \equiv 1 \bmod 12, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

4. $\mathfrak{M} = \{m \mid m > 0,\ m \equiv \pm 1 \bmod 6\},\ t = 3$:

$$\sum_{\substack{j \bmod 3m \\ (j,m)=1}} \left(\frac{2j}{m}\right) e^{-\frac{\pi i}{12}(8mj+3m+3)+\frac{2\pi i n j}{3m}} = \begin{cases} 3\, e^{\frac{3\pi i}{2}} \left(\frac{-6}{m}\right) K(m,n), \\ \qquad\qquad \text{falls } n \equiv 1 \bmod 3, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

5. $\mathfrak{M} = \{m \mid m > 0,\ m \equiv \pm 4 \bmod 12\},\ t = 6$:

Es sei $m = 2^h \cdot m_0,\ m_0 \equiv \pm 1 \bmod 6,\ h \geq 2$:

$$\sum_{\substack{j \bmod 6m \\ (j,m)=1}} \left(\frac{2m}{j}\right) e^{-\frac{\pi i}{12}(2mj+9j-1)+\frac{2\pi i n j}{6m}} = (-1)^{h+1} \cdot 2^h \cdot 3 \cdot e^{\frac{\pi i}{12}} \left(\frac{-3}{m_0}\right) K(m_0, n)\, \Delta(h,n).$$

Dabei ist für ganze h, n und $h \geq 2$

$$\Delta(h,n) = \delta\left(\frac{n+1}{3}\right) \delta\left(\frac{B+h+1}{2}\right) \cos\frac{B\pi}{4},$$

$$B = B(h,n) = \frac{n}{2^{h-2}} - 1,$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \text{ ganz rational,} \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

$\Delta(h, n)$ verschwindet daher für ungerade n. Die Summen

$$H_n(s) = \sum_{h \geq 2} \frac{(-1)^{h+1} \Delta(h, n)}{2^{h(\frac{1}{2}+s)}}, \quad n \text{ ganz},$$

sind nur formal unendlich, da die $h \geq 2$, für die $\Delta(h, n) \neq 0$, eine nur von n abhängige obere Schranke besitzen.

In den genannten fünf Fällen ergeben sich nun die Produktentwicklungen:

1. $$T_n(s; \mathfrak{M}, \varepsilon) = 8 e^{\frac{3\pi i}{2}} \prod_{p>2} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{p^\nu} \right) \frac{K(p^\nu, n)}{p^{\nu(\frac{3}{2}+s)}} \right), \qquad n \equiv 1 \bmod 8,$$

2. $$T_n(s; \mathfrak{M}, \varepsilon) = 12 e^{\frac{3\pi i}{2}} \prod_{p>3} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-6}{p^\nu} \right) \frac{K(p^\nu, n)}{p^{\nu(\frac{3}{2}+s)}} \right), \qquad n \equiv 1 \bmod 12,$$

3. $$T_n(s; \mathfrak{M}, \varepsilon) = \frac{12}{2^{\frac{1}{2}+s}} e^{-\frac{7\pi i}{12}} (-1)^{\frac{n-1}{4}} \prod_{p>3} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-6}{p^\nu} \right) \frac{K(p^\nu, n)}{p^{\nu(\frac{3}{2}+s)}} \right), \qquad n \equiv 1 \bmod 12,$$

4. $$T_n(s; \mathfrak{M}, \varepsilon) = 3 e^{\frac{3\pi i}{2}} \prod_{p>3} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-6}{p^\nu} \right) \frac{K(p^\nu, n)}{p^{\nu(\frac{3}{2}+s)}} \right), \qquad n \equiv 1 \bmod 3,$$

5. $$T_n(s; \mathfrak{M}, \varepsilon) = 3 e^{\frac{\pi i}{12}} H_n(s) \prod_{p>3} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{p^\nu} \right) \frac{K(p^\nu, n)}{p^{\nu(\frac{3}{2}+s)}} \right), \qquad n \equiv -1 \bmod 3.$$

Im letzten Fall kann man wegen $H_n(s) = 0$ für $n \equiv 1 \bmod 2$ $2n$ statt n schreiben und findet wegen

$$\left(\frac{2}{p^\nu} \right) K(p^\nu, 2n) = K(p^\nu, n) \quad \text{für} \quad p > 2:$$

$$T_{2n}(s; \mathfrak{M}, \varepsilon) = 3 e^{\frac{\pi i}{12}} H_{2n}(s) \prod_{p>3} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-6}{p^\nu} \right) \frac{K(p^\nu, n)}{p^{\nu(\frac{3}{2}+s)}} \right), \qquad n \equiv 1 \bmod 3.$$

In dem Produkt

$$P_n(s) = \prod_{p>2} \psi_p^{(n)}(s), \qquad \psi_p^{(n)}(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{p^\nu} \right) \frac{K(p^\nu, n)}{p^{\nu(\frac{1}{2}+s)}},$$

sind die Faktoren $\psi_p^{(n)}(s)$ mit $p > 2$, $p \nmid n$:

$$\psi_p^{(n)}(s) = \frac{1 - p^{-(2+2s)}}{1 - \left(\frac{d}{p} \right) p^{-(1+s)}}, \qquad d = d(-n),$$

wo d die Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers $\mathsf{P}(\sqrt{-n})$ bedeutet. Daher ist

$$P_n(s) = \frac{L(1+s, \chi_d)}{\zeta(2+2s)} U_n(s),$$

wo $L(s,\chi)$ die Dirichletsche L-Reihe zum (eigentlichen) Charakter χ, χ_d denjenigen Charakter, der für positive Argumente x mit $\left(\frac{d}{x}\right)$ übereinstimmt, und $\zeta(s)$ die ζ-Funktion des rationalen Zahlkörpers bedeuten. Dabei ist $U_n(s)$ das endliche Produkt

$$U_n(s) = \frac{1-\left(\frac{d}{2}\right)2^{-(1+s)}}{1-2^{-(2+2s)}} \prod_{\substack{p>2\\ p|d}} \frac{\psi_p^{(n)}(s)}{1-p^{-(2+2s)}} \prod_{\substack{p>2\\ p|n\\ p\nmid d}} \frac{\psi_p^{(n)}(s)}{1+\left(\frac{d}{p}\right)p^{-(1+s)}}, \qquad d = d(-n),$$

mit

$$\frac{\psi_p^{(n)}(s)}{1-p^{-(2+2s)}} = \sum_{\nu=0}^{\frac{h-1}{2}} p^{-\nu(1+2s)} \qquad \text{für} \quad p>2,\ p|d,$$

$$\frac{\psi_p^{(n)}(s)}{1+\left(\frac{d}{p}\right)p^{-(1+s)}} = \left(1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-(1+s)}\right)\sum_{\nu=0}^{\frac{h}{2}-1} p^{-\nu(1+2s)} + p^{-\frac{h}{2}(1+2s)}$$

$$\text{für} \quad p>2,\ p|n,\ p\nmid d,$$

wo h durch $p^h|n$, $p^{h+1}\nmid n$ bestimmt ist.

Das andere Produkt

$$Q_n(s) = \prod_{p>3}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{-6}{p^\nu}\right)\frac{K(p^\nu,n)}{p^{\nu(\frac{1}{2}+s)}}\right),$$

welches nur für $(n,3)=1$ auftritt, läßt sich wegen

$$\left(\frac{3}{p^\nu}\right)K(p^\nu,n) = K(p^\nu,3n), \qquad p>3,$$

auf $P_n(s)$ zurückführen, wobei man findet

$$Q_n(s) = \frac{L(1+s,\chi_d)}{\zeta(2+2s)} \cdot \frac{U_{3n}(s)}{1-3^{-(2+2s)}}, \qquad (n,3)=1,$$

wo aber jetzt $d=d(-3n)$ in χ_d zu verstehen ist.

Beachtet man, daß in allen hier betrachteten Fällen nur solche n auftreten, für die $d\neq 1$ ist, so folgt, daß sämtliche L-Reihen im Punkte $s=0$ regulär sind. Ferner gilt ersichtlich etwa für

$$-\tfrac{1}{4} \leq \Re s \leq 1,$$
$$-1 \leq \Im s \leq 1$$

gleichmäßig in s:

$$T_n(s;\mathfrak{M},\varepsilon) = O(|n|^\varkappa), \qquad (|n|\to\infty),$$

mit einer geeigneten Konstanten $\varkappa>0$. Im Fall 5. oben beachte man dazu $H_{2n}(s) = O(\log|n|)$. In Verbindung mit den O-Abschätzungen für die $A_n(s,\omega)$ ergibt sich, daß sämtliche Funktionen $\varphi(\tau,s;v,\zeta)$ bei $s=0$ regulär sind. Damit ist die analytische Fortsetzung geleistet.

Die Koeffizienten der Nullwerte $\varphi(\tau, 0; v, \zeta)$ wachsen nur wie eine feste Potenz von n. Daher wachsen diese Funktionen bei Annäherung an die reelle Achse gleichmäßig in x $(\tau = x + iy)$ nur wie eine feste Potenz von y, woraus geschlossen werden kann, daß sie ganze Modulformen der Schar $\{\Gamma_0[8], -\frac{3}{2}, v_0\}$ bzw. der Schar $\{\Gamma_0[12], -\frac{3}{2}, v_\mu\}$ $(\mu = 1$ oder $2)$ sind.

Unter Einführung der Klassenzahl $h(d)$ des Körpers $\mathsf{P}(\sqrt{d})$ vermittels

$$L(1, \chi_d) = \frac{2\pi h(d)}{w\sqrt{|d|}}, \qquad d < 0,$$

wo w die Anzahl der Einheitswurzeln in diesem Körper bedeutet, mit der Abkürzung

$$B_n(d) = \frac{6h(d)}{w\sqrt{|d|}}\sqrt{n}, \qquad n > 0,$$

und nach einer Änderung der konstanten Vorfaktoren lauten die Fourier-Entwicklungen dieser Nullwerte, die jetzt mit

$$\varphi(\tau; v, \zeta) = \text{const} \cdot \varphi(\tau, 0; v, \zeta)$$

bezeichnet werden, folgendermaßen:

1. $$\varphi(\tau; v_0, 0) = \sum_{n>0,\, n \equiv 1 \bmod 8} B_n(d)\, U(n)\, e^{\frac{2\pi i n \tau}{8}}, \qquad d = d(-n),$$

2. $$\varphi(\tau; v_1, 0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \sum_{n>0,\, n \equiv 1 \bmod 12} B_n(d)\, U(3n)\, e^{\frac{2\pi i n \tau}{12}}, \qquad d = d(-3n),$$

3. $$\varphi(\tau; v_1, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \sum_{n>0,\, n \equiv 1 \bmod 12} (-1)^{\frac{n-1}{4}} B_n(d)\, U(3n)\, e^{\frac{2\pi i n \tau}{12}}, \qquad d = d(-3n),$$

4. $$\varphi(\tau; v_2, 0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \sum_{n>0,\, n \equiv 1 \bmod 3} B_n(d)\, U(3n)\, e^{\frac{2\pi i n \tau}{3}}, \qquad d = d(-3n),$$

5. $$\varphi(\tau; v_2, \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \sum_{n>0,\, n \equiv 1 \bmod 3} \sqrt{2}\, H(2n)\, B_n(d)\, U(3n)\, e^{\frac{2\pi i n \tau}{3}}, \qquad d = d(-3n).$$

Dabei wurden die Nullwerte der Funktionen $H_n(s)$, $U_n(s)$ durch

$$H(n) = H_n(0), \qquad U(n) = U_n(0)$$

bezeichnet. Die Summen $H_n(0)$ lassen sich nun in geschlossener Form darstellen. Schreibt man nämlich für $n \equiv -1 \bmod 3$

$$\sqrt{8}\, H_n(0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Delta(3 + 2\nu, n)}{2^\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\,\Delta(2 + 2\nu, n)}{2^\nu}$$

und sind zu n die natürlichen Zahlen n_0, σ erklärt durch

$$n = 4^\sigma \cdot n_0, \qquad 4 \nmid n_0,$$

so ergibt sich

$$\sqrt{2}\,H(n) = \delta\left(\frac{n-2}{6}\right)\left[\frac{\varrho(n_0)}{2^{\sigma+1}} - 1\right]$$

mit

$$\varrho(n_0) = \delta\left(\frac{n_0-2}{8}\right)(-1)^{\frac{n_0-2}{8}} - \delta\left(\frac{n_0}{2}\right)\left(\frac{2}{n_0-1}\right) - 2(-1)^{n_0} + 4.$$

$\varrho(n_0)$ hängt nur ab von der Restklasse n_0 mod 16, und zwar nach dem Schema

$n_0 \bmod 16$	1	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15
$\varrho(n_0)$	6	2	6	6	3	6	6	0	6	6	3	6

§ 3

Die in § 1 genannten linearen Scharen ganzer Modulformen lassen sich jetzt beziehungsweise erzeugen

$S[\{\Gamma_0[8], -\frac{3}{2}, v_0\}]$ durch $\varphi(\tau; v_0, 0)$ und $\vartheta_1(\tau, 1, 4)$,

$S[\{\Gamma_0[12], -\frac{3}{2}, v_1\}]$ durch $\varphi(\tau; v_1, 0)$, $\varphi(\tau; v_1, \frac{1}{2})$ und $\vartheta_1(\tau, 1, 6)$,

$S[\{\Gamma_0[12], -\frac{3}{2}, v_2\}]$ durch $\varphi(\tau; v_2, 0)$, $\varphi(\tau; v_2, \frac{1}{4})$ und $\vartheta_1(\tau, 2, 6)$.

Die Berechnung der ersten zwei bzw. drei Koeffizienten liefert dann für die übrigen in § 1 genannten Formen die Darstellungen

$$2\Theta_0\left(\tau \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix} \right.\right) = \varphi(\tau; v_0, 0) + \vartheta_1(\tau, 1, 4),$$

$$2\Theta_0\left(\tau \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix} \right.\right) = \varphi(\tau; v_0, 0) - \vartheta_1(\tau, 1, 4),$$

$$2\Theta_0\left(\tau \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix} \right.\right) = \varphi(\tau; v_1, 0) + \vartheta_1(\tau, 1, 6),$$

$$2\Theta_0\left(\tau \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix} \right.\right) = \varphi(\tau; v_1, 0) - \varphi(\tau; v_1, \tfrac{1}{2}),$$

$$2\Theta_0\left(\tau \left| \begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix} \right.\right) = \varphi(\tau; v_1, 0) - \vartheta_1(\tau, 1, 6),$$

$$2\Theta_0\left(\tau \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix} \right.\right) = 2\varphi(\tau; v_2, 0) - 2\varphi(\tau; v_2, \tfrac{1}{4}),$$

$$2\Theta_0\left(\tau \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix} \right.\right) = 2\varphi(\tau; v_2, 0) + \vartheta_1(\tau, 2, 6),$$

$$2\Theta_0\left(\tau \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix} \right.\right) = 2\varphi(\tau; v_2, 0) - \vartheta_1(\tau, 2, 6).$$

Aus ihnen ergeben sich durch Vergleich der Koeffizienten auf beiden Seiten die folgenden Darstellungssätze, in denen $A\left(n \middle| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix}\right)$ die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl n durch die Form $Q_1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ mit den Nebenbedingungen $n_i \equiv a_i \bmod k_i$ und $B\left(n \middle| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix}\right)$ die entsprechenden Anzahlen für die Form $Q_2 = 3n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ bedeuten:

$$2A\left(n \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}\right) = \delta\left(\frac{n-1}{8}\right)\left\{B_n(d)\ U(n) + \delta\left(\sqrt{n}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right\},$$

$$2A\left(n \middle| \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}\right) = \delta\left(\frac{n-1}{8}\right)\left\{B_n(d)\ U(n) - \delta\left(\sqrt{n}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right\},$$

$$(d = d(-n)).$$

$$2B\left(n \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \delta\left(\frac{n-1}{12}\right)\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ B_n(d)\ U(3n) + \delta\left(\sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\sqrt{n}\right\},$$

$$2B\left(n \middle| \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \delta\left(\frac{n-13}{24}\right)\sqrt{3}\ B_n(d)\ U(3n),$$

$$2B\left(n \middle| \begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \delta\left(\frac{n-1}{12}\right)\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ B_n(d)\ U(3n) - \delta\left(\sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\sqrt{n}\right\},$$

$$(d = d(-3n)).$$

$$2B\left(4n \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \delta\left(\frac{n-1}{3}\right)\sqrt{3}\left(1 - \sqrt{2}H(2n)\right) B_n(d)\ U(3n),$$

$$2B\left(4n \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \delta\left(\frac{n-1}{3}\right)\left\{\sqrt{3}\,B_n(d)\ U(3n) + \delta\left(\sqrt{n}\right)\cdot 2\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\sqrt{n}\right\},$$

$$2B\left(4n \middle| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = \delta\left(\frac{n-1}{3}\right)\left\{\sqrt{3}\,B_n(d)\ U(3n) - \delta\left(\sqrt{n}\right)\cdot 2\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\sqrt{n}\right\},$$

$$(d = d(-3n)).$$

Ist insbesondere $n = m^2$ ein Quadrat $(m > 0)$, so sind die auftretenden Diskriminanten $d = d(-n)$ bzw. $d = d(-3n)$, Klassenzahlen $h(d)$ und Einheitswurzelanzahlen w explizit angebbar und unabhängig von n. Dann spezialisieren sich die Formeln für die Darstellungsanzahlen $A\left(n \middle| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix}\right)$ und $B\left(n \middle| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix}\right)$ zu den folgenden Ausdrücken, in denen nun nur noch elementare Funktionen auftreten:

$n = m^2 \equiv 1 \bmod 8$:

$$2A\left(m^2 \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}\right) = m\left\{\tfrac{3}{4}\,U(m^2) + \left(\frac{-1}{m}\right)\right\},$$

$$2A\left(m^2 \middle| \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}\right) = m\left\{\tfrac{3}{4}\,U(m^2) - \left(\frac{-1}{m}\right)\right\}.$$

$n = m^2 \equiv 1 \bmod 12$:

$$2B\left(m^2 \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{matrix}\right) = m\left\{\tfrac{1}{2}U(3m^2) + \left(\frac{m}{3}\right)\right\},$$

$$2B\left(m^2 \middle| \begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = m\left\{\tfrac{1}{2}U(3m^2) - \left(\frac{m}{3}\right)\right\}.$$

$n = m^2 \equiv 1 \bmod 3$:

$$2B\left(4m^2 \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = m\,U(3m^2)\left(1 - \sqrt{2}\,H(2m^2)\right),$$

$$2B\left(4m^2 \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = m\left\{U(3m^2) + 2\left(\frac{m}{3}\right)\right\},$$

$$2B\left(4m^2 \middle| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = m\left\{U(3m^2) - 2\left(\frac{m}{3}\right)\right\}.$$

Ist andererseits n kein Quadrat, so bleiben zwar d, $h(d)$ und w in den Formeln stehen, jedoch verschwinden dann die mit $\delta(\sqrt{n})$ behafteten Zusatzglieder in den Formeln für die Darstellungsanzahlen A, B.

Da der Ausdruck $1-\sqrt{2}H(n)$ für kein ganzes n verschwindet, besitzt insbesondere jede natürliche Zahl n mit $n \equiv 4 \bmod 12$ mindestens eine Darstellung $n = 3n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ mit $n_1 \equiv 0 \bmod 2$, $n_2 \equiv 0 \bmod 6$, $n_3 \equiv 2 \bmod 6$.

In $\varphi(\tau; v_2, 0) - 2\varphi(\tau; v_2, \frac{1}{4})$ hat man eine Form

$$f(\tau) = \sum_{n>0,\, n \equiv 1 \bmod 3} a(n)\, e^{\frac{2\pi i n \tau}{3}} \in \{\Gamma_0[12], -\tfrac{3}{2}, v_2\}$$

mit $a(n) = 0$ genau für $n \equiv 7, 10 \bmod 12$. Daraus folgt etwa die Relation

$$4B\left(4n \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) = B\left(4n \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) + B\left(4n \middle| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{matrix}\right) \quad \text{für } n \equiv 7, 10 \bmod 12$$

zwischen Darstellungsanzahlen.

Literatur

[1] PETERSSON, H.: Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre Bedeutung für die Zahlentheorie. Abh. Math. Sem. Hamburg **8**, 215—242 (1931). — [2] MAASS, H.: Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variablen. Abh. Math. Sem. Hamburg **12**, 133—162 (1938). — [3] PETERSSON, H.: Über die Berechnung der Skalarprodukte ganzer Modulformen. Commentarii Mathematici Helvetici **22**, 168—199 (1949).

Darmstadt, Hermannstraße 29

(Eingegangen am 10. Mai 1955)

EICHLER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 229—242 (1956)

Der Hilbertsche Klassenkörper eines imaginärquadratischen Zahlkörpers

Von
MARTIN EICHLER

Einleitung

Es bedeute $j(\tau)=\sum_{n=-1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\tau}$ $(c_{-1}=1)$ die absolute Invariante und k_0 den Körper der rationalen Zahlen. Den sog. *Modularkorrespondenzen* T_n sind die Polynome

$$F_n(x, x')=\prod\left(x-j\left(\frac{r_1\tau+r_2}{r_3}\right)\right)$$

in x und $x'=j(\tau')$ mit ganzen Koeffizienten in k_0 zugeordnet; in diesen Produkten durchlaufen r_1, r_2, r_3 alle Zahlen der Eigenschaften

$$r_1>0,\ r_3>0,\ r_1 r_3=n,\ 0\leq r_2<r_3.$$

Die *Fixpunkte* oder *Koinzidenzen* der Korrespondenz T_n sind die Nullstellen von $F_n(x, x)=0$. Man beweist in der Theorie der komplexen Multiplikation den folgenden Satz:

Die Nullstellen des größten gemeinsamen Teilers der Polynome $F_n(x, x)$ für alle diejenigen n, welche Normen aus einem imaginärquadratischen Zahlkörper $k=k_0(\sqrt{d})$ $(d<0)$ sind, erzeugen über k den Hilbertschen Klassenkörper. Dabei versteht man unter dem Hilbertschen Klassenkörper einen unverzweigten galoisschen Relativkörper, dessen Galoisgruppe mit der absoluten Idealklassengruppe von k isomorph ist, und in welchem ein Primideal $\mathfrak{p}$ von k in lauter Primideale f-ten Grades zerlegt wird, wenn f der genaue Exponent ist, für den $\mathfrak{p}^f\sim 1$ gilt.

Die klassischen Beweise benutzen neben der Funktion $j(\tau)$ noch die Diskriminante $\Delta(\tau)$ des elliptischen Gebildes mit dem Periodenverhältnis τ[1]. Ein moderner Beweis von DEURING[2]) stützt sich in stärkerem Maße auf die elliptischen Funktionen, ja er läßt sich sogar so anordnen, daß man allein mit der abstrakten Theorie der elliptischen Funktionenkörper auskommt, ohne Benutzung transzendenter Funktionentheorie.

Die folgenden Seiten sind einem neuen Beweis gewidmet, der sich zwar im wesentlichen aus den Schlüssen der klassischen Theorie aufbaut, der aber im Unterschied hierzu ganz ohne elliptische Funktionen und die Funktion

[1]) HASSE, H.: J. reine angew. Math. **157**, 115—139 (1927) und **165**, 64—88 (1931). Vgl. ferner die dort angegebene Literatur.

[2]) DEURING, M.: Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg **16**, 32—47 (1947) und Math. Ann. **124**, 393—426 (1952).

$\Delta(\tau)$ auskommt, offenbar eine sachliche Vereinfachung. Allerdings liefert er nicht das Artinsche Reziprozitätsgesetz für den Klassenkörper, im Gegensatz zu den früheren Beweisen; vgl. hierzu auch die Schlußbemerkung. Was über $j(\tau)$ vorausgesetzt wird, ist lediglich zweierlei: diese Funktion ist erstens eine in der oberen Halbebene reguläre bei der Modulgruppe invariante Funktion, die jeden Wert im Fundamentalbereich genau einmal annimmt, sie gestattet zweitens eine Entwicklung in eine Fourier-Reihe der oben angegebenen Art, wobei die Koeffizienten c_n rationale Zahlen sind, in deren Nennern höchstens endlich viele Primzahlen auftreten. Aus dieser zweiten Voraussetzung leitet man in üblicher Weise her, daß die oben gebildeten Funktionen $F_n(x, x')$ Polynome mit rationalen Koeffizienten sind, welche für fast alle Primzahlen p den Kongruenzen

$$F_p(x, x') \equiv (x - x'^p)(x^p - x') \bmod p, \tag{1}$$

$$F_{p^2}(x, x') \equiv (x - x'^{p^2})(x^{p^2} - x')(x - x')^p \bmod p \tag{1a}$$

genügen.

§ 1. Die Grundlagen in der Matrixalgebra

Ich beginne damit, an einige wohlbekannte Dinge zu erinnern, wenngleich in einer Sprache, die in diesem Zusammenhang vielleicht ungewohnt wirkt. Es bezeichne $\mathfrak{O}$ den Ring der ganzzahligen zweireihigen Matrizen, das ist eine maximale Ordnung in der Matrixalgebra zweiten Grades. $\mathfrak{o}$ sei die maximale Ordnung eines imaginärquadratischen Zahlkörpers $k = k_0(\sqrt{d})$, $d < 0$. In $\mathfrak{O}$ gibt es unendlich viele mit $\mathfrak{o}$ isomorphe Teilringe $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots$. Ist ε eine Einheit von $\mathfrak{O}$, so ist mit $\mathfrak{o}_1$ auch $\varepsilon \mathfrak{o}_1 \varepsilon^{-1}$ in $\mathfrak{O}$ enthalten und mit $\mathfrak{o}$ isomorph. Zwei in dieser Weise zusammenhängende Ordnungen sollen *äquivalent* heißen; die Gesamtheiten äquivalenter Ordnungen nennt man Klassen. Die verschiedenen Klassen äquivalenter Ordnungen entsprechen nun den (absoluten) Idealklassen von k wie folgt.

Es seien $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2$ zwei mit $\mathfrak{o}$ isomorphe Teilringe von $\mathfrak{O}$. Dann gilt mit einem Nichtnullteiler α: $\mathfrak{o}_2 = \alpha \mathfrak{o}_1 \alpha^{-1}$. Folglich ist $\mathfrak{o}_1 \in \mathfrak{O}' = \alpha^{-1} \mathfrak{O} \alpha$. Nach einem Satze von CHEVALLEY-HASSE-NOETHER[3]) gibt es demzufolge ein $\mathfrak{o}_1$-Ideal $\mathfrak{a}_1$, so daß $\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1$ die Rechtsordnung $\mathfrak{O}'$ hat. Andererseits hat aber auch das Ideal $\mathfrak{O}\alpha$ diese Rechtsordnung $\mathfrak{O}'$. Folglich ist bis auf einen ambigen Rechtsfaktor

$$\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{O}\alpha. \tag{2}$$

Nun haben aber alle diese ambigen Ideale die Gestalt $\mathfrak{O}'a$, $a \in k_0$; man kann den Faktor a nach Belieben in α oder $\mathfrak{a}_1$ aufnehmen, so daß (2) schlechthin gilt. Hiermit ist dem Paar $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2$ ein $\mathfrak{o}_1$-Ideal $\mathfrak{a}_1$ zugeordnet worden. Multipliziert man $\mathfrak{a}_1$ und α rechts mit einem $\alpha_1 \in \mathfrak{o}_1$, so bleibt (2) bestehen, $\mathfrak{o}_2$ ändert sich nicht und $\mathfrak{a}_1$ wird durch ein äquivalentes Ideal ersetzt. Umgekehrt liefert jedes $\mathfrak{o}_1$-Ideal $\mathfrak{a}_1$ vermöge (2) ein Element α, denn in der Matrixalgebra

[3]) CHEVALLEY, C.: Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg **10** (1934). — HASSE, H.: Act. Sci. Ind. (Paris) **109** (1934). — NOETHER, E.: Act. Sci. Ind. **148** (1934).

sind alle Ideale Hauptideale. Mit diesem Element α wird dann $\mathfrak{o}_2 = \alpha \mathfrak{o}_1 \alpha^{-1}$ gebildet. Durch (2) ist α aber nur bis auf eine Einheit als linksseitigen Faktor bestimmt, deshalb gehört zu einer $\mathfrak{o}_1$-Idealklasse eine Klasse von mit $\mathfrak{o}$ isomorphen Teilringen in $\mathfrak{O}$.

Dieser Zusammenhang zwischen den verschiedenen Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ bedarf noch einer Verfeinerung. Zu einer Ordnung $\mathfrak{o}_1$ gibt es in der Matrixalgebra ein Element $\varkappa_1$, welches in $\mathfrak{o}_1$ den nicht identischen Automorphismus induziert; d.h. ist $\delta_1 \in \mathfrak{o}_1$, $\delta_1^2 = d$, so ist $\varkappa_1^{-1} \delta_1 \varkappa_1 = -\delta_1$. Die Matrixalgebra ist dann das verschränkte Produkt $\left(k_0(\sqrt{d}), \varkappa_1^2\right)$, und da sie eine indefinite Algebra und $d < 0$ ist, muß $-\varkappa_1^2 = n(\varkappa_1) < 0$ sein. Verabredet man nun, daß in den Gln. (2) stets $n(\alpha) > 0$ genommen wird, *so werden durch die entsprechenden Abbildungen* $\mathfrak{o}_1 \to \alpha \mathfrak{o}_1 \alpha^{-1}$ *die Ordnungen* $\mathfrak{o}_i$ *in eindeutiger Weise aufeinander isomorph bezogen.* Das heißt: es ist nicht möglich durch eine (eventuell zusammengesetzte) Transformation dieser Art $\mathfrak{o}_1 \to \alpha \mathfrak{o}_1 \alpha^{-1}$ in $\mathfrak{o}_1$ den nicht identischen Automorphismus zu erzeugen. Hieraus folgt weiter: Die Einteilung der $\mathfrak{o}_i$ in Klassen läßt sich so verfeinern, daß die verschiedenen $\mathfrak{o}_i$ einer Klasse bereits durch Transformationen mit Einheiten positiver Norm auseinander hervorgehen. Ist ε eine Einheit der Norm -1 und $\mathfrak{o}_2 = \varepsilon \mathfrak{o}_1 \varepsilon^{-1}$, so ist auch mit dem oben erwähnten Element $\varkappa_1$: $\mathfrak{o}_2 = \varepsilon \varkappa_1 \mathfrak{o}_1 (\varepsilon \varkappa_1)^{-1}$ und $n(\varepsilon \varkappa_1) > 0$; $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ gehören möglicherweise verschiedenen Klassen an. Die Einheiten der Norm $+1$ von $\mathfrak{O}$ bilden die Modulgruppe.

Der geschilderte Zusammenhang zwischen den Idealklassen von k und den Klassen von Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ liefert gleichzeitig eine Gruppe von Permutationen der Klassen der $\mathfrak{o}_i$, welche mit der Idealklassengruppe in k isomorph ist. Es sei C eine Idealklasse von k und $\mathfrak{a}$ ein in C gelegenes Ideal. Das der (wie gezeigt eindeutig fixierten) Isomorphie $\mathfrak{o}_i \cong \mathfrak{o}$ entsprechende $\mathfrak{o}_i$-Ideal sei $\mathfrak{a}_i$. Man nehme ein α_i positiver Norm, für welches $\mathfrak{O}\mathfrak{a}_i = \mathfrak{O}\alpha_i$ gilt und ordne der Klasse C die Permutation

$$\sigma_C: \quad \mathfrak{o}_i \to \mathfrak{o}_i^{\sigma_C'} = \alpha_i \mathfrak{o}_i \alpha_i^{-1}$$

zu. Daß es sich in der Tat um eine Permutation der Klassen handelt, ist klar. Es wird nun behauptet:

$$\sigma_{C_1}' \sigma_{C_2}' = \sigma_{C_1 C_2}'. \tag{3}$$

Beweis. Aus

$$\mathfrak{a} \in C_1, \quad \mathfrak{O}\mathfrak{a}_i = \mathfrak{O}\alpha_i, \quad \mathfrak{o}_i^{\sigma_{C_1}} = \alpha_i \mathfrak{o}_i \alpha_i^{-1} = \mathfrak{o}_k,$$

$$\mathfrak{b} \in C_2, \quad \mathfrak{O}\mathfrak{b}_k = \mathfrak{O}\beta_k, \quad \left(\mathfrak{o}_i^{\sigma_{C_1}}\right)^{\sigma_{C_2}} = \beta_k \mathfrak{o}_k \beta_k^{-1},$$

$$\mathfrak{b}_k = \alpha_i \mathfrak{b}_i \alpha_i^{-1}$$

schließt man

$$\mathfrak{O}\mathfrak{b}_k = \mathfrak{O}\alpha_i \mathfrak{b}_i \alpha_i^{-1} = \mathfrak{O}\beta_k,$$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i = \mathfrak{O}\alpha_i \mathfrak{b}_i = \mathfrak{O}\beta_k \alpha_i.$$

Es ist $n(\beta_k \alpha_i) > 0$, also

$$\left(\mathfrak{o}_i^{\sigma_{C_1}'}\right)^{\sigma_{C_2}'} = (\beta_k \alpha_i)\, \mathfrak{o}_i\, (\beta_k \alpha_i)^{-1} = \mathfrak{o}_i^{\sigma_{C_1 C_2}'}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

§ 2. Modularkorrespondenzen und Klasseninvarianten

Den Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ werden zunächst die Wurzeln τ_i mit positivem Imaginärteil der Gleichungen

$$\frac{a\tau+b}{c\tau+d}=\tau,\quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathfrak{o}_i,\quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} \tag{4}$$

zugeordnet. Wie man leicht nachrechnet, gehört zu sämtlichen Matrizen einer Ordnung $\mathfrak{o}_i$, welche nicht Vielfache der Einheitsmatrix sind, ein und nur ein τ_i. Zu zwei äquivalenten Ordnungen $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2=\varepsilon\mathfrak{o}_1\varepsilon^{-1}$ mit einem ε aus der Modulgruppe gehören zwei Werte τ_1, τ_2, die durch die ε entsprechende gebrochen lineare Substitution auseinander hervorgehen. Die komplexen Zahlen

$$\xi_i=j(\tau_i)$$

sind dann Invarianten der Klassen äquivalenter $\mathfrak{o}_i$, sie heißen die *Klasseninvarianten*.

Es sei nun ν ein Element aus der Ordnung $\mathfrak{o}$, die Norm von ν sei $n(\nu)=n$. Das ν entsprechende Element in der Ordnung $\mathfrak{o}_i$ sei ν_i, und $\nu_i, \nu_i', \nu_i'', \ldots$ sei ein System von Elementen aus $\mathfrak{O}$ von der Art, daß $\mathfrak{O}\nu_i, \mathfrak{O}\nu_i', \mathfrak{O}\nu_i'', \ldots$ alle ganzen $\mathfrak{O}$-Linksideale der Norm n genau einmal repräsentieren. Dann ist

$$F_n(x,x')=\big(x-j(\nu_i(\tau'))\big)\big(x-j(\nu_i'(\tau'))\big)\big(x-j(\nu_i''(\tau'))\big)\ldots$$

das die Modularkorrespondenz T_n darstellende Polynom; dabei bedeute $\nu_i(\tau')$ usw. die der Matrix ν_i usw. entsprechende gebrochen lineare Substitution. Da nun τ_i Wurzel der Gleichung $\nu_i(\tau_i)=\tau_i$ ist, genügt ξ_i der Gleichung $F_n(x,x)=0$. Die Klasseninvarianten sind also Koinzidenzpunkte der Modularkorrespondenzen T_n, wo n alle Normen von Elemefiten aus k durchläuft. Hieraus entnimmt man die beiden ersten der drei folgenden Behauptungen:

E 1. *Die ξ_i sind algebraische Zahlen.*

E 2. *Die ξ_i sind alle untereinander verschieden,* denn die zu verschiedenen Klassen von Ordnungen gehörigen τ_i sind nicht nach der Modulgruppe äquivalent, und $j(\tau)$ nimmt jeden Wert im Fundamentalbereich genau einmal an.

E 3. *Der größte gemeinsame Teiler der $F_n(x,x)$ für alle n, welche Normen von Elementen aus $\mathfrak{o}$ sind (die nicht schon in k_0 liegen), ist*

$$\prod_{i=1}^{h}(x-\xi_i)=g(x),$$

dieses Polynom hat hiernach rationale Koeffizienten.

Zum Beweise sei ξ_0 eine gemeinsame Nullstelle aller dieser $F_n(x,x)$. Es gibt also ein τ_0 mit positivem Imaginärteil, sowie für jedes dieser n eine ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ der Determinante n und hierzu ein Element $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Modulgruppe, so daß

$$\xi_0=j(\tau_0),\quad \frac{a\tau_0+b}{c\tau_0+d}=\frac{\alpha\tau_0+\beta}{\gamma\tau_0+\delta}$$

ist. O.B.d.A. darf man $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ voraussetzen. Dann ist τ_0 Wurzel einer quadratischen Gleichung der Gestalt (4). Alle Matrizen $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, welche in dieser Weise zu τ_0 gehören, bilden eine Ordnung $\mathfrak{o}_0$, die mit einer Ordnung aus einem imaginärquadratischen Zahlkörper isomorph sein muß. Sie hat, wie gezeigt, die Eigenschaft, daß sie Elemente derselben Norm besitzt wie $\mathfrak{o}$. Daraus kann man leicht $\mathfrak{o}_0 \cong \mathfrak{o}$ schließen.

Hierzu betrachte man die kleinste vorkommende Norm >1. Diese ist $\frac{d}{4}$ oder $\frac{1-d}{4}$, wo d die Diskriminante von $\mathfrak{o}$ bezeichnet, und zwar je nachdem $d \equiv 0$ oder $\equiv 1 \bmod 4$ ist. Ist d_0 die Diskriminante von $\mathfrak{o}_0$, so muß also einer der vier folgenden Fälle vorliegen:

a) $d \equiv d_0 \equiv 0 \bmod 4$: $\quad -\frac{d}{4} = -\frac{d_0}{4}$.

b) $d \equiv d_0 \equiv 1 \bmod 4$: $\quad \frac{1-d}{4} = \frac{1-d_0}{4}$.

c) $d \equiv 0 \bmod 4$, $d_0 \equiv 1 \bmod 4$: $\quad -\frac{d}{4} = \frac{1-d_0}{4}$.

d) $d \equiv 1 \bmod 4$, $d_0 \equiv 0 \bmod 4$: $\quad \frac{1-d}{4} = -\frac{d_0}{4}$.

In den beiden ersten Fällen sind die Diskriminanten gleich, also die Ordnungen isomorph. In den beiden letzten vergleicht man auch noch die zweitkleinsten Normen $1-\frac{4}{d}$ bzw. $\frac{9-d}{4}$. Das führt neben c), d) auf $1-\frac{d}{4}=\frac{9-d_0}{4}$ bzw. $\frac{9-d}{4}=1-\frac{d_0}{4}$, was mit c) bzw. d) nicht verträglich ist.

Es kommt darauf an, die Wirkung der in § 1 definierten Permutationen σ'_C auf die Klasseninvarianten zu studieren. Das Folgende enthält eine Vorbereitung. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades von k. Für eine mit $\mathfrak{o}$ isomorphe Teilordnung $\mathfrak{o}_i$ von $\mathfrak{O}$ bilde man das entsprechende Primideal $\mathfrak{p}_i$ sowie das dazu konjugierte $\bar{\mathfrak{p}}_i$, und es sei

$$(5)\qquad \mathfrak{P}_i = \mathfrak{O}\mathfrak{p}_i = \mathfrak{O}\pi_i, \quad \mathfrak{P}'_i = \mathfrak{O}\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{O}\pi'_i, \quad n(\pi_i) = n(\pi'_i) = p.$$

Diese beiden $\mathfrak{O}$-Linksideale sind verschieden, wenn $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}$ ist. In der Bezeichnungsweise von § 1 ist nun

$$\mathfrak{o}_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}} = \pi_i \mathfrak{o}_i \pi_i^{-1}, \quad \mathfrak{o}_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}} = \pi'_i \mathfrak{o}_i \pi_i'^{-1},$$

wo $\sigma'_{\mathfrak{p}}, \sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}$ die den Klassen von $\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}$ zugeordneten Permutationen sind. Für die diesen Ordnungen zugeordneten Wurzeln $\tau_i, \tau_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}}, \tau_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}}$ der Gln. (4) gilt dann

$$(6)\qquad \tau_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}} = \pi_i(\tau_i), \quad \tau_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}} = \pi'_i(\tau_i).$$

Andererseits ergänze man die Ideale (5) zu einem vollständigen System $\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}'_i, \mathfrak{P}''_i = \mathfrak{O}\pi''_i$ mit $n(\pi''_i) > 0$ usw. von $\mathfrak{O}$-Linksidealen der Primzahlnorm p. Dann ist

$$F_p(x, x') = \big(x - j(\pi_i(\tau'))\big)\big(x - j(\pi'_i(\tau'))\big)\big(x - j(\pi''_i(\tau'))\big)\ldots.$$

Setzt man hier $\tau' = \tau_i$ ein, so treten rechts wegen (6) die beiden Faktoren $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}})$, $(x - \xi_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}})$ auf, wenn

$$\xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}} = j(\tau_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}}) = j(\pi_i(\tau_i))$$

definiert wird. Die übrigen $j(\pi_i''(\tau_i))$, usw. sind keine Klasseninvarianten mehr. Die $\pi_i''(\tau_i)$ sind nämlich die Wurzeln der Gln. (4) für die Ordnungen $\pi_i'' \mathfrak{o}_i \pi_i''^{-1}$ usw. Diese liegen aber nicht mehr in $\mathfrak{O}$. Denn wäre $\pi_i'' \mathfrak{o}_i \pi_i''^{-1} < \mathfrak{O}$, so wäre $\mathfrak{o}_i < \pi_i''^{-1} \mathfrak{O} \pi_i''$, demnach wäre $\mathfrak{o}_i$ in der Rechtsordnung des Ideals $\mathfrak{P}_i'' = \mathfrak{O}\pi_i''$ enthalten. Dann wäre dieses Ideal aber nach dem oben angeführten Satze von Chevalley-Hasse-Noether von der Form $\mathfrak{O}\mathfrak{q}_i$ mit einem ganzen $\mathfrak{o}_i$-Ideal $\mathfrak{q}_i$. Dieses müßte die Norm p haben. Es gibt aber nur zwei solche Ideale $\mathfrak{p}_i, \bar{\mathfrak{p}}_i$, und diese lieferten bereits $\mathfrak{O}\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{O}\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{P}_i'$. Wir fassen das Ergebnis zusammen:

E 4. *Es sei $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal ersten Grades der Norm p in k. Dann hat $F_p(x, \xi_i)$ mit $g(x)$ den größten gemeinsamen Teiler $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}})(x - \xi_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}})$ oder $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}})$, je nachdem ob $\mathfrak{p} \nsim \bar{\mathfrak{p}}$ oder $\mathfrak{p} \sim \bar{\mathfrak{p}}$ ist.*

Der völlig analoge Beweis für die folgende Tatsache darf übergangen werden:

E 5. *Unter denselben Voraussetzungen haben $F_{p^2}(x, \xi_i)$ und $g(x)$ den größten gemeinsamen Teiler $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}^2}})(x - \xi_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}^2}})(x - \xi_i)$ oder $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}^2}})(x - \xi_i)$ oder $(x - \xi_i)$, je nachdem ob $\mathfrak{p}^2, \bar{\mathfrak{p}}^2$, (1) drei, zwei oder eine Idealklasse repräsentieren.* (Zum leichteren Verständnis: $\xi_i = \xi_i^{\sigma'_1}$, $\sigma'_1 = \sigma'_{\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}}$.)

Die durch Kursivdruck hervorgehobenen Eigenschaften E 1 bis E 5 sind wohlbekannt. Sie reichen hin, zusammen mit den Kongruenzen (1), den Körper der ξ_i als den Klassenkörper zu erweisen.

§ 3. Automorphismen des Körpers der Klasseninvarianten

In § 3 bedeute durchweg $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades von k und p seine Norm. Endlich viele $\mathfrak{p}$ und p werden ein für alle Male ausgeschlossen, nämlich die Teiler des Hauptnenners der Koeffizienten von $g(x)$, die Teiler von $g(0)$, und die Teiler der Diskriminante von $g(x)$. Für die übrigen p sind die Klasseninvarianten sowie deren Differenzen p-adische Einheiten.

Hilfssatz 1. *Den Permutationen σ'_C lassen sich Automorphismen σ_C des Körpers $K = k_0(\xi_1, \ldots, \xi_h)$ der Klasseninvarianten zuordnen, wobei gilt: ist $\xi_i^{\sigma'_C} = \xi_j$, so ist $\xi_i^{\sigma_C} = \xi_j$ mit einem möglicherweise von i abhängigen Exponenten $e = \pm 1$.*

σ_C und σ'_C haben gleiche Ordnung, und die Zyklen $\xi_i, \xi_i^{\sigma_C}, \xi_i^{\sigma_C^2}, \ldots$ und $\xi_i, \xi_i^{\sigma'_C}, \xi_i^{\sigma'^2_C}, \ldots$ stimmen überein, möglicherweise in umgekehrter Reihenfolge.

σ_C braucht durch σ'_C nicht eindeutig definiert zu sein, insbesondere könnte man σ_C durch σ_C^{-1} ersetzen. Zeichnet man eine Klasseninvariante ξ_1 aus und verlangt man $\xi_1^{\sigma_C} = \xi_1^{\sigma'_C}$, so ist die umgekehrte Abbildung $\sigma_C \to \sigma'_C$ eindeutig

denn die σ_C' bilden eine transitive Permutationsgruppe der Ordnung h von h Objekten.

Beweis. Es sei zunächst $C^2=1$, d.h. die Hauptklasse. Das Primideal $\mathfrak{p}$ sei in C gelegen. Dann gilt nach E 4 und (1)

$$F_p(\xi_i^{\sigma_C'}, \xi_i) \equiv (\xi_i^{\sigma_C'} - \xi_i^{\mathfrak{p}})\,(\xi_i^{\mathfrak{p}\,\sigma_C'} - \xi_i) \bmod \mathfrak{p} \tag{7}$$

für jedes ξ_i; dabei ist $\xi_i^{\mathfrak{p}\,\sigma_C'}$ eine Abkürzung für $(\xi_i^{\sigma_C'})^{\mathfrak{p}}$. Ferner ergibt E 4, daß sich $\xi_i^{\sigma_C'}$ als Polynom in ξ_i mit rationalen Koeffizienten berechnen läßt: $\xi_i^{\sigma_C'} = R(\xi_i)$. Wegen $C^2=1$ und (3) ist dann auch $\xi_i = R(\xi_i^{\sigma_C'})$. Im folgenden werden nun auch noch die in den Nennern der Koeffizienten von $R(x)$ aufgehenden Primzahlen ausgeschlossen.

Da voraussetzungsgemäß die Differenzen verschiedener ξ_i $\mathfrak{p}$-adische Einheiten sind, schließt man aus (7): in dem Unterkörper $k_0(\xi_1)$ von K gibt es einen Primteiler $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{p}$, so daß

$$\xi_1^{\sigma_C'} = R(\xi_1) \equiv \xi_1^{\mathfrak{p}^e} \bmod \mathfrak{P}_1 \qquad \text{mit} \qquad e = \pm 1$$

gilt. Daraus folgt weiter

$$\xi_1 = R(\xi_1^{\sigma_C'}) \equiv R(\xi_1^{\mathfrak{p}^e}) \equiv R(\xi_1)^{\mathfrak{p}^e} = (\xi_1^{\sigma_C'})^{\mathfrak{p}^e} \bmod \mathfrak{P}_1$$

oder auch

$$\xi_1^{\sigma_C'} \equiv \xi^{\mathfrak{p}^{-e}} \bmod \mathfrak{P}_1.$$

Demnach kann man

$$\xi_1^{\sigma_C'} \equiv \xi_1^{\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{P}_1 \tag{8}$$

annehmen. Die Kongruenz (8) besagt, daß die Abbildung $\xi_1 \to \xi_1^{\sigma_C'}$ ein Automorphismus des Restklassenkörpers von $k_0(\xi_1) \bmod \mathfrak{P}_1$ ist. Nun gilt aber (8) für die Normen $\mathfrak{p}$ aller Primideale $\mathfrak{p}$ ersten Grades aus der Klasse C, von höchstens endlich vielen Ausnahmen abgesehen, bzw. für gewisse Primteiler $\mathfrak{P}_1$ dieser $\mathfrak{p}$. Man schließt hieraus, daß σ_C' ein globaler Automorphismus von $k_0(\xi_1)$ ist. Nämlich aus einer Gleichung $f(\xi_1)=0$ mit ganzen rationalen Koeffizienten folgt $f(\xi_1^{\sigma_C'}) \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}_1$ für unendlich viele $\mathfrak{P}_1$, also $f(\xi_1^{\sigma_C'})=0$.

Man bezeichnet $\xi_1^{\sigma_C'}$ mit ξ_2 und adjungiert eine dritte Klasseninvariante ξ_3. Wie oben ergibt sich die Kongruenz

$$\xi_1^{\sigma_C'} \equiv \xi_3^{\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{P}_3$$

für einen Primteiler $\mathfrak{P}_3$ von $\mathfrak{P}_1$ in dem Körper $k_0(\xi_1, \xi_3)$. Also ist σ_C ein Automorphismus des Restklassenkörpers von $k_0(\xi_1, \xi_3) \bmod \mathfrak{P}_3$. Da dieses für unendlich viele Primideale $\mathfrak{P}_3$ der Fall ist, ist $\sigma_C' = \sigma_C$ ein Automorphismus dieses Körpers. Fortsetzung der Schlußweise liefert nun die Behauptung.

Jetzt sei die Ordnung f der Klasse C größer als 2. Im Prinzip führt wieder dieselbe Schlußweise zum Ziel; jedoch kann man jetzt nicht zeigen, daß σ_C' ein Automorphismus ist. Zunächst sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades der Norm $\mathfrak{p}$ in der Klasse C. Dann folgt aus E 4 und (1) die Kongruenz (7).

Ferner folgt aus E 4 die Existenz eines Polynoms $R(x, y)$ mit rationalen Koeffizienten, so daß

$$\xi_i^{\sigma_C'^2} = R(\xi_i, \xi_i^{\sigma_C'})$$

ist. Die in den Nennern der Koeffizienten von R aufgehenden p werden fortan ausgeschlossen.

Nach E 5 ist endlich $\xi_i^{\sigma_C'^2}$ eine Wurzel von $F_{p^2}(x, \xi_i)$. Da nun voraussetzungsgemäß die Differenzen verschiedener ξ_i p-adische Einheiten sind, folgt aus (1a)

$$(\xi_i^{\sigma_C'^2} - \xi_i)\,(\xi_i^{p^2\sigma_C'^2} - \xi_i) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}. \tag{9}$$

Man betrachte diese Kongruenz (9) zusammen mit den beiden Spezialfällen von (7):

$$(\xi_i^{\sigma_C'^2} - \xi_i^{p\,\sigma_C'})\,(\xi_i^{p\,\sigma_C'^2} - \xi_i^{\sigma_C'}) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p},$$

$$(\xi_i^{\sigma_C'} - \xi_i^{p})\,(\xi_i^{p\,\sigma_C'} - \xi_i) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}.$$

Und zwar nehme man $i = 1$ und diskutiere diese drei Kongruenzen gleichzeitig in dem Körper $k_0(\xi_1, \xi_1^{\sigma_C'})$. Es gibt einen Primteiler $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{p}$ in diesem Körper, der entweder zweimal den ersten Faktor oder zweimal den zweiten dieser drei Produkte teilt. Eine ganz leichte Rechnung zeigt dann, daß $\mathfrak{P}_1$ jedesmal auch den ersten bzw. den zweiten Faktor in der dritten Kongruenz teilt, also

$$\xi_1^{\sigma_C'} \equiv \xi_1^{p^{e_1}}, \quad \xi_1^{\sigma_C'^2} \equiv \xi_1^{p^{e_1}\sigma_C'} \bmod \mathfrak{P}_1, \qquad e_1 = \pm 1. \tag{10}$$

Diese Kongruenz gilt für unendlich viele $\mathfrak{P}_1$. Der Exponent e_1 kann zwar noch von $\mathfrak{P}_1$ abhängen, er ist jedoch unendlich oft der gleiche. Daraus folgt wie oben, daß σ_C' ein Automorphismus von $k_0(\xi_1, \xi_1^{\sigma_C'})$ ist. Was die Wirkung auf diesen Körper betrifft, wird jetzt $\sigma_C = \sigma_C'^{e_1}$ definiert.

Man wählt die Numerierung $\xi_1^{\sigma_C'} = \xi_2, \ldots, \xi_{f-1}^{\sigma_C'} = \xi_f$ und adjungiert hierauf zwei weitere Klasseninvarianten ξ_{f+1} und $\xi_{f+1}^{\sigma_C'}$. Es gibt einen Primteiler $\mathfrak{P}_{f+1}$ von $\mathfrak{P}_1$ in dem Körper $k_0(\xi_1, \xi_2, \xi_{f+1}, \xi_{f+1}^{\sigma_C'})$, für welchen

$$\xi_{f+1}^{\sigma_C'} \equiv \xi_{f+1}^{p^{e_{f+1}}}, \quad \xi_{f+1}^{\sigma_C'^2} \equiv \xi_{f+1}^{p^{e_{f+1}}\sigma_C'} \bmod \mathfrak{P}_{f+1}, \quad e_{f+1} = \pm 1 \tag{11}$$

gilt. Diese Kongruenz besteht für unendlich viele Primideale $\mathfrak{P}_{f+1}$, und für unendlich viele von diesen stimmen auch die Exponenten e_1, e_{f+1} überein. Was die Wirkung auf ξ_{f+1} betrifft, definiert man jetzt $\sigma_C = \sigma_C'^{e_{f+1}}$ und entnimmt den unendlich vielen Kongruenzen (11), daß σ_C ein Automorphismus von $k_0(\xi_1, \xi_2, \xi_{f+1}, \xi_{f+1}^{\sigma_C'})$ ist. Es ist nunmehr klar, wie man die Schlußweise fortsetzen muß, um die Behauptung zu erhalten.

Im gleichen Zuge ergibt sich

Hilfssatz 2. *Für eine Klasse $C \neq 1$ ist $\sigma_C^{\pm 1}$ der Frobenius-Automorphismus eines Primteilers $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in K, wenn $\mathfrak{p}$ die Norm eines Primideals $\mathfrak{p}$ ersten Grades von k ist. Das gilt für unendlich viele $\mathfrak{p}$. Diese Primzahlen zerfallen also in $[K:k_0]f^{-1}$ Primideale des Grades f, wo f die Ordnung der Klasse von $\mathfrak{p}$ ist.*

Es bleibt nur noch der Beweis für den Fall $f=1$ nachzuholen. Jetzt ist jedes ξ_i nach E 3 Wurzel von $F_p(x, x)$, also gilt nach (1)

$$\xi_i^p \equiv \xi_i \bmod \mathfrak{P}$$

für die Teiler $\mathfrak{P}$ eines solchen p. Demnach ist jedes solche $\mathfrak{P}$ ein Primideal ersten Grades.

Eine letzte Konsequenz aus diesen Überlegungen ist

Hilfssatz 3. *Die konjugierten Elemente zu σ_C stimmen entweder mit σ_C oder mit σ_C^{-1} überein.*

Beweis. Es ist nämlich auf Grund der Definition von σ_C' und von (7)

$$\left(\xi_i^{\sigma_C} - \xi_i^p\right)\left(\xi_i^{p\,\sigma_C} - \xi_i\right) \equiv 0 \bmod p.$$

Also sämtliche Primteiler von p in K haben entweder σ_C oder σ_C^{-1} als Frobenius-Automorphismus. Andererseits treten aber als Frobenius-Automorphismen sämtliche zu σ_C konjugierten Elemente auf.

Selbstverständlich ist

Hilfssatz 4. *Die Abbildung der ξ_i auf die konjugiert komplexen Zahlen ist ein Automorphismus σ von K.*

§ 4. Beweis des Hauptsatzes

Dem Schluß in § 3, daß jede Idealklasse in k unendlich viele Primideale ersten Grades enthält, liegt die Benutzung analytischer Hilfsmittel zugrunde. Zur Erreichung des Zieles muß noch zwei weitere Male auf die Zetafunktionen zurückgegriffen werden. Formulieren wir zunächst den Hauptsatz in dieser Sprache!

Es sei K_1 das Kompositum von K und k und n_1 der Grad von K_1/k. Die Zetafunktion von K_1 ist

$$\zeta(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}} s}\right)^{-n_1 f_{\mathfrak{p}}^{-1} e_{\mathfrak{p}}^{-1}}, \tag{12}$$

das Produkt wird erstreckt über alle Primideale $\mathfrak{p}$ von k, dabei bedeuten $f_{\mathfrak{p}}$ und $e_{\mathfrak{p}}$ den Grad und die Verzweigungsordnung der in $\mathfrak{p}$ aufgehenden Primideale von K_1. Auf der anderen Seite werden die L-Reihen für die absoluten Idealklassen von k gebildet:

$$L_\chi(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \chi(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

und ihr Produkt

$$L(s) = \prod_{\chi} L_\chi(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}' s}\right)^{h f_{\mathfrak{p}}'^{-1}}, \tag{13}$$

wo $f_{\mathfrak{p}}'$ den Exponenten der Idealklasse von $\mathfrak{p}$ und h die Idealklassenanzahl von k bedeutet. Das in der Einleitung genannte Zerlegungsgesetz der Primideale von k in K_1 läßt sich so formulieren:

$$\zeta(s) = L(s). \tag{14}$$

Zunächst kann man, gestützt auf Hilfssatz 2, die Pole von $\zeta(s)$ und $L(s)$ bei $s=1$ vergleichen; beide sind von erster Ordnung. Sie werden bereits durch die Faktoren in (12) und (13) geliefert, welche zu solchen Primidealen $\mathfrak{p}_1$ bzw. $\mathfrak{p}_1'$ ersten Grades von k gehören, für die $f_{\mathfrak{p}_1}=1$ bzw. $f'_{\mathfrak{p}_1}=1$ ist. Aus Hilfssatz 2 geht nun aber gerade hervor, daß diese $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1'$ bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen übereinstimmen. Deshalb muß der Grad von K_1 über k gleich h sein.

Hiervon ausgehend kann man unter anderem zeigen, daß fast alle Primideale zweiten Grades von k (es sind alles Hauptideale) in K_1 völlig zerlegt werden (Hilfssatz 7). Das bedeutet, daß in (12) und (13) fast alle Faktoren übereinstimmen. Nunmehr führt ein eleganter Schluß HECKES folgendermaßen zu der Gl. (14): $\zeta(s)$ und $L(s)$ genügen den Funktionalgleichungen ($\mathfrak{d}$ ist die Relativdiskriminante von K_1/k)

$$N(\mathfrak{d})^{s/2}\left(\left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)\right)^h\zeta(s)=\Phi(s)=\Phi(1-s),$$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)\right)^h L(s)=\Psi(s)=\Psi(1-s).$$

Der Quotient ist voraussetzungsgemäß ein endliches Euler-Produkt

$$Q(s)=\frac{L(s)}{\zeta(s)}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}s})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}e_{\mathfrak{p}}^{-1}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}s})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}} \tag{15}$$

und genügt der Funktionalgleichung

$$N(\mathfrak{d})^{-\frac{s}{2}}Q(s)=N(\mathfrak{d})^{\frac{s-1}{2}}Q(1-s).$$

Man bildet den Quotienten beider Seiten und läßt s auf der reellen Achse gegen ∞ streben:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\Pi N(\mathfrak{p})^{\left(1-\frac{1}{e_{\mathfrak{p}}}\right)h(1-s)}}{N(\mathfrak{d})^{\frac{1}{2}-s}}=1.$$

Das ist nur dann möglich, wenn $\mathfrak{d}=(1)$ und alle $e_{\mathfrak{p}}=1$ sind. Die Funktionalgleichung für $Q(s)$ läßt sich jetzt so schreiben:

$$\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}s})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}(1-s)})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}}}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}s})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}(1-s)})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}}$$

und zu

$$\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}s})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}(s-1)})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}}}=\varepsilon\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}s})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}(s-1)})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}}$$

umformen, wo ε eine Einheitswurzel bedeutet. Da beide Seiten in absolut konvergente Dirichlet-Reihen entwickelt werden können, müssen sie identisch sein, d.h. $f_{\mathfrak{p}}=f'_{\mathfrak{p}}$.

Hilfssatz 5. *Die Galoissche Gruppe von K_1/k ist mit der Idealklassengruppe in k isomorph.*

Dem eigentlichen Beweis ist eine Vorbereitung vorauszuschicken: das Polynom $g(x)=\Pi(x-\xi_i)$ ist in k irreduzibel. Es seien nämlich ξ_i, ξ_j irgend zwei Nullstellen. Dann gilt mit einer der Permutationen σ_C' von § 1: $\xi_j=\xi_i^{\sigma_C'}$. Nach Hilfssatz 1 ist jetzt $\xi_j=\xi_i^{\sigma_C^{\pm 1}}$, und nach Hilfssatz 2 ist $\sigma_C^{\pm 1}$ der Frobenius-Automorphismus unendlich vieler Primideale $\mathfrak{P}$ von K, welche Primideale $\mathfrak{p}$ ersten Grades von k teilen. Wenn nun $K>k$ war, so läßt $\sigma_C^{\pm 1}$ den Unterkörper k fest, und das Produkt $(x-\xi_i)(x-\xi_j)$ gehört zu dem gleichen in k irreduziblen Faktor von $g(x)$. Wenn aber nicht $K>k$ war, so zeigt dieser Schluß jedenfalls, daß $g(x)$ in k_0 irreduzibel ist, und die Körpererweiterung $k_0 \to k$ kann jetzt nichts an der Irreduzibilität ändern.

Es gibt also zu jedem Paar ξ_i, ξ_j einen Automorphismus σ_C von K_1/k, für den $\xi_j=\xi_i^{\sigma_C}$ gilt. Nun ist aber gezeigt worden, daß der Grad $[K_1:k]$ gleich der Anzahl h der ξ_i ist. Folglich gibt es außer diesen σ_C keine weiteren Automorphismen von K_1/k, und die in Hilfssatz 1 behauptete Abbildung $\sigma_C' \to \sigma_C$ ist auch eindeutig. Endlich geht aus Hilfssatz 1 hervor, daß diese Abbildung für jede zyklische Untergruppe von $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}$ ein Isomorphismus ist.

Es liegt jetzt der folgende Sachverhalt vor: Die Gruppe $\mathfrak{H}'$ der σ_C' (welche mit der Klassengruppe von k isomorph und daher abelsch ist) ist umkehrbar eindeutig auf die Galois-Gruppe $\mathfrak{H}$ von K_1/k abgebildet, und diese Abbildung ist für jede zyklische Untergruppe von $\mathfrak{H}'$ ein Isomorphismus. Nach Hilfssatz 3 gilt für je zwei Elemente σ_1, σ_2 von $\mathfrak{H}$: $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^{\pm 1}$. Eine Reihe von elementaren rein gruppentheoretischen Schlüssen zeigt jetzt die Isomorphie der Gruppen $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}$. Wir numerieren diese Schlüsse mit a) bis p); in a) bis g) werden folgende Abkürzungen benutzt: $\mathfrak{Z}$ = Zentrum von $\mathfrak{H}$; $\sigma, \sigma_u, \sigma_{2^n}$ seien ein beliebiges Element von $\mathfrak{H}$, ein solches von ungerader Ordnung und eines der Ordnung 2^n.

a) $\sigma_2 \in \mathfrak{Z}$, denn nach Hilfssatz 3 ist $\sigma^{-1}\sigma_2\sigma=\sigma_2$. — b) $\sigma_u \in \mathfrak{Z}$, denn nach Hilfssatz 3 ist $\sigma_u^{-1}\sigma\sigma_u=\sigma^{\pm 1}$, also $\sigma_u^{-u}\sigma\sigma_u^u=\sigma^{\pm 1}=\sigma$. — c) $\sigma^2 \in \mathfrak{Z}$. d) $\sigma_{2^n} \in \mathfrak{Z}$ für $n>2$. Denn nach c) ist $\sigma^{-1}\sigma_{2^n}^2\sigma=\sigma_{2^n}^2$ und nach Hilfssatz 3 $(\sigma^{-1}\sigma_{2^n}\sigma)^2=(\sigma_{2^n}^{\pm 1})^2$; das untere Vorzeichen ist falsch, wenn $n>2$ ist. — e) $\mathfrak{Z}=\mathfrak{H}$, falls $\mathfrak{H}$ ein σ_u enthält. Denn nach a) bis d) müssen alle Elemente außerhalb von $\mathfrak{Z}$ die Ordnung 4 haben. Ist σ_4 ein solches, so liegt auch $\sigma_u\sigma_4$ außerhalb $\mathfrak{Z}$, hat aber die Ordnung $4u$. — f) $\mathfrak{Z}=\mathfrak{H}$, falls $\mathfrak{H}$ ein σ_{2^n} mit $n>2$ enthält. Beweis wie unter e). — g) $\mathfrak{Z}=\mathfrak{H}$, falls $\mathfrak{H}$ nur Elemente der Ordnung 2 enthält. Beweis nach a).

Es wird jetzt angenommen, daß $\mathfrak{H}$ nicht kommutativ sei. Wegen e) bis g) enthält dann $\mathfrak{H}$ nur Elemente der Ordnungen 2 und 4, letztere auch wirklich. Ein Beispiel für eine solche Gruppe ist die Quaternionengruppe; wir zeigen, daß es im wesentlichen auch die einzige ist. h) σ_1, σ_2 seien zwei nicht vertauschbare Elemente der Ordnung 4. Aus Hilfssatz 3 folgt $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1=\sigma_2^{-1}$, daraus weiter $\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}=\sigma_1\sigma_2^{-2}$. Ebenfalls nach Hilfssatz 3 ist dies gleich σ_1^{-1}, also ist $\sigma_1^2=\sigma_2^2$. Wir nennen dies Element σ_0. Weiter folgt $(\sigma_1\sigma_2)^2=\sigma_0$. Mithin erzeugen σ_1, σ_2 die Quaternionengruppe. — i) Jedes Element $\sigma \neq \sigma_1^{e_1}\sigma_2^{e_2}$ in $\mathfrak{H}$ hat die Gestalt $\sigma=\sigma_1^{e_1}\sigma_2^{e_2}\sigma_3$, wobei σ_3 mit σ_1, σ_2 vertauschbar ist. σ sei nicht

mit σ_1, σ_2 vertauschbar und daher nach h) $\sigma_\varrho^{-1}\sigma\sigma_\varrho = \sigma_0^{\varepsilon_\varrho}\sigma$ mit $\varepsilon_\varrho = 0$ oder 1 für $\varrho = 1, 2$. Jetzt ist aber $\sigma_3 = \sigma_1^{\varepsilon_1}\sigma_2^{\varepsilon_2}\sigma$ mit σ_1, σ_3 vertauschbar. — j) Für dieses Element σ_3 gilt nicht $\sigma_3^2 = \sigma_0$. Das ist klar, wenn σ_3 die Ordnung 2 hat; hat aber σ_3 die Ordnung 4, so folgte aus $\sigma_3^2 = \sigma_0$: $(\sigma_3\sigma_1)^2 = 1$. Also $\sigma' = \sigma_3\sigma_1$ gehörte nach a) dem Zentrum an. Dann wäre aber $\sigma_3 = \sigma'\sigma_1^{-1}$ nicht mit σ_2 vertauschbar. k) Nach e) bis j) ist $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt einer abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ und r Quaternionengruppen $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_r$. In den nächsten Beweisschritten wird nun $r = 0$ gezeigt werden, d.h. $\mathfrak{H}$ ist abelsch.

l) In dem direkten Produkt $\mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_r$ gibt es $2^{3r} - 2^r$ Elemente der Ordnung 4 und $2^r - 1$ Elemente der Ordnung 2; diese sind sämtlich Quadrate von Elementen der Ordnung 4. — m) Die Ordnungen und die Anzahlen der Elemente der Ordnungen 4 und 2, sowie die Anzahlen der Nichtquadrate unter den letzteren für die Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{H}$ seien a, h; a_4, h_4; a_2, h_2; $a_{2'}, h_{2'}$. Es gilt dann nach l):

$$h = 2^{3r}a, \quad h_4 = 2^{3r}a - 2^r(a_2 + 1), \quad h_2 = 2^r(a_2 + 1) - 1, \quad h_{2'} = 2^r a_{2'}.$$

n) Ist $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt von s_4 zyklischen Gruppen der Ordnung 4 und von s_2 zyklischen Gruppen der Ordnung 2, so werden diese Anzahlen

$$(16) \qquad h_4 = 2^{2s_4+s_2+3r} - 2^{s_4+s_2+r}, \quad h_2 = 2^{s_4+s_2+r} - 1, \quad h_{2'} = 2^{s_4+r}(2^{s_2} - 1).$$

o) Wie oben festgestellt wurde, sind die entsprechenden Anzahlen für die (mit der Klassengruppe in k isomorphe und daher abelsche) Gruppe $\mathfrak{H}'$ gleich groß. Diese sei das Produkt von s_4' bzw. s_2' zyklischen Gruppen der Ordnungen 4 bzw. 2. Dann ist

$$h_4' = h_4 = 2^{2s_4'+s_2'} - 2^{s_4'+s_2'}, \quad h_2' = h_2 = 2^{s_4'+s_2'} - 1, \quad h_{2'}' = h_{2'} = 2^{s_4'}(2^{s_2'} - 1).$$

Vergleich mit (16) führt nun auf die Gleichungen

$$2s_4' + s_2' = 2s_4 + s_2 + 3r, \qquad s_2' = s_2,$$
$$s_4' + s_2' = s_4 + s_2 + r, \qquad s_4' = s_4 + r.$$

Daraus folgt $r = 0$, also $\mathfrak{H}$ ist kommutativ.

p) Vergleicht man ebenso die Anzahlen der Elemente aller möglichen Ordnungen in $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$, wobei man jetzt weiß, daß beide Gruppen abelsch sind, so ergibt sich die behauptete Isomorphie. Damit ist aber keineswegs erwiesen, daß die in § 3 definierte Abbildung ein Isomorphismus ist.

Hilfssatz 6. *Mit dem Automorphismus σ von Hilfssatz 4 gilt $\sigma^{-1}\sigma_C\sigma = \sigma_C^{-1}$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 3 ist $\sigma^{-1}\sigma_C\sigma = \sigma_C^{e(C)}$ mit $e(C) = \pm 1$. Zunächst kann man zeigen, daß $e(C)$ von C nicht abhängt. Da die Transformation mit σ ein Automorphismus der Gruppe ist, gilt für zwei Elemente

$$\sigma_{C_1}, \sigma_{C_2} : (\sigma_{C_1}\sigma_{C_2})^{e(C_1C_2)} = \sigma_{C_1}^{e(C_1)}\sigma_{C_2}^{e(C_2)}.$$

Sind nun zwei dieser Koeffizienten gleich, so muß auch der dritte damit übereinstimmen (oder $\sigma_{C_1}, \sigma_{C_2}$ oder $\sigma_{C_1}\sigma_{C_2}$ hat die Ordnung 2, und dann kann man natürlich $e(C_1), e(C_2)$ bzw. $e(C_1C_2)$ modulo 2 abändern).

Damit ist entweder die Behauptung des Hilfssatz 5 bewiesen, oder es gilt durchweg $\sigma^{-1}\sigma_C\sigma=\sigma_C$. In diesem Falle müßte entweder K/k_0 das direkte Produkt eines quadratischen Zahlkörpers und eines abelschen Zahlkörpers des Grades h sein, was wegen der Irreduzibilität der erzeugenden Gleichung $g(x)=0$ von K gewiß nicht zutrifft. Oder aber σ ist der identische Automorphismus von K. In diesem Falle läßt sich zeigen, daß die Gruppe $\mathfrak{H}$ nur Elemente der Ordnung 2 enthält, und dann ist Hilfssatz 2 auch richtig.

Wie man aus Fourier-Reihe entnimmt, ist

$$j(-\bar{\tau})=j(\bar{\tau}).$$

Setzt man $\varepsilon=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, so wird also der Automorphismus σ durch die Abbildung $\tau_i\to\varepsilon(\bar{\tau}_i)$ induziert. Die $\bar{\tau}_i$ sind aber die Wurzeln mit negativem Imaginärteil der den Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ zugeordneten Gln. (4). Man kann daher die Permutationen σ_C' und σ auch als Permutationen der Klassen isomorpher Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ studieren. Berechnen wir jetzt $\bar{\sigma}_C'=\sigma^{-1}\sigma_C'\sigma$! Dazu wird zunächst $\mathfrak{o}_i$ mit ε transformiert und $\mathfrak{o}_k=\varepsilon\mathfrak{o}_i\varepsilon^{-1}$ gesetzt. Dann sei $\mathfrak{a}_i$ ein $\mathfrak{o}_i$-Ideal in der Klasse C und $\mathfrak{a}_k$ das $\mathfrak{a}_i$ zugeordnete Ideal von $\mathfrak{o}_k$. Da $n(\varepsilon)=-1$ ist, ist dieses nach § 1 das zu $\varepsilon\mathfrak{a}_i\varepsilon^{-1}$ konjugierte, d.h. $\mathfrak{a}_k=\varepsilon\bar{\mathfrak{a}}_i\varepsilon^{-1}$. Endlich ist nun $\mathfrak{o}_i^{\bar{\sigma}_C'}=\varepsilon\alpha_k\mathfrak{o}_k\alpha_k^{-1}\varepsilon^{-1}$, wo $\mathfrak{D}\alpha_k=\mathfrak{D}\mathfrak{a}_k=\mathfrak{D}\bar{\mathfrak{a}}_i\varepsilon^{-1}$. Schreibt man $\mathfrak{D}\bar{\mathfrak{a}}_i=\mathfrak{D}\bar{\alpha}_i$ mit $n(\bar{\alpha}_i)>0$, so kann man $\alpha_k=\varepsilon\bar{\alpha}_i\varepsilon^{-1}$ nehmen. Das macht $\mathfrak{o}_i^{\bar{\sigma}_C'}=\bar{\alpha}_i\mathfrak{o}_i\bar{\alpha}_i^{-1}=\mathfrak{o}_i^{\sigma_{\bar{C}}'}$, also es gilt $\sigma^{-1}\sigma_C'\sigma=\sigma_{\bar{C}}'=\sigma_C'^{-1}$. Wenn jetzt aber σ der identische Automorphismus wäre, müßten alle σ_C die Ordnung 2 haben, also auch alle C, w.z.b.w.

Mit dem folgenden Hilfssatz wird der Ausgangspunkt der analytischen Schlußweise zu Beginn des Paragraphen erreicht.

Hilfssatz 7. *Die Primideale zweiten Grades von k werden bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen in K_1 voll zerlegt.*

Beweis nach H. Hasse[4]). Da K_1/k durch die in k irreduzible Gleichung $g(x)=0$ erzeugt wird und relativ abelsch ist, lassen sich die Automorphismen von K_1/k in der Form

$$\xi_i^{\sigma_C'}=R_C(\xi_i) \tag{17}$$

mit einem von dem Index i unabhängigen Polynom $R_C(x)$ mit Koeffizienten in k ausdrücken. Aus (17) und Hilfssatz 5 folgt

$$R_{C^{-1}}(x)=R_{\bar{C}}(x)=\bar{R}_C(x). \tag{18}$$

Es sei nun σ_0' der Frobenius-Automorphismus eines in einem Primideal (p) zweiten Grades von k aufgehenden Primideals $\mathfrak{P}$ bezüglich k_0, also

$$\xi_i^{\sigma_0'}\equiv\xi_i^p \bmod \mathfrak{P}. \tag{19}$$

Der Index i werde festgehalten. Es gibt dann nach § 1 unter den Permutationen σ_C eine, für die $\xi_i^{\sigma_C}=\xi_i^{\sigma_0'}$ ist. Nach Hilfssatz 1 gibt es unter den

[4]) Siehe die zweite unter [1]) genannte Arbeit.

Automorphismen σ'_C einen, welcher dasselbe leistet: $\xi_i^{\sigma'_C} = \xi_i^{\sigma'_0}$. Jetzt folgt aus (17) und (19)

$$\xi_i^p \equiv R_C(\xi_i) \bmod \mathfrak{P},$$

weiter, da (p) in k ein Primideal zweiten Grades ist,

$$\xi_i^{p^2} \equiv R_C(\xi_i)^p \equiv \overline{R}_C(\xi_i^p) \bmod \mathfrak{P}.$$

Das ist nach (18)

$$\xi_i^{p^2} \equiv R_{\overline{C}}(\xi_i^p) \equiv R_{\overline{C}}(\xi_i^{\sigma'_0}) = \xi_i \bmod \mathfrak{P}.$$

Da diese Kongruenz für alle Indizes i gilt, zerfällt (p) wenigstens dann, wenn alle ξ_i und alle Differenzen $\xi_i - \xi_k$ p-adische Einheiten sind.

Schlußbemerkung. Gestützt auf Hilfssatz 6 kann man leicht zeigen, daß für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von k stets eine der folgenden Kongruenzen gilt:

$$\xi_i^{\sigma_C} \equiv \xi_i \bmod \mathfrak{p}, \qquad \xi_i^{\sigma_C} \equiv \xi_i \bmod \overline{\mathfrak{p}},$$

wo C die Idealklasse bedeutet, welcher $\mathfrak{p}$ angehört. Die ausnahmslose Gültigkeit einer dieser Kongruenzen ist die Aussage des Artinschen Reziprozitätsgesetzes. Es ist klar, daß hierzu weiterreichende Hilfsmittel notwendig sind, welche zwischen einem Ideal und seinem konjugierten zu unterscheiden gestatten. Das Fehlen eines solchen Hilfsmittels bedeutete für den hier gelieferten Beweis eine formale Schwierigkeit, da es an Stelle der Gleichheit $\sigma_C = \sigma'_C$ nur gelang, den Hilfssatz 1 zu beweisen, und nur die längere elementare Diskussion im Beweis des Hilfssatzes 5 erlaubte die Bewältigung dieser Schwierigkeit.

Münster, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 5. Mai 1955)

KASCH, F.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 243—257 (1956)

Abschätzung der Dichte von Summenmengen

(Zweite Mitteilung)

Von

FRIEDRICH KASCH

§ 1. Fragestellung

In einer kürzlich erschienenen Arbeit mit dem gleichen Titel [2][1]) habe ich Abschätzungen der Dichte von Summenmengen, bei denen einer der Summanden eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen ist, aufgestellt. Richtunggebend für diese Untersuchungen war eine Vermutung von P. ERDÖS, die folgendes besagt: Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte α, $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der natürlichen Zahlen der mittleren Ordnung λ und γ die Dichte der Summenmenge $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, dann gilt[2])

$$\gamma \geq \alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.1}$$

In (I) habe ich Verbesserungen der bisherigen Abschätzungen angegeben, ohne jedoch diese Vermutung erreichen zu können.

Inzwischen bemerkte ich, daß man die Schlußweise aus (I) so weit ausbauen kann, daß damit (1.1) für hinreichend kleine α nicht nur erreicht, sondern übertroffen wird. Genauer: *Zu jedem λ gibt es ein positives Intervall $0<\alpha<\alpha_\lambda$, wo eine bessere Abschätzung als (1.1) gilt. Eine entsprechende Aussage besteht auch für die asymptotischen Dichten und die asymptotische mittlere Ordnung.*

Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung der in (I) aufgestellten und als Grundformeln bezeichneten Abschätzungen. Aus diesen verallgemeinerten Grundformeln kann dann auf zwei verschiedenen Wegen das genannte Ergebnis hergeleitet werden. Bei dieser Herleitung können wir uns im wesentlichen auf die ausführliche Darstellung in (I) stützen. Es werden hier die gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in (I) benutzt. Außerdem setzen wir hier sogleich $\alpha>0$ und $\lambda>1$ voraus, da sonst diese trivialen Fälle die Formulierung erschweren.

Zum Schluß deuten wir an, wie unsere Überlegungen auf Gitterpunktmengen im r-dimensionalen Raum ausgedehnt werden können. Das ist insofern von Interesse, als es bisher nicht gelungen ist, Dichteabschätzungen für die Summenmenge von zwei beliebigen Mengen positiver Dichte in dieser Richtung zu verallgemeinern[3]).

[1]) Diese Arbeit wird im folgenden mit (I) zitiert.

[2]) Siehe [6], S. 7; tatsächlich hat P. ERDÖS diese Vermutung für die Ordnung h an Stelle von λ ausgesprochen.

[3]) In dieser Richtung liegt in der Literatur lediglich eine Arbeit von L. CHEO [1] vor; dort wird eine Verallgemeinerung der SCHNIRELMANNschen Ungleichung auf den

§ 2. Die komplementären Grundformeln

1. Die Verallgemeinerung gegenüber (I) besteht vor allem darin, daß jetzt an Stelle der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ in der Definition der Funktionen $D(m)$, $E(m)$ und $\overline{E}(m)$ beliebige Mengen $\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{Q}}$ mit

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

treten. Dies sei also im folgenden der Fall. Ferner seien n eine feste natürliche Zahl und m eine natürliche Zahl mit $1 \leq m \leq n$.

Definitionen:

$D(m)$ sei gleich der Anzahl der verschiedenen Paare $(p, \overline{q})$ mit $p \in \mathfrak{P}(n)$, $\overline{q} \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$ und $\overline{q} - p = m$;

$E(m)$ sei gleich der Anzahl der verschiedenen Paare (p, q) mit $p \in \mathfrak{P}(n)$, $q \in \mathfrak{Q}(n)$ und $q - p = m$;

$\overline{E}(m)$ sei gleich der Anzahl der verschiedenen Paare $(\overline{p}, \overline{q})$ mit $\overline{p} \in \overline{\mathfrak{P}}(n)$, $\overline{q} \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$ und $\overline{q} - \overline{p} = m$.

Aus diesen Definitionen erhält man unmittelbar die

Folgerungen:

1. $D(m)$ ist gleich der Anzahl der Zahlen $p \in \mathfrak{P}(n)$ mit $p + m \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$;
2. $D(m)$ ist gleich der Anzahl der Zahlen $\overline{q} \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$ mit $\overline{q} - m \in \mathfrak{P}(n)$;
3. $E(m)$ ist gleich der Anzahl der Zahlen $p \in \mathfrak{P}(n)$ mit $p + m \in \mathfrak{Q}(n)$;
4. $\overline{E}(m)$ ist gleich der Anzahl der Zahlen $\overline{q} \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$ mit $\overline{q} - m \in \overline{\mathfrak{P}}(n)$.

Aus der 1. und 3. Folgerung ergibt sich offenbar die Gleichung $D(m) + E(m) = P(n - m)$, also

$$D(m) = P(n - m) - E(m). \tag{2.1}$$

Entsprechend erhält man aus der 2. und 4. Folgerung $D(m) + \overline{E}(m) = \overline{Q}(n) - \overline{Q}(m)$, also

$$D(m) = \overline{Q}(n) - \overline{Q}(m) - \overline{E}(m). \tag{2.2}$$

Die weiteren Überlegungen zielen darauf ab, in (2.1) und (2.2) $D(m)$ nach oben und die rechten Seiten nach unten abzuschätzen.

2. Es soll also zunächst $D(m)$ nach oben abgeschätzt werden, wobei die Basiseigenschaft von $\mathfrak{B}$ benutzt wird.

Hilfssatz 1. Ist t eine natürliche Zahl mit $1 \leq t < m$ und $b \in \mathfrak{B}$, dann gilt

$$D(m) \leq D(t) + D(m - t) + Q(n) - P(n), \tag{2.3}$$

$$D(b) \leq C(n) - Q(n) + P(n) - A(n). \tag{2.4}$$

zweidimensionalen Fall unter der Voraussetzung vorgenommen, daß eine der beiden betrachteten Mengen alle ganzzahligen Punkte einer der positiven Halbachsen enthält; in diesem Falle läßt sich die lineare Schlußweise anwenden. Darüber hinaus wird gezeigt, daß eine genaue Verallgemeinerung des Satzes von H. B. MANN auf die Ebene nicht möglich ist.

Beweis. Zum Beweis von (2.3) stützen wir uns auf die 1. Folgerung. Es sei p eine Zahl, die in $D(m)$ gezählt wird, d.h. $p+m=\overline{q}\in\overline{\mathfrak{Q}}(n)$. Ist bereits $p+t\in\overline{\mathfrak{Q}}(n)$, dann wird p in $D(t)$ gezählt. Ist jedoch $p+t\in\mathfrak{Q}(n)$, so unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall. $p+t$ liegt bereits in $\mathfrak{P}(n)$: $p+t=p'\in\mathfrak{P}(n)$. Dann wird p' in $D(m-t)$ gezählt, denn es ist $p'+m-t=p+m=\overline{q}\in\overline{\mathfrak{Q}}(n)$. Zu beachten ist dabei, daß die so zugeordneten Zahlen p' für verschiedene p verschieden sind.

2. Fall. $p+t$ liegt [in $\mathfrak{Q}(n)$, aber] nicht in $\mathfrak{P}(n)$. Die Anzahl aller Zahlen aus $\mathfrak{Q}(n)$, die nicht in $\mathfrak{P}(n)$ liegen, ist offenbar gleich $Q(n)-P(n)$. Damit ist (2.3) vollständig bewiesen.

Zum Beweis von (2.4) sei $b\in\mathfrak{B}(n)$ und $p+b=\overline{q}\in\overline{Q}(n)$. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.

1. Fall. p liegt bereits in $\mathfrak{A}(n)$: $p=a$. Dann ist $a+b=\overline{q}$ ein Element aus $\mathfrak{C}(n)$, das nicht in $\mathfrak{Q}(n)$ liegt, und die Anzahl aller Elemente aus $\mathfrak{C}(n)$, die nicht in $\mathfrak{Q}(n)$ liegen, ist gleich $C(n)-Q(n)$.

2. Fall. p ist ein Element aus $\mathfrak{P}(n)$, das nicht in $\mathfrak{A}(n)$ liegt. Die Anzahl aller derartigen Elemente ist gleich $P(n)-A(n)$. Damit ist (2.4) bewiesen.

Sei nun $m=b_1+\cdots+b_{l(m)}$ $(b_i\in\mathfrak{B})$ eine nach Voraussetzung existierende Darstellung von m, so besteht auf Grund von (2.3) und (2.4) die Ungleichung

$$\begin{aligned}D(m)&\leq l(m)\{C(n)-Q(n)+P(n)-A(n)\}+\{l(m)-1\}\{Q(n)-P(n)\}\\&=l(m)\{C(n)-A(n)\}-\{Q(n)-P(n)\}.\end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Summation von 1 bis $k\leq n$ unter Beachtung der Definition der mittleren Ordnung λ:

$$\sum_{m=1}^{k}D(m)\leq\lambda k\{C(n)-A(n)\}-k\{Q(n)-P(n)\}. \tag{2.5}$$

3. Es sollen nun die rechten Seiten von (2.1) und (2.2) nach unten abgeschätzt werden. Wir setzen

$$\Gamma(k)=\sum_{m=1}^{n-k-1}P(m)\{Q(m+k+1)-Q(m+k)\}^{14}), \tag{2.6}$$

$$\Delta(n)=\sum_{m=1}^{n}E(m) \tag{2.7}$$

und entsprechend

$$\overline{\Gamma}(k)=\sum_{m=1}^{n-k-1}\overline{P}(m)\{\overline{Q}(m+k+1)-\overline{Q}(m+k)\}, \tag{2.8}$$

$$\overline{\Delta}(n)=\sum_{m=1}^{n}\overline{E}(m). \tag{2.9}$$

[14]) Eine Summe, bei der die untere Summationsgrenze größer als die obere ist, sei gleich Null. (Dies ist hier für $k=n-1$ und $k=n$ der Fall.)

Hilfssatz 2. Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$(2.10)\quad \sum_{m=1}^{k} E(m) = \Delta(n) - \Gamma(k) \leq \binom{P(n)}{2} + \{Q(n) - P(n)\}\, P(n) - \Gamma(k);$$

$$(2.11)\quad \sum_{m=1}^{k} \overline{E}(m) = \overline{\Delta}(n) - \overline{\Gamma}(k) \leq \binom{\overline{Q}(n)}{2} + \{\overline{P}(n) - \overline{Q}(n)\}\, \overline{Q}(n) - \overline{\Gamma}(k).$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die in (2.10) und (2.11) links stehenden Gleichungen. Für $k = n-1$ und $k = n$ sind diese offenbar erfüllt. Für $k \leq n-2$ ist zum Beweis der in (2.10) auftretenden Gleichung offenbar

$$(2.12)\quad \sum_{m=k+1}^{n} E(m) = \Gamma(k) = \sum_{m=1}^{n-k-1} P(m)\,\{Q(m+k+1) - Q(m+k)\}$$

nachzuweisen. Nach Definition von $E(m)$ werden in der links stehenden Summe alle verschiedenen Paare (p, q) mit $p \in \mathfrak{P}(n)$, $q \in \mathfrak{Q}(n)$ und $q - p \geq k+1$ gezählt. Die Anzahl dieser Paare ist bei festem q offenbar gleich $P(q-k-1)$. Durch Summation über alle $q \in \mathfrak{Q}(n)$ mit $q \geq k+2$ (denn nur solche q kommen wegen $p > 0$ in Frage) erhält man

$$\sum_{m=k+1}^{n} E(m) = \sum_{\substack{q \in \mathfrak{Q}(n) \\ q \geq k+2}} P(q-k-1).$$

Wegen

$$Q(m) - Q(m-1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \in \mathfrak{Q} \\ 0 & \text{falls } m \notin \mathfrak{Q} \end{cases}$$

folgt daraus

$$\sum_{m=k+1}^{n} E(m) = \sum_{m=k+2}^{n} P(m-k-1)\,\{Q(m) - Q(m-1)\}$$
$$= \sum_{m=1}^{n-k-1} P(m)\,\{Q(m+k+1) - Q(m+k)\} = \Gamma(k),$$

womit (2.12) bewiesen ist. Die gleiche Überlegung für die komplementären Mengen liefert die in (2.11) stehende Gleichung.

Zum Beweis von (2.10) und (2.11) sind noch die Abschätzungen

$$(2.13)\quad \Delta(n) = \sum_{m=1}^{n} E(m) \leq \binom{P(n)}{2} + \{Q(n) - P(n)\}\, P(n),$$

$$(2.14)\quad \overline{\Delta}(n) = \sum_{m=1}^{n} \overline{E}(m) \leq \binom{\overline{Q}(n)}{2} + \{\overline{P}(n) - \overline{Q}(n)\}\, \overline{Q}(n)$$

nachzuweisen. In $\sum_{m=1}^{n} E(m)$ werden alle verschiedenen Paare (p, q) mit $p \in \mathfrak{P}(n)$, $q \in \mathfrak{Q}(n)$ und $q - p > 0$ gezählt. Wegen $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q}$ werden dabei auch alle Paare (p, p') mit $p, p' \in \mathfrak{P}(n)$ und $p' - p > 0$ gezählt, und diese Anzahl ist gleich $\binom{P(n)}{2}$. Es bleibt dann noch die Anzahl der Paare (p, q) mit $p \in \mathfrak{P}(n)$,

$q \in \mathfrak{Q}(n)$, aber $q \notin \mathfrak{P}(n)$ und $q - p > 0$ abzuschätzen. Läßt man die Forderung $q - p > 0$ fallen, so ist diese Anzahl genau gleich $\{Q(n) - P(n)\}\, P(n)$. Damit ist (2.13) bewiesen. Zum Beweis von (2.14) beachte man $\overline{\mathfrak{Q}} \subseteq \overline{\mathfrak{P}}$ und schließe sinngemäß.

4. Aus (2.1), (2.5) und (2.10) erhält man die folgende

1. Grundformel[5]):

$$(2.15)\quad \begin{cases} \lambda k\{C(n) - A(n)\} - k\{Q(n) - P(n)\} \geq \sum\limits_{m=n-k}^{n-1} P(m) + \\ + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} P(m)\{Q(m+k+1) - Q(m+k)\} - \binom{P(n)}{2} - \{Q(n) - P(n)\}P(n). \end{cases}$$

Entsprechend folgt aus (2.2), (2.6) und (2.11) die

2. Grundformel:

$$(2.16)\quad \begin{cases} \lambda k\{C(n) - A(n)\} - k\{Q(n) - P(n)\} \geq k\overline{Q}(n) - \sum\limits_{m=1}^{k} \overline{Q}(m) + \\ + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} \overline{P}(m)\{\overline{Q}(m+k+1) - \overline{Q}(m+k)\} - \binom{\overline{Q}(n)}{2} - \{\overline{P}(n) - \overline{Q}(n)\}\overline{Q}(n). \end{cases}$$

Für $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{A}$ erhält man daraus die Grundformeln aus (I). Im folgenden sollen die Grundformeln in den Spezialfällen $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$ ausgewertet werden.

§ 3. Auswertung der 1. Grundformel für $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$.

1. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis der folgenden Abschätzungen:

Finiter Fall. Setzt man

$$(3.1)\qquad c_1(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1 + \sqrt{\alpha})^2}, \qquad c_3(\alpha, \lambda) = c_1(\alpha)\,\frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1 + \alpha)\sqrt{\alpha}},$$

dann gilt

$$(3.2)\qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\,\frac{1 - \alpha}{\lambda}\right)^{6}).$$

Asymptotischer Fall. Besteht mit den durch (3.1) gegebenen Funktionen die Ungleichung

$$(3.3)\qquad (\lambda^* - 1)\sqrt{\alpha^*} + \alpha^*\left\{\frac{3}{2}(1 + \alpha^*) - \sqrt{\alpha^*}\right\} > \alpha^*(1 + \alpha^*)\left(1 + c_3(\alpha^*, \lambda^*)\,\frac{1 - \alpha^*}{\lambda^*}\right),$$

dann gilt

$$(3.4)\qquad \gamma^* \geq \alpha^*\left(1 + c_3(\alpha^*, \lambda^*)\,\frac{1 - \alpha^*}{\lambda^*}\right).$$

Die Voraussetzung (3.3), die im finiten Fall fehlt, stellt keine wesentliche Einschränkung dar, denn z.B. für $\lambda^* \geq \frac{3}{2}$ ist sie bereits identisch in α^*

[5]) Man beachte Fußnote 4 auf S. 245.

[6]) In (I) wurde diese Ungleichung mit $c_1(\alpha)$ an Stelle von $c_3(\alpha, \lambda)$ hergeleitet.

erfüllt, und zu jedem kleineren λ^* gibt es eine positive Zahl α_0^*, so daß (3.3) für alle $\alpha^* < \alpha_0^*$ richtig ist.

Das Wesentliche an $c_3(\alpha, \lambda)$ ist die Tatsache, daß

$$\lim_{\alpha \to 0} c_3(\alpha, \lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \tag{3.5}$$

gilt. Daraus und aus der vorhergehenden Bemerkung folgt, daß es zu jedem λ bzw. λ^* positive Zahlen α_λ bzw. α_λ^* gibt, so daß für alle $\alpha < \alpha_\lambda$ bzw. $\alpha^* < \alpha_\lambda^*$ die ERDÖSsche Vermutung (1.1) bzw. die entsprechend asymptotische Ungleichung übertroffen werden.

In der Abbildung in (I) ist $c_3(\alpha, \lambda)$ für $\lambda = \frac{19}{6}$ eingetragen. In diesem Falle kann $\alpha_\lambda > \frac{1}{9}$ gewählt werden.

2. Als Hilfsmittel zum Beweis leiten wir jetzt einen Reduktionssatz her, der auch an sich von Interesse ist.

Reduktionssatz. *Es sei $\varphi(\alpha)$ eine für $0 \leq \alpha \leq 1$ monoton wachsende Funktion von α, und es sei $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Menge nichtnegativer ganzer Zahlen. Gilt dann für alle Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen $\mathfrak{A}$ mit $1 \in \mathfrak{A}$, und alle natürlichen Zahlen n mit $\min\limits_{i=1,\ldots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n}$ die Ungleichung*

$$(A + B)(n) > \varphi(\alpha)\, n,$$

wobei $(A+B)(n)$ die Anzahlfunktion der Summenmenge $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ und α die Dichte von $\mathfrak{A}$ seien, dann gilt diese Ungleichung für alle natürlichen Zahlen n[7]*).*

Beweis. Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung; sie sei bis $n-1$ bewiesen. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge mit $1 \in \mathfrak{A}$, dann können wir $\min\limits_{i=1,\ldots,n} \frac{A(i)}{i} < \frac{A(n)}{n}$ annehmen, da die Behauptung sonst nach Voraussetzung gilt. Wird das Minimum für $i = m_0$ angenommen, so ist folglich $m_0 < n$. Ferner können wir ohne Einschränkung $\frac{A(m_0)}{m_0} = \alpha$ annehmen, da dies sonst durch Auffüllen der Menge $\mathfrak{A}$ von der Zahl $n+1$ ab erreicht werden kann; dies ändert nichts an $(A+B)(n)$, und die Dichte von $\mathfrak{A}$ wird dabei höchstens vergrößert. Insbesondere gilt dann $\alpha > 0$. Wir betrachten jetzt die Menge $\mathfrak{A}_0 = \{a - m_0\}$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $a > m_0$. Für diese gilt

$$A_0(r) = A(r + m_0) - A(m_0) \geq (r + m_0)\,\alpha - m_0 \alpha = r\alpha, \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

also $\alpha_0 \geq \alpha > 0$, wenn α_0 die Dichte von $\mathfrak{A}_0$ bezeichne. Für $r = 1$ folgt $1 \in \mathfrak{A}_0$. Nach Induktionsvoraussetzung hat man daher

$$(A_0 + B)(n - m_0) > \varphi(\alpha_0)\,(n - m_0) \geq \varphi(\alpha)\,(n - m_0).$$

[7]) Der Satz gilt auch, wenn man nicht $1 \in \mathfrak{A}$ und nur $(A+B)(n) \geq \varphi(\alpha)\, n$ fordert. — Der Beweisgedanke für diesen Satz findet sich in anderer Form bereits bei D. RAIKOV [5] (beim Beweis des Analogon zum $\alpha - \beta$-Theorem), wo Dichtesätze für Mengen reeller Zahlen bewiesen werden. — Es sei darauf hingewiesen, daß sich die Basisabschätzungen in [5], bei denen der Beweis von ERDÖS-LANDAU [4] in die mengentheoretische Sprechweise übertragen wird, durch Übertragung unserer Überlegungen in analoger Weise verschärfen lassen.

Zusatz bei der Korrektur: Wie mir Herr E. WIRSING mitteilte, war ihm vorstehender Reduktionssatz auch bekannt.

Liegt eine natürliche Zahl $r \leq n - m_0$ in $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}$, so liegt $r + m_0$ in $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, und zwar im Intervall $m_0 < r + m_0 \leq n$; also gilt

$$(A_0 + B)(n - m_0) \leq (A + B)(n) - (A + B)(m_0).$$

Die beiden letzten Ungleichungen zusammen liefern die Behauptung.

Wir weisen darauf hin, daß auf Grund dieses Satzes die Beweise der Abschätzungen in (I) im finiten Fall vereinfacht werden können, da dadurch die Minimalbetrachtung [(I), S. 377] beim Beweis von (I.1.8) und die Untersuchung des Koeffizienten von $A(n)$ [(I), S. 383] beim Beweis von (I.1.9) überflüssig werden.

3. Zum Beweis von (3.2) gehen wir von der 1. Grundformel (2.15) aus, in der wir $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$ setzen:

$$(3.6)\quad \begin{cases} (\lambda - 1)\, k\{C(n) - A(n)\} \geq \sum\limits_{m=n-k}^{n-1} A(m) + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{C(m+k+1) - C(m+k)\} - \\ \quad - \binom{A(n)}{2} - \{C(n) - A(n)\} A(n). \end{cases}$$

Wegen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ gilt $C(m+k+1) - C(m+k) \geq A(m+k+1) - A(m+k)$, so daß aus (3.6) folgt:

$$(3.7)\quad \begin{cases} (\lambda - 1)\, k\{C(n) - A(n)\} \geq \sum\limits_{m=n-k}^{n-1} A(m) + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{A(m+k+1) - A(m+k)\} - \\ \quad - \binom{A(n)}{2} - \{C(n) - A(n)\} A(n). \end{cases}$$

Bis auf den Summanden $-\{C(n) - A(n)\} A(n)$ stimmt die rechte Seite dieser Ungleichung mit der rechten Seite von (I.3.1) überein; links steht jetzt jedoch der Faktor $\lambda - 1$ an Stelle von λ in (I.3.1). Wir machen jetzt die Voraussetzung $k \leq n - 2$ und können dann die auf (I.3.1) folgende Schlußweise unter gewissen Einschränkungen für den vorliegenden Fall übernehmen. Einer erneuten Rechtfertigung bedürfen die dort im Anschluß an (I.3.5) gemachten Voraussetzungen.

Zunächst kann auch jetzt $\alpha \leq \frac{1}{2}$ angenommen werden, da sonst bereits $c_1(\alpha)$ besser als $c_3(\alpha, \lambda)$ ist. Ferner kann $n \geq 4$ angenommen werden, wie jetzt gezeigt werden soll. Ist $C(n) = n$, so folgt (3.2) unmittelbar aus der Tatsache, daß

$$\alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\frac{1-\alpha}{\lambda}\right) < \alpha + \sqrt{\alpha(1-\alpha)} < 1$$

gilt. Dies ist wegen $1 \in \mathfrak{A}$ und $1 \in \mathfrak{B}$ für $n = 1$ und $n = 2$ der Fall, sowie für $n = 3$, wenn $\mathfrak{A}(3) \neq \{1\}$ ist. Sei nun $\mathfrak{A}(3) = \{1\}$; dann ist $\alpha \leq \frac{1}{3}$. Für $\lambda < \frac{3}{2}$ müssen die Zahlen 1 und 2 in $\mathfrak{B}$ enthalten sein, so daß auch jetzt $C(3) = 3$ folgt. Sei also $\lambda \geq \frac{3}{2}$; dann gilt

$$\frac{C(3)}{3} \geq \frac{2}{3} \geq \alpha + \frac{1}{3} > \alpha + \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$$

$$\geq \alpha\left(1 + \frac{1-\alpha}{\lambda - 1 + \alpha}\right) > \alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Es darf also jetzt $n \geq 4$ vorausgesetzt werden.

Ferner kann auch jetzt $\varrho n \geq 1$ angenommen werden. Ist $\varrho n = \sqrt{\alpha}(1+\sqrt{\alpha})^{-1} n < 1$, so hat man wegen $n \geq 4$ die Schranke $\alpha < \frac{1}{9}$. Es ist dann zunächst

$$\frac{C(n)}{n} \geq \frac{2}{n} > \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}};$$

kann die Ungleichung

$$\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} \geq \alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$$

bewiesen werden, so ist man fertig. Diese ist richtig, falls

$$\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} \geq \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}+1\right) \tag{3.8}$$

gilt, denn es ist

$$\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}+1\right) = \alpha + \sqrt{\alpha} \geq \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}} \geq \alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Die Ungleichung (3.8) gilt aber wegen $\alpha < \frac{1}{9}$.

Wir können nun ebenso wie im Anschluß an (I.3.5) weiterschließen und erhalten in Analogie zu (I.3.7)

$$(\lambda-1)\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}\frac{C(n)}{n} > \left((\lambda-1)\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}+\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\right)\frac{A(n)}{n} -$$
$$-\frac{1+\alpha}{2}\frac{A^2(n)}{n^2} + \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho) - (1+\alpha)\{C(n)-A(n)\}\frac{A(n)}{n^2}.$$

Setzt man darin $\varrho = \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}$ ein, so folgt

$$\left\{\begin{aligned}(\lambda-1)\sqrt{\alpha}\frac{C(n)}{n} > \Big((\lambda-1)\sqrt{\alpha} + \alpha\Big\{\frac{3}{2}(1+\alpha) - \sqrt{\alpha}\Big\} - (1+\alpha)\frac{C(n)}{n}\Big)\times \\ \times \frac{A(n)}{n} + \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\,\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})(2-\alpha-\sqrt{\alpha})}{(1-\alpha)^3}.\end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

Auf Grund des Reduktionssatzes können wir darin $\frac{A(n)}{n}$ durch α ersetzen und dann ergibt sich unmittelbar (3.2).

Im asymptotischen Fall erhält man durch eine entsprechende Überlegung eine Formel, die aus (3.9) hervorgeht, wenn man darin überall α durch $\alpha' = \alpha - \varepsilon$, λ durch $\lambda' = \lambda + \mu$ ersetzt und ein Restglied K/n auf der rechten Seite addiert. In dieser Formel darf $\frac{A(n)}{n}$ durch α' ersetzt werden, wenn der Koeffizient von $\frac{A(n)}{n}$ nicht negativ ist. Ist dieser Koeffizient jedoch negativ, so sichert Voraussetzung (3.3) unsere Behauptung; dabei hat man zu berücksichtigen, daß ε und μ so klein gewählt werden können, daß auch für die gestrichenen Größen auf der linken Seite von (3.3) diese Ungleichung richtig bleibt. Durch Grenzübergang folgt schließlich (3.4).

Es soll darauf hingewiesen werden, daß $c_3(\alpha, \lambda)$ [bzw. $c_3(\alpha^*, \lambda^*)$] nicht der beste Faktor ist, den man auf diesem Wege herleiten kann. Eine Verbesserung läßt sich erreichen, indem man ϱ nicht nur in Abhängigkeit von α, sondern

auch noch von λ (und eventuell γ) wählt. Das führt jedoch zu sehr unübersichtlichen Formeln; der so zu gewinnende Faktor hat außerdem auch nur wieder die Eigenschaft, für $\alpha \to 0$ gegen $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ zu streben. Wir wollen daher nicht weiter auf diese Möglichkeit eingehen.

§ 4. Auswertung der Grundformeln für $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$.

1. Wie schon erwähnt, erhält man die Grundformeln in (I) aus (2.15) und (2.16) für $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{A}$. Wir betrachten hier die aus (2.15) und (2.16) für $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$ folgenden Abschätzungen, bei denen auf der rechten Seite statt A wie in (I) jetzt überall C steht:

$$(4.1)\quad \begin{cases} \lambda k\{C(n) - A(n)\} \geq \sum\limits_{m=n-k}^{n-1} C(m) + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} C(m)\{C(m+k+1) - \\ \qquad\qquad - C(m+k)\} - \binom{C(n)}{2}; \end{cases}$$

$$(4.2)\quad \begin{cases} \lambda k\{C(n) - A(n)\} \geq k\overline{C}(n) - \sum\limits_{m=1}^{k} \overline{C}(m) + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} \overline{C}(m)\{\overline{C}(m+k+1) - \\ \qquad\qquad - \overline{C}(m+k)\} - \binom{\overline{C}(n)}{2}. \end{cases}$$

Während in (I) aus den Grundformeln die Abschätzungen

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha + c_1(\alpha)\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}, \qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha + c_1(1-\alpha)\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}$$

hergeleitet worden waren, erhält man jetzt aus (4.1) und (4.2) die folgenden Abschätzungen, die auch an sich von Interesse sind:

$$(4.3)\qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha + c_1(\gamma)\frac{\gamma(1-\gamma)}{\lambda},$$

$$(4.4)\qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha + c_1(1-\gamma)\frac{\gamma(1-\gamma)}{\lambda}.$$

Entsprechend erhält man im asymptotischen Fall:

$$(4.5)\qquad \gamma^* \geq \alpha^* + c_1(\gamma^*)\frac{\gamma^*(1-\gamma^*)}{\lambda^*},$$

$$(4.6)\qquad \gamma^* \geq \alpha^* + c_1(1-\gamma^*)\frac{\gamma^*(1-\gamma^*)}{\lambda^*}\ ^{8}).$$

---

[8]) Bei der Andeutung des Beweises der entsprechenden Formel in (I) (Beweis von c_2^*, S. 384), habe ich irrtümlich geschrieben, daß die SCHNIRELMANNsche Ungleichung auch im asymptotischen Falle gelte. Das ist bekanntlich im allgemeinen nicht der Fall und wird auch gar nicht benutzt. Tatsächlich gebraucht wird sie in (I) nur für $\alpha^* > \frac{1}{2}$ und $\beta^* \geq \frac{8}{17}$ (also $\lambda^* \leq \frac{25}{17}$), da die Behauptung sonst unmittelbar aus der zu (I.4.10) analogen asymptotischen Formel folgt. Aber bereits für $\alpha^* > \frac{1}{2}$ und $\beta^* \geq \frac{1}{2}$ ergibt sich ihre Gültigkeit aus dem Dichtesatz von M. KNESER [3] (oder auch aus schwächeren Abschätzungen). — Bei dieser Gelegenheit sei noch auf zwei Druckfehler in (I) hingewiesen; auf S. 370, 7. Zeile v. u. muß es „H. ROHRBACH [8]" (statt [10]) und auf S. 376, 3. Zeile v. u. „A. STÖHR [11]" (statt [13]) lauten.

Die Beweise können — abgesehen von einer Vereinfachung — fast unmittelbar aus (I) (§§ 3, 4) übernommen werden; man hat dort auf der rechten Seite der Abschätzungen nur überall $A(n), \alpha, \ldots$ durch die entsprechenden Größen $C(n), \gamma, \ldots$ zu ersetzen. Man muß sich lediglich klarmachen, daß die dort für $A(n), \alpha, \ldots$ gemachten Voraussetzungen auch für $C(n), \gamma, \ldots$ gelten. Das soll jetzt erfolgen.

Wir betrachten zunächst den finiten Fall. Wegen $\alpha < 1$ und $1 \in \mathfrak{B}$ gilt stets $\frac{C(n)}{n} > \alpha$; (4.3) und (4.4) sind also für $\gamma = 1$ erfüllt, so daß analog zur Voraussetzung über α in (I) jetzt $0 < \gamma < 1$ vorausgesetzt werden kann. Darüber hinaus kann jetzt noch die zusätzliche Voraussetzung gemacht werden, daß γ für einen endlichen Wert n von $\frac{C(n)}{n}$ angenommen wird. Ist dies nämlich nicht der Fall, dann gilt offenbar $\gamma = \gamma^*$ und $\frac{C(n)}{n} > \gamma \; (n = 1, 2, \ldots)$; die finiten Abschätzungen (4.3) und (4.4) folgen dann wegen $\alpha^* \geq \alpha$ und $\lambda^* \leq \lambda$ aus den asymptotischen Abschätzungen (4.5) und (4.6).

Die Ungleichungen (4.1) und (4.2) werden nun für eine Zahl n mit $\frac{C(n)}{n} = \gamma$ analog zur Schlußweise in (I, §§ 3, 4) abgeschätzt, wobei allerdings jetzt keine Minimumbetrachtungen notwendig sind, die, wie im Anschluß an den Reduktionssatz schon erwähnt, auch in (I) wegfallen können.

Entsprechend schließt man auch im asymptotischen Fall. So wird z. B. die auf (I.3.11) folgende Minimumbetrachtung jetzt durch die folgende Überlegung ersetzt. Nach Definition von γ^* gibt es eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen n mit $\frac{C(n)}{n} \to \gamma^*$, die dann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für hinreichend großes n

$$\gamma' = \gamma^* - \varepsilon \leq \frac{C(n)}{n} \leq \gamma^* + \varepsilon = \gamma''$$

genügen. In der (I.3.11) entsprechenden Ungleichung

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda' \{\varrho + \gamma'(1-\varrho)\} \dfrac{C(n) - A(n)}{n} \geq \gamma' \{1 - (1-\gamma')\,\varrho\} \dfrac{C(n)}{n} - \\ \qquad - \dfrac{1+\gamma'}{2} \dfrac{C^2(n)}{n^2} + \dfrac{(1-\gamma'^2)\,\gamma'}{2} \varrho(2-\varrho) + K \dfrac{1}{n} \end{array} \right.$$

und bei dem folgenden Grenzübergang $n \to \infty$ seien nur solche Zahlen n berücksichtigt. Aus (4.7) folgt dann

$$\lambda' \{\varrho + \gamma'(1-\varrho)\} (\gamma'' - \alpha') \geq \{1 - (1-\gamma')\,\varrho\} \gamma'^2 - \frac{1+\gamma'}{2} \gamma''^2 + \\ + \frac{(1-\gamma'^2)\,\gamma'}{2} \varrho(2-\varrho) + K \frac{1}{n}.$$

Setzt man $\varrho = \frac{\sqrt{\gamma'}}{1+\sqrt{\gamma'}}$ ein, so erhält man

$$\gamma'' \geq \alpha' + \frac{1 + \sqrt{\gamma'} + \gamma'}{(1+\sqrt{\gamma'})^2} \frac{\gamma'(1-\gamma')}{\lambda'} - \frac{1+\gamma'}{2\lambda' \sqrt{\gamma'}} \gamma^* \varepsilon + K \frac{1}{n},$$

woraus (4.5) folgt.

2. Aus (4.3) und (4.5) können wieder Abschätzungen von γ bzw. γ^* durch Ausdrücke in α bzw. α^* hergeleitet werden. Es seien

$$c_1(x)=\frac{1+\sqrt{x}+x}{(1+\sqrt{x})^2}, \quad \sigma(x)=x\left(1+c_1(x)\frac{1-x}{\lambda-c_1(x)}\right), \quad c_0(x)=c_1(\sigma(x))$$

$$\nu(x)=\frac{1}{2c_0(x)}\left[\sqrt{\{\lambda-(1-2x)c_0(x)\}^2+4x(1-x)c_0^3(x)}-\{\lambda-(1-2x)c_0(x)\}\right]$$

$$c_4(x)=c_4(x,\lambda)=c_0(x)\frac{\lambda}{\lambda-c_0(x)\{1-2x-\nu(x)\}}.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 0}\sigma(x)=0$ gilt $\lim\limits_{x\to 0}c_0(x)=1$; daraus folgt $\lim\limits_{x\to 0}\nu(x)=0$ sowie

$$\lim_{x\to 0}c_4(x)=\frac{\lambda}{\lambda-1}. \tag{4.8}$$

Mit diesen Funktionen gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\gamma>\alpha\left(1+c_4(\alpha,\lambda)\frac{1-\alpha}{\lambda}\right), \tag{4.9}$$

$$\gamma^*>\alpha^*\left(1+c_4(\alpha^*,\lambda^*)\frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right). \tag{4.10}$$

Es ist klar, daß die Ungleichungen (4.9) und (4.10) richtig bleiben, wenn man $\nu(\alpha)$ bzw. $\nu(\alpha^*)$ durch größere Zahlen ersetzt. Zum Beispiel gelten die Ungleichungen

$$\nu(\alpha)\leq c_1(\alpha)\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda-c_1(\alpha)(1-2\alpha)}, \qquad \nu(\alpha)\leq\sqrt{\alpha(1-\alpha)},$$

aus denen bereits (4.8) folgt.

Die Beweise von (4.9) und (4.10) sollen nicht im einzelnen ausgeführt werden. Wir beschränken uns auf folgenden Hinweis: Zum Beweis von (4.9) gehe man von (4.3) in der Form

$$\gamma\left(1-c_1(\gamma)\frac{1-\gamma}{\lambda}\right)\geq\alpha \tag{4.11}$$

aus, wobei die linke Seite eine monoton wachsende Funktion von γ ist; nimmt man an, daß (4.9) falsch sei, so kann man in (4.11) γ durch $\alpha\left(1+c_4\frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$ ersetzen, was durch einige Rechnung zum Widerspruch führt.

§ 5. Abschätzung der Anzahlfunktion einer Summenmenge von Gitterpunkten.

Es liegt die Frage nahe, ob man mit den Methoden der additiven Zahlentheorie auch additive Eigenschaften von Gitterpunktmengen in einem endlichdimensionalen Raum untersuchen kann. Im folgenden soll gezeigt werden, daß diese Frage für das in dieser Arbeit behandelte Problem zu bejahen ist. Wir wollen uns darauf beschränken, die ERDÖS-LANDAUsche Ungleichung $\gamma\geq\alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{2\lambda}\right)$ in diesem Sinne zu verallgemeinern.

Unter einem Gitterpunkt des r-dimensionalen Raums verstehen wir einen Punkt mit ganzrationalen Koordinaten, den wir in der Form

$$\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r) \quad (n_i \text{ ganz})$$

schreiben. Es sei $\mathfrak{B}$ die Menge der Gitterpunkte mit nichtnegativen Koordinaten und $\mathfrak{N}$ die Menge aller vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkte aus $\mathfrak{B}$. Die Gitterpunkte aus $\mathfrak{N}$ wollen wir als *natürliche Gitterpunkte* bezeichnen.

Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ Untermengen von $\mathfrak{B}$. Unter $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathfrak{B}$ verstehen wir die Menge aller $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathfrak{A}$ mit $a_i \leq n_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Die *Anzahlfunktion* $A(\mathfrak{n})$ (mit $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$) der Menge $\mathfrak{A}$ sei die Anzahl der natürlichen Gitterpunkte aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$. In Analogie zur Definition im linearen Fall wird

$$\overline{\operatorname{fin}}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = \alpha \tag{5.1}$$

als *(finite) Dichte* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet[9]). Dann gilt für jeden natürlichen Gitterpunkt $\mathfrak{n}$: $A(\mathfrak{n}) \geq \alpha N(\mathfrak{n})$.

Wir setzen im folgenden $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}$ und $0 < \alpha < 1$ voraus. Aus $0 < \alpha$ folgt, daß die Einheitspunkte, d.h. die Punkte

$$(1, 0, \ldots, 0), \ (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \ (0, \ldots, 0, 1)$$

in $\mathfrak{A}$ enthalten sind, und aus $\alpha < 1$ folgt, daß $\mathfrak{A}$ nicht alle natürlichen Gitterpunkte enthält.

Sei $\bar{\mathfrak{A}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{N}$ mit der Anzahlfunktion $\bar{A}(\mathfrak{n})$, dann hat man offenbar $\bar{A}(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n}) - A(\mathfrak{n})$, und es gilt $\bar{A}(\mathfrak{n}) \leq (1-\alpha) N(\mathfrak{n})$.

Unter der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ mit der Dichte γ und der Anzahlfunktion $C(\mathfrak{n})$ ist die Menge aller in der Gestalt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_r + b_r)$$

darstellbaren Gitterpunkte mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ zu verstehen. Wir setzen voraus, daß der Nullpunkt und die Einheitspunkte in $\mathfrak{B}$ enthalten sind; dann ist offenbar $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$, und jeder natürliche Gitterpunkt $\mathfrak{m}$ läßt sich in der Form

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{b}_1 + \cdots + \mathfrak{b}_{l(\mathfrak{m})} \quad (\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{B})$$

darstellen. Sei $l(\mathfrak{m})$ die kleinste natürliche Zahl, für die eine solche Darstellung möglich ist. Es werde

$$\overline{\operatorname{fin}}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{1}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} l(\mathfrak{m}) = \lambda \tag{5.2}$$

als *mittlere Ordnung* von $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Ist λ endlich, dann wird $\mathfrak{B}$ eine *Basis endlicher Ordnung* der natürlichen Gitterpunkte genannt. Dies sei im folgenden für $\mathfrak{B}$ der Fall.

[9]) Diese Definition der Dichte wird im 2-dimensionalen Fall bereits von L. CHEO [1] benutzt.

Unter dieser Voraussetzung gilt

$$\gamma \geq \alpha\left(1+\frac{1}{2^r}\,\frac{1-2^{r-1}\alpha}{\lambda}\right); \tag{5.3}$$

dies ist für $r=1$ die anfangs erwähnte Ungleichung von ERDÖS-LANDAU.

Wir können auf Grund dieser Ungleichung sagen, daß $\mathfrak{B}$ eine wesentliche Komponente für alle Mengen mit einer Dichte kleiner als 2^{-r+1} darstellt.

Zum Beweis wird analog zu den Überlegungen aus § 2 geschlossen, wobei wir sogleich die Voraussetzung $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}=\mathfrak{A}$ machen. Sei $\mathfrak{n}$ ein fester natürlicher Gitterpunkt und $\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})$. Dann sei

$D(\mathfrak{m})$ die Anzahl der verschiedenen Paare $(\mathfrak{a},\bar{\mathfrak{a}})$ mit $\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, $\bar{\mathfrak{a}}\in\bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$ und $\bar{\mathfrak{a}}-\mathfrak{a}=\mathfrak{m}$;

$E(\mathfrak{m})$ sei die Anzahl der verschiedenen Paare $(\mathfrak{a}',\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{a}',\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ und $\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}=\mathfrak{m}$.

Damit gilt offenbar

$$D(\mathfrak{m})+E(\mathfrak{m})=A(\mathfrak{n}-\mathfrak{m}).$$

Sei nun $\mathfrak{t}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{m})$, dann besteht analog zum linearen Fall die Beziehung

$$D(\mathfrak{m})\leq D(\mathfrak{t})+D(\mathfrak{m}-\mathfrak{t});$$

der Beweis erfolgt wie dort. Ebenfalls ist auch jetzt

$$D(\mathfrak{b})\leq C(\mathfrak{n})-A(\mathfrak{n}) \qquad (\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{n})).$$

Wegen (5.2) erhält man folglich

$$\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})} D(\mathfrak{m})\leq\lambda N(\mathfrak{n})\{C(\mathfrak{n})-A(\mathfrak{n})\}.$$

Andererseits gilt

$$\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})} E(\mathfrak{m})\leq\binom{A(\mathfrak{n})}{2}, \tag{5.4}$$

wobei es sich jetzt im allgemeinen nicht wie im linearen Fall um eine Gleichung handelt.

Aus den bisherigen Angaben erhält man:

$$\begin{cases} \lambda N(\mathfrak{n})\{C(\mathfrak{n})-A(\mathfrak{n})\}\geq\sum\limits_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})}A(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})-\sum\limits_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})}E(\mathfrak{m})\geq \\ \geq\sum\limits_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})}A(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})-\binom{A(\mathfrak{n})}{2}\geq\alpha\sum\limits_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})-\binom{A(\mathfrak{n})}{2} \end{cases} \tag{5.5}$$

also

$$\lambda\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}\geq\lambda\frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}-\frac{A^2(\mathfrak{n})}{2N^2(\mathfrak{n})}+\frac{\alpha}{N^2(\mathfrak{n})}\left(\frac{N(\mathfrak{n})}{2}+\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})\right). \tag{5.6}$$

Da die Funktion $\xi\left(\lambda-\frac{\xi}{2}\right)$ mit $\alpha\leq\xi\leq 1$ und $\lambda\geq 1$ ihren minimalen Wert für $\xi=\alpha$ annimmt, folgt aus dieser Ungleichung

$$\lambda\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}\geq\lambda\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha}{N^2(\mathfrak{n})}\left(\frac{N(\mathfrak{n})}{2}+\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})\right). \tag{5.7}$$

Um (5.3) zu erhalten, haben wir jetzt $N(\mathfrak{n})$ und $\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})$ zu berechnen. Offenbar ist

$$N(\mathfrak{n})=\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)-1,$$

also gilt

$$\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})=\sum_{\substack{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})\\ \mathfrak{m}\neq\mathfrak{n}}}N(\mathfrak{m})=\sum_{m_1=0,\ldots,n_1}\cdots\sum_{m_r=0,\ldots,n_r}\left\{\prod_{i=1}^{r}(m_i+1)-1\right\}-N(\mathfrak{n})=$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\frac{(n_i+1)(n_i+2)}{2}-2\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)+1.$$

Daraus folgt

$$\frac{N(\mathfrak{n})}{2}+\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})=\frac{1}{2^r}\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)(n_i+2)-\frac{3}{2}\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)+\frac{1}{2}.$$

Zum Beweis von (5.3) ist jetzt wegen (5.7) nur noch nachzuweisen, daß dieser Ausdruck größer oder gleich $\frac{1}{2^r}N^2(\mathfrak{n})$ ist, und das ist offenbar der Fall, wenn die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{2^r}\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)(n_i+2)\geq\frac{1}{2^r}\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2^r}\right)\prod_{i=1}^{r}(n_i+1). \tag{5.8}$$

Dabei kann $n_i>0$ $(i=1,\ldots,r)$ vorausgesetzt werden, da für $n_i=0$ die i-te Komponente keinen Beitrag liefert. Für $r=1$ ist (5.8) offenbar erfüllt:

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1).$$

Der Beweis erfolgt nun durch Induktion nach r mit dem Induktionsbeginn $r=2$. Für $r=2$ hat man wegen $n_1\geq 1$, $n_2\geq 1$:

$$\frac{1}{4}(n_1+1)(n_1+2)(n_2+1)(n_2+2)>$$

$$>\frac{1}{4}(n_1+1)^2(n_2+1)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{4}\right)(n_1+1)(n_2+1).$$

Die Behauptung sei nun für r richtig, dann folgt

$$\frac{1}{2^{r+1}}\prod_{i=1}^{r+1}(n_i+1)(n_i+2)=\frac{1}{2^r}\left(\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)(n_i+2)\right)\frac{(n_{r+1}+1)(n_{r+1}+2)}{2}\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^{r+1}}\prod_{i=1}^{r+1}(n_i+1)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2^r}\right)\frac{n_{r+1}+2}{2}\prod_{i=1}^{r+1}(n_i+1).$$

Wegen

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2^r}\right)\frac{n_{r+1}+2}{2} \geq \left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2^r}\right)\frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}-\frac{2}{2^{r+1}} \qquad (r=2,3,\ldots)$$

ist (5.8) auch für $r+1$ erfüllt. Damit ist (5.3) vollständig bewiesen.

Literatur.

[1] Cheo, L.: On the density of sets of Gaussian integers. Amer. Math. Monthly **58**, 619—624 (1951). — [2] Kasch, F.: Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Math. Z. **62**, 368—387 (1955). — [3] Kneser, M.: Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. Math. Z. **58**, 459—484 (1953). — [4] Landau, E.: Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts No. 35. Cambridge 1937. — [5] Raikov, D.: On the addition of point-sets in the sense of Schnirelmann (Russisch mit englischem Auszug). Mat. Sbornik **5** (= 47), 425—440 (1939). — [6] Selberg, S.: A survey of some recent results in additive number theory. Mat. Tidsskr. A **1949**, 1—15.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 13. Juni 1955)

WILANSKY, A., u. K. ZELLER
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 258—269 (1956)

Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit

Von

ALBERT WILANSKY und KARL ZELLER

1. Einleitung

Wir betrachten Limitierungsverfahren der Form

$$A\text{-}\lim x_k = \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \mathfrak{y} = A\,\mathfrak{x} \equiv y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n\,k}\,x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

(Gelegentlich verweisen wir auch auf Verfahren mit stetigen Parametern.) Früher untersuchte man hauptsächlich spezielle Matrixverfahren. Jetzt bemüht man sich, die wesentlichen Eigenschaften dieser Matrizen allgemein zu formulieren. Eine solche Eigenschaft ist

$$\text{(AB)} \qquad \sup_{m,\,n} \left| \sum_{k=0}^{m} a_{n\,k}\,x_k \right| < \infty \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}),$$

wo $\mathfrak{A}$ das Wirkfeld des Verfahrens ist und (AB) auf Abschnittsbeschränktheit hindeutet.

(AB) ist bei den C_p-Verfahren mit $0 < p \leq 1$ und bei gewissen NÖRLUND- und RIESZ-Mitteln erfüllt, aber lange nicht bei allen Verfahren. (AB) (und nahe verwandte Eigenschaften, worauf wir aber im folgenden nicht genauer eingehen) wurden von zahlreichen Autoren zu Umkehr-, Vergleichs- und Konvergenzfaktorensätzen ausgenützt, wir erwähnen CESÀRO, HARDY, JACOB, BOSANQUET, LORENTZ. Gewisse Approximations- und Verträglichkeitssätze von MAZUR, BANACH, DAREVSKY hängen auch mehr oder minder mit (AB) zusammen.

Die Verfasser haben in mehreren Arbeiten seit 1950 (AB) und die damit zusammenhängenden Eigenschaften und Ergebnisse in funktionalanalytischer Weise gedeutet. Kurz gesagt, handelt es sich um die Einführung einer geeigneten Basis in das als F- oder B-Raum aufgefaßte Wirkfeld, was unmittelbar Anwendungen auf die obengenannten und andere Probleme gestattet. Im Anschluß an Publikationen, Vorträge und persönliche Mitteilungen der Verfasser haben weitere Autoren die Theorie und vor allem die Anwendungen auf spezielle Verfahren ausgebaut: JURKAT, KNOPP, MACPHAIL, PEYERIMHOFF. Es sei betont, daß ein Großteil der allgemeinen Ergebnisse schon in den älteren speziellen Untersuchungen steckt.

Die Bedeutung der funktionalanalytischen Methoden besteht hier darin, daß sie die Bedingung (AB) in einen größeren Rahmen stellen, allgemeine Resultate mit einfachem Beweis ergeben und Übertragungen auf andere

Arten von Limitierbarkeit (absolut, stark) gestatten. Ferner kann man durch sie häufig den genauen Geltungsbereich von Sätzen abgrenzen und z.B. feststellen, daß ein gewisses Resultat genau dann gilt, wenn (AB) erfüllt ist. Auch erkennt man, daß die Ergebnisse weniger von der Matrix als vielmehr vom Wirkfeld abhängen.

Wir wollen hier einen kurzen Überblick über die Theorie geben. Dabei vereinfachen wir viele Beweise und geben zum Teil neue Resultate. Zum Schluß behandeln wir die mit (AB) zusammenhängende Frage der Konvergenzfaktoren bei der starken Limitierbarkeit.

2. Funktionalanalytische Grundlagen

Wir betrachten stetige lineare Operationen T_n, die einen B-Raum $\mathfrak{B}$ in einen ebensolchen $\mathfrak{C}$ abbilden. Bekanntlich gelten folgende Sätze.

Beschränktheitsprinzip. *Ist* $\sup_n \|T_n(\mathfrak{x})\| < \infty$ *für jedes* $\mathfrak{x}$, *so gilt* $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

Konvergenzprinzip. *Existiert* $\lim_n T_n(\mathfrak{x}) = T(\mathfrak{x})$ *für jedes* $\mathfrak{x}$, *so ist* T *linear und stetig.*

Grundmengenprinzip. *Ist* $\sup_n \|T_n\| < \infty$ *und existiert* $\lim_n T_n(\mathfrak{x})$ *für jedes* $\mathfrak{x}$ *einer Grundmenge, so sogar für jedes* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$. *(Eine Grundmenge ist eine solche, deren lineare abgeschlossene Hülle der ganze Raum ist.)*

Fortsetzungsprinzip. *Eine Linearform* f, *die in einer linearen Teilmenge* $\mathfrak{D}$ *eines B-Raumes* $\mathfrak{B}$ *erklärt ist und dort*

$$|f(\mathfrak{x})| \leq M \cdot \|\mathfrak{x}\|$$

genügt, kann linear auf ganz $\mathfrak{B}$ *fortgesetzt werden, so daß die Ungleichung erhalten bleibt.*

Ist die Matrix A normal (d.h. gilt $a_{nn} \neq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $a_{nk} = 0$ $(k > n)$), so ist das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ ein B-Raum mit der Norm $\sup_n |y_n|$. Dabei sind die Abbildungen $\mathfrak{x} \to x_k$ linear und stetig („BK-Raum"). Jede stetige Linearform f in $\mathfrak{A}$ ist von der Gestalt $f(\mathfrak{x}) = g \cdot \lim y_n + \sum g_n y_n$ mit $\sum |g_n| < \infty$. Auch das Nullwirkfeld $\mathfrak{A}_0$ (die Menge der zu Null limitierten Folgen) ist ein BK-Raum mit der genannten Norm. Die stetigen Linearformen in $\mathfrak{A}_0$ gestatten die obige Darstellung mit $g = 0$.

3. Die Bedingung (AB)

Wir setzen bis auf weiteres A als normal voraus, so daß $\mathfrak{A}$ ein BK-Raum ist. Das Beschränktheitsprinzip zeigt, daß (AB) gleichbedeutend ist mit der Existenz eines $M < \infty$, für das

$$\text{(AB*)} \qquad \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k \right| \leq M \cdot \sup_r |y_r| \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{A},\ m, n = 0, 1, \ldots)$$

gilt. Hier und im folgenden interessiert natürlich nur der Fall $m < n$. Da man bei einer normalen Matrix durch Abänderung der x_k mit $k > m$ alle y_r

mit $r > m$ zu Null machen kann, ist (AB*) gleichbedeutend mit

$$(AB^{**}) \qquad \left|\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k\right| \leq M \cdot \max_{0 \leq r \leq m} |y_r| \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{A};\ m, n = 0, 1, \ldots),$$

wo wieder M fest ist und man $\mathfrak{x}$ sogar alle beliebigen Folgen durchlaufen lassen darf (vgl. [20], [34]). Die Form (AB**) bezeichnet man gewöhnlich als Mittelwertsatz vom RIESZ-Typ.

Wir geben zwei Kriterium zum Nachweis von (AB) an, die von M. RIESZ [32], [33] und BOSANQUET [4] stammen und z.B. auf die Verfahren C_p $(0 < p \leq 1)$ angewendet werden können. Siehe auch [3], [13, S. 68], [14, S. 28], [16], [17], [18], [20], [35], [37].

Kriterium 1 (M. RIESZ). *Erfüllt die Inverse B der nichtnegativen normalen Matrix A die Beziehungen $b_{nk} \leq 0$ für $k < n$, $\sum_{k=0}^{n} b_{nk} \geq 0$ für alle n, so genügt A der Ungleichung* (AB**) *mit* $M = 1$.

Beweis. Es genügt, (AB**) für $m < n$ zu beweisen. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{r=0}^{k} b_{kr} y_r = \sum_{r=0}^{m} y_r \sum_{k=r}^{m} a_{nk} b_{kr}$$

und weiter wegen $AB = I$

$$= \sum_{r=0}^{m} y_r \left(-\sum_{k=m+1}^{n} a_{nk} b_{kr}\right) = \sum_{r=0}^{m} y_r c_r,$$

wobei $c_r = c_r(m, n)$ als Abkürzung für den Klammerausdruck steht. Wegen der Voraussetzung über b_{nk} ist $c_r \geq 0$, Einsetzen von $y_r = 1$ zeigt

$$\sum_{r=0}^{m} c_r = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{r=0}^{k} b_{kr} y_r \leq \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \sum_{r=0}^{k} b_{kr} = 1,$$

wobei wir die Voraussetzung über $\sum b_{nk}$ gebrauchen. Insgesamt ist

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k\right| \leq \max_{0 \leq r \leq m} |y_r| \sum_{k=0}^{m} |c_k| \leq \max_{0 \leq r \leq m} |y_r| \cdot 1,$$

w. z. z. w.

Die Eigenschaften der Inversen B sind nicht leicht festzustellen (gewisse Resultate erhält man ähnlich wie in [15], vgl. auch Aussagen über endliche Matrizen, etwa [27]), daher ist das nächste Kriterium oft leichter anzuwenden.

Kriterium 2 (BOSANQUET). *Besteht zwischen den Zeilen einer normalen Matrix A eine Beziehung*

$$a_{n+1,k} = d_{nk} a_{nk} \quad \text{mit} \quad 1 \geq d_{n0} \geq d_{n1} \geq \cdots \geq d_{nn} \geq 0 \qquad (0 \leq k \leq n,\ n = 0, 1, \ldots),$$

so ist (AB**) *mit* $M = 1$ *erfüllt.*

Beweis. Wir nehmen $m < n + 1$ an. Die ABELsche Ungleichung liefert zusammen mit der Voraussetzung

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{n+1,k} x_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{m} d_{nk} a_{nk} x_k\right| \leq \max_{0 \leq r \leq m} \left|\sum_{k=0}^{r} a_{nk} x_k\right|.$$

Induktion nach n (der Fall $n=0$ ist klar) ergibt die Abschätzung, da bei $m \geqq n+1$ nichts zu beweisen ist.

Bemerkungen. 1. Erfüllt eine nichtnegative Matrix A die Voraussetzungen von Kriterium 2, so ändert sich daran nichts, wenn wir die Hauptdiagonalelemente vergrößern.

2. Genügt eine nichtnegative Matrix A den Voraussetzungen von Kriterium 2, so auch denen von Kriterium 1. (Man weist die geforderten Eigenschaften von B durch Induktion nach dem Zeilenindex nach.) Die Voraussetzungen von Kriterium 1 sind nahe verwandt (jedoch nicht ganz äquivalent) mit (AB); manche Arbeiten gehen von diesen Voraussetzungen statt von (AB) aus.

Es folgt nun eine notwendige Bedingung für (AB), mit der man z.B. zeigen kann, daß die C_p mit $p>1$ (AB) nicht erfüllen. [Weitere notwendige Bedingungen sind aus dem folgenden zu entnehmen. Roh kann man sagen, daß nur verhältnismäßig schwache Verfahren (AB) genügen.]

Kriterium 3. *Wird* (AB) *von der normalen Matrix A erfüllt, so gibt es ein $M<\infty$ mit $|a_{nk}| \leq M \cdot |a_{nn}|$ für $k, n = 0, 1, \ldots$.*

Zum Beweis verwendet man (AB**) statt (AB) und setzt spezielle Folgen x_k ein, die aus einer Eins und sonst aus Nullen bestehen.

4. Die funktionalanalytische Deutung

Die früheren Anwendungen von (AB) beruhen auf der Summationsvertauschung

$$\sum_n g_n \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k x_k \sum_n g_n a_{nk},$$

die bei $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ und $\sum |g_n| < \infty$ gestattet ist. Dieser Weg führt auch zu allgemeinen Resultaten. Eleganter ist jedoch ein Vorgehen, bei dem man (AB) zur Bildung einer geeigneten Basis in $\mathfrak{A}$ ausnützt ([39], [40], [43], [45]).

A heißt eine Sp-Matrix, wenn alle Spaltenlimites $\lim_n a_{nk} = a_k$ vorhanden sind. Wir setzen

$$\mathfrak{e} = \{1, 1, 1, \ldots\}, \quad \mathfrak{e}_0 = \{1, 0, 0, \ldots\}, \quad \mathfrak{e}_1 = \{0, 1, 0, 0, \ldots\}, \ldots.$$

Eine Sp-Matrix enthält alle $\mathfrak{e}_i$ in ihrem Wirkfeld, was für die funktionalanalytische Deutung gebraucht wird (in den bisherigen Arbeiten wurde A sogar als Sp_0-Matrix, d.h. $a_k = 0$, vorausgesetzt).

Satz 1 (Basis). *Erfüllt eine normale Sp-Matrix A die Bedingung* (AB), *so bilden die $\mathfrak{e}_i$ entweder allein oder zusammen mit einer weiteren Folge $\mathfrak{d}$ eine Basis im BK-Raum $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}^*$ die lineare abgeschlossene Hülle der $\mathfrak{e}_i$. Dann ist $\mathfrak{A}^*$ ein Unterraum des B-Raumes $\mathfrak{A}$, und die $\mathfrak{e}_i$ bilden im B-Raum $\mathfrak{A}^*$ eine Grundmenge. Die durch $\mathfrak{x} \to x_0 \mathfrak{e}_0 + \cdots + x_n \mathfrak{e}_n$ definierten Operationen T_n sind in $\mathfrak{A}^*$ linear und stetig, da $\mathfrak{A}^*$ ein BK-Raum ist. Wegen (AB) gilt $\sup_n \|T_n\| < \infty$, das Grundmengenprinzip zeigt $T_n \mathfrak{x} \to \mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{x}$, d.h. die $\mathfrak{e}_i$ bilden eine Basis in $\mathfrak{A}^*$. Wir haben noch zu zeigen, daß entweder $\mathfrak{A}^*$, oder die lineare

Hülle von $\mathfrak{A}^*$ und einem gewissen $\mathfrak{d}$, gleich $\mathfrak{A}$ ist. (Im Falle $a_k = 0$ ist das trivial.) Jede stetige Linearform f in $\mathfrak{A}$ ist von der Gestalt $f(\mathfrak{x}) = g \cdot \lim y_n + \sum g_n y_n$ mit $\sum |g_n| < \infty$, und Summationsvertauschung mittels (AB) ergibt sogar die (nicht immer einzige) Darstellung

$$f(\mathfrak{x}) = g \cdot \lim y_n + \sum_k f_k x_k.$$

Für stetige Linearformen f, die in $\mathfrak{A}^*$ verschwinden, gilt $g \cdot a_k + f_k = 0$, d.h. alle solchen Linearformen hängen von einer einzigen linear ab. Dies zeigt (Fortsetzungsprinzip), daß $\mathfrak{A}$ die lineare Hülle von $\mathfrak{A}^*$ und höchstens einem weiteren Element ist.

Bemerkungen. 1. Daß beide Fälle, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}^*$, möglich sind, zeigen die Beispiele A = Einheitsmatrix und $A = \{a_{nk}\}$ mit $a_{nk} = 1$ $(k \leq n)$ $a_{nk} = 0$ sonst („Summationsmatrix S").

2. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 konvergiert $\sum a_k x_k$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ (maximal inset [*40*]). Denn im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ ergibt sich das wieder aus dem Grundmengenprinzip. Ist aber $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}^*$, so gibt es eine stetige Linearform $f \neq 0$, die in $\mathfrak{A}^*$ verschwindet, für die also mit den oben gebrauchten Bezeichnungen $g \cdot a_k + f_k = 0$ und $g \neq 0$ gilt. Da die f_k „Konvergenzfaktoren" sind, sind es auch die a_k. Diese Betrachtung zeigt auch: Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ und jede stetige Linearform f in $\mathfrak{A}$ konvergiert $\sum x_k f(\mathfrak{e}_k)$ (funktionale Abschnittskonvergenz, FAK [*45*]). Wichtig ist, daß (AB) im ganzen Wirkfeld gilt. Man kann leicht ein A angeben, so daß eine gewisse Folge $\mathfrak{x}$ des Wirkfeldes (AB) erfüllt, daß aber $\sum a_k x_k$ divergiert.

3. Statt „A hat (AB)", sagt man auch „A ist eine ‚controlled matrix'". Statt „die $\mathfrak{e}_k$ bilden eine Basis in $\mathfrak{A}^*$" sagen wir auch „$\mathfrak{A}^*$ besitzt Abschnittskonvergenz" (AK [*45*]). Ist A permanent oder „koregulär" (s. [*38*]), so können wir (unter der Voraussetzung von Satz 1) $\mathfrak{d} = \mathfrak{e}$ wählen. Bilden in einem Wirkfeld $\mathfrak{A}$ die $\mathfrak{e}_k$ eine Basis, so gilt (AB). Bilden hingegen die $\mathfrak{e}_k$ nur zusammen mit einem $\mathfrak{d}$ eine Basis, so muß (AB) nicht unbedingt gelten. Beispiel: $a_{nk} = -1$ $(k < n)$, $a_{nk} = 1$ $(k = n)$, $a_{nk} = 0$ $(k > n)$. Das Beispiel kann auch so abgeändert werden, daß $\mathfrak{d} = \mathfrak{e}$ ist. Bilden bei konvergenztreuen A die $\mathfrak{e}_k$ und $\mathfrak{e}$ eine Basis in $\mathfrak{A}$, so gilt (AB). Wir vermuten: Bilden die $\mathfrak{e}_k$ mit einem $\mathfrak{d}$ zusammen eine Basis und hat A „maximal inset", so gilt (AB).

4. Haben die normalen Matrizen A und B dasselbe Wirkfeld, so erfüllen beide gleichzeitig (AB) oder nicht. Zum Beweis setzt man etwa $A = (AB^{-1})B$ und bemerkt, daß AB^{-1} konvergenztreu ist. Vgl. auch die allgemeineren Methoden in [*44*], [*45*]. Man kann also sagen, daß (AB) nicht von der Matrix, sondern vom Wirkfeld abhängt (Invarianz).

5. Die Normen von $f_{mn}(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k$ lassen sich oft genauer bestimmen, z.B. gilt $\|f_{mn}\| = \sum_{k=0}^{m} a_{nk}$ unter den Voraussetzungen von Kriterium 1 bei $a_{nk} \geq 0$ und $\sum_k a_{nk} = 1$. Das wurde in [*35*] bemerkt und in [*21*] für Vergleichssätze ausgenützt.

6. Jedes $\mathfrak{x}$ [A erfülle (AB)] kann durch die Abschnitte der Entwicklung nach $\mathfrak{d}, \mathfrak{e}_i$ approximiert werden. Das führt zu Verträglichkeitssätzen, vgl. [2], [9], [26], [42], [44], [45].

Satz 1 enthält den Kern aller weiteren Überlegungen. Manche der Ergebnisse folgen fast unmittelbar aus Satz 1, in anderen Fällen sind zusätzliche Beweisschritte nötig, die aber häufig aus älteren Arbeiten über spezielle Verfahren zu entnehmen sind. Die Ergebnisse über Umkehrsätze, Konvergenzfaktoren, Vergleich sind daher nicht eigentlich neu. Daß die funktionalanalytische Methode trotzdem wesentliche Vorteile bietet, haben wir schon oben ausgeführt.

Die in Satz 1 auftretende Alternative stört bei allgemeinen Formulierungen. Um das zu umgehen, betrachten wir von jetzt an Sp-Matrizen mit $a_k = 0$ (sog. Sp_0-Matrizen). Dann ist $\mathfrak{A}^*$ die Menge $\mathfrak{A}_0$ der zu Null limitierten Folgen (das Nullwirkfeld) und daher $\mathfrak{A}^* \neq \mathfrak{A}$. Außerdem betrachten wir $\mathfrak{A}_0$ statt $\mathfrak{A}$, weil dadurch die prägnantesten Formulierungen zustande kommen. Bei Übertragungen auf $\mathfrak{A}$ muß dann nur noch die Folge $\mathfrak{d}$ berücksichtigt werden, was wir dem Leser überlassen, ebenso die Formulierung der Resultate im allgemeinen Fall. Die Voraussetzung „A normal" behalten wir nach wie vor bei.

5. Umkehrsätze

Wir verwenden eine bei speziellen Verfahren bekannte Methode, die im Zusammenhang mit (AB) zum erstenmal in [45] formuliert wurde.

Satz 2 (Umkehrprinzip). *Erfüllt die normale Sp_0-Matrix die Bedingung* (AB), *so gilt für jedes* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$

$$\sup_n \left| \sum_{k=r}^{s} a_{nk} x_k \right| \to 0 \quad \text{für} \quad r, s \to \infty .$$

Beweis. Der in Rede stehende Ausdruck ist gleich $\left\| \sum_{k=r}^{s} x_k \mathfrak{e}_k \right\|$. Da die $\mathfrak{e}_k$ eine Basis bilden, folgt die Behauptung.

Anwendungen. 1. Größenordnungsbedingung. Setzt man $r = s$, so erhält man $x_k = o\left(1/\sup_n |a_{nk}|\right)$, was wegen Kriterium 3 dasselbe wie $x_k = o(1/a_{kk})$ (für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$) bedeutet. Das ist natürlich eine „beste" Größenordnungsabschätzung (betrachte die Inverse). Bei speziellen Verfahren wurde diese Methode verwendet von [14, S. 36], [13, S. 95], [11] usw., in Zusammenhang mit (AB) in [45], [47] und, unter Zusatzbedingungen, in [20].

2. Mercersätze. Ist $1/a_{kk}$ beschränkt, so gilt $x_k \to 0$ für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$. So wurde schon in [14, S. 46] vorgegangen, vgl. auch die oben genannte Literatur. Ferner kann man so zeigen, daß das bekannte Verfahren

$$A = (1 - \alpha) C_1 + \alpha I \qquad (\alpha > 0)$$

konvergenzgleich ist [Nachweis von (AB) mittels Bemerkung 1 zu Kriterium 2]. Umgekehrt erfüllt ein normales konvergenzgleiches Verfahren A

die Bedingung (AB) und $1/a_{kk} = O(1)$; das ist selbstverständlich auf Grund der Aussage, daß (AB) nur vom Wirkfeld abhängt (§ 4.4).

Schließlich ergibt sich ein kurzer Beweis für den Satz: Eine permanente Matrix, die nur beschränkte Folgen limitiert, ist konvergenzgleich [denn aus der Voraussetzung folgt (AB) und $1/a_{kk} = O(1)$].

3. Umkehrsätze. Eine bekannte Methode zum Beweis des $O - C_1$-Umkehrsatzes (s. etwa [10], [50]) läßt sich zur Aufstellung von Tauberbedingungen bei allgemeinen (AB)-Matrizen benützen ([47]).

6. Faktorfolgen und Vergleichssätze

Mit Hilfe von (AB) lassen sich teilweise tiefliegende Vergleichssätze für CESÀRO-, NÖRLUND-, stetige und unstetige RIESZ-Mittel usw. gewinnen. Das ist schon früh erkannt worden: [6, S. 427], [7], [11], [12], [13, Th. 14, Th. 23], [16], [24], [32], [33]. In diesen Arbeiten ist der Kern der allgemeinen Ergebnisse enthalten, die unmittelbar aus Satz 3 folgen ([46], [47]). Neuere Anwendungen findet man bei [21]. Faktorfolgen wurden schon in [1] betrachtet.

Satz 3 (Faktorfolgen). *Wird* (AB) *von der Matrix A erfüllt, so gilt*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k d_k\right| \leq M \cdot \|\mathfrak{x}\| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |d_k - d_{k-1}| \qquad (d_{-1} = 0,\ n = 0, 1, \ldots)$$

mit einem nur von A abhängigen M.

Partielle Summation und (AB*) liefern den Beweis. Setzen wir neben (AB) noch Sp_0 voraus, so liefert das Grundmengenprinzip unmittelbar zwei Ergebnisse. Faktorfolgen: Ist $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$ und $\sum |d_k - d_{k-1}| < \infty$, so gilt $\{x_k d_k\} \in \mathfrak{A}_0$. Vergleich: Ist die Sp_0-Matrix B so beschaffen, daß

$$b_{nk} = d_{nk} \cdot a_{m_n k} \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk} - d_{n,k-1}| \leq M \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

ist, so gilt $\mathfrak{A}_0 \subseteqq \mathfrak{B}_0$. — Die Freiheit in der Wahl von m_n erleichtert den Beweis mancher Vergleichssätze. Beim Vergleich zweier Verfahren A und C verwendet man oft eine Zerlegung $C = B + (C - B)$ und behandelt B nach der eben geschilderten Methode sowie $(C - B)$ mittels direkter Abschätzung; vgl. die oben genannte Literatur.

7. Stetige Linearformen und Konvergenzfaktoren

Wir nennen Zahlen f_k Konvergenzfaktoren für eine Folgenmenge $\mathfrak{X}$, wenn $\sum f_k x_k$ für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ konvergiert. Anwendungen von (AB) auf Konvergenzfaktorenprobleme bei speziellen Verfahren wurden von [4], [5], [24] gegeben. Diese Resultate lassen sich leicht verallgemeinern. Funktionalanalytisch gesehen beruhen die Ergebnisse auf Satz 4 ([40], [43], [45]), aus dem sich alles weitere ableiten läßt. Herr PEYERIMHOFF, der von einem der Verfasser von dieser Möglichkeit unterrichtet wurde, hat die Anwendungen ausgebaut [28], [29].

Satz 4 (Konvergenzfaktoren). *Hat die normale Sp_0-Matrix A die Eigenschaft* (AB), *so besteht vermittels*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n y_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x_k \qquad (\mathfrak{y} = A\mathfrak{x},\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0)$$

eine 1-1-1-Beziehung zwischen den stetigen Linearformen f in $\mathfrak{A}_0$, den absolut konvergenten Reihen $\sum g_n$ und den Konvergenzfaktoren f_k für $\mathfrak{A}_0$.

Beweis. Die Beziehung zwischen f und $\sum g_n$ ist bekannt. Sind die f_k Konvergenzfaktoren, so definiert $\sum f_k x_k$ nach dem Konvergenzprinzip eine stetige Linearform. Ist f eine stetige Linearform, so konvergiert wegen Satz 1 die Reihe $\sum f(e_k) x_k = \sum f_k x_k$, woraus sich die Behauptung ergibt.

Bemerkungen. 1. Man kann daher sagen, daß Zahlen f_k genau dann Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{A}_0$ sind, wenn es eine stetige Linearform f in $\mathfrak{A}_0$ mit $f(e_k) = f_k$ gibt oder wenn es Zahlen g_n mit $\sum |g_n| < \infty$ und $\mathfrak{g}A = \mathfrak{f}$ gibt. Gilt umgekehrt $\sum |g_n| < \infty$ für $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}A^{-1}$ (Auflösung der Gleichung), so sind für geeignetes $\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{h}A^{-1} = 0$ die Zahlen $f_k + h_k$ Konvergenzfaktoren ($\mathfrak{f} + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}A$). Durch geeignete Zusatzforderungen an $\mathfrak{f}$ (Größenordnung u. ä.) neben der genannten Bedingung über $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}A^{-1}$ erzwingt man $\mathfrak{h} = 0$, so daß die f_k selber Konvergenzfaktoren sind. In dieser Gestalt erscheinen die Konvergenzfaktorensätze bei speziellen Verfahren meist. Anders aufgefaßt, beruht das Problem darauf, in

$$\mathfrak{f}\mathfrak{x} = \mathfrak{f}(A^{-1}A)\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{f}A^{-1})\,(A\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}\mathfrak{y}$$

die Summationsvertauschung zu rechtfertigen.

2. Bemerkenswert ist noch, daß man bei $\mathfrak{A}_0$ nicht mehr Konvergenzfaktoren erhält, wenn man von $\sum f_k x_k$ nur Summierbarkeit nach einem bestimmten Matrixverfahren fordert, und daß der Konvergenzfaktorensatz in der vorliegenden Form im wesentlichen an (AB) (genauer: an FAK) gebunden ist, s. [*45*].

3. Sind die f_k Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{A}_0$ [wo A eine permanente (AB)-Matrix ist], so ist die Reihe $\sum F_k(x_k - x_{k-1})$ $\left(\text{mit } F_k = \sum_{l=k}^{\infty} f_l\right)$ A-summierbar für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$, da die bei partieller Summation auftretende „Restfolge" $F_n x_n$ nach § 6 (Faktorfolgen) A-limitierbar ist. Dies führt zur Bestimmung von Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren für A-summierbare Reihen, s. [*5*] und [*20*], [*22*].

4. Für eine Sp-Matrix A ist (AB) mit der Eigenschaft PMI äquivalent, die nach Definition besagt, daß für jedes mit A gleichstarke Matrixverfahren B die Reihe $\sum_k x_k \lim_n b_{nk}$ ($\mathfrak{x} \in \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$) konvergiert. Der Beweis beruht auf der Darstellung stetiger Linearformen in $\mathfrak{A}$ durch gleichstarke Limitierungsverfahren, vgl. [*40*].

5. Die betrachteten Reihen $\sum f_k x_k$ usw. konvergieren im allgemeinen nicht absolut. Auf der Darstellung der stetigen Linearformen in $\mathfrak{A}^*$ beruhen gewisse Inäquivalenzsätze, s. [*45*], [*49*].

8. Sonstiges

1. Nicht ganz befriedigend ist, daß unsere Theorie die Verfahren C_p mit $p > 1$ nicht erfaßt. Man kann sich jedoch behelfen, indem man durch mehrfache partielle Summation von p auf einen Index zwischen 0 und 1 zurückschließt $\left(C_p = \text{diag}\left\{\binom{n+p}{n}^{-1}\right\} S^{p-[p]}\, S^{[p]}\right)$, wie das seit jeher bei den C-Verfahren gemacht wurde. Allgemeiner kann man Matrizen behandeln, die Produkte von (AB)-Matrizen sind, muß jedoch große Einschränkungen in Kauf nehmen. Am günstigsten ist die Situation noch bei Umkehrsätzen. Eine befriedigende allgemeine Theorie ist noch nicht vorhanden, für spezielle Resultate vgl. man [5], [8], [14], [19].

Ein anderer Weg beruht darauf, daß in den Nullwirkfeldern vieler Verfahren, z. B. C_p, die e_i eine „TOEPLITZ-Basis" bilden (d. h. $\sum x_i e_i$ konvergiert für jedes $x \in \mathfrak{A}_0$ gegen x im Sinne eines bestimmten TOEPLITZ-Verfahrens). Diese Theorie ist noch in Entwicklung, erscheint aber erfolgversprechend (vgl. [48]).

Schließlich kann man in einem Wirkfeld diejenige Untermenge betrachten, in der die Entwicklung nach den e_i möglich ist, vgl. [45], [47], [49].

2. Manche unserer Ergebnisse sind nicht daran gebunden, daß $\mathfrak{A}$ ein Wirkfeld ist, sondern lassen sich auf beliebige Folgenräume verallgemeinern, s. [45]. Insbesondere sind Übertragungen auf andere Arten von Limitierbarkeit (absolut, stark) möglich. Bei absoluter Summierbarkeit wurde dies in [29], [30] durchgeführt. Am besten geht man von der Matrix A aus, die die Folge-Reihe-Form der Transformation gibt. Gilt $a_{nk} = 0$ $(k > n)$, $a_{nk} > 0$ $(k = n)$, $a_{nk} < 0$ $(k < n)$ so hat die Inverse B nichtnegative Glieder ([15], Beweis am einfachsten durch Entwicklung in eine geometrische Reihe). Gilt noch $\sum_n a_{nk} \geq 0$, so erfüllt A die (AB) bei absoluter Limitierung entsprechende Eigenschaft. Aus (AB) folgt hier jedoch noch nicht, daß die e_i zusammen mit höchstens einer weiteren Folge b eine Basis im Wirkfeld bilden. (Das beruht darauf, daß der Dual des Raumes der absolut konvergenten Reihen nicht separabel ist.) Man erzwingt dies mit Hilfe einer „Grundmengenbedingung". Sonst bereitet die Übertragung keine besonderen Schwierigkeiten.

3. Man kann auch nichtnormale Matrizen A untersuchen. Im allgemeinen benötigt man hierfür F-Räume ([44], [45]). Hier ist das jedoch nicht nötig. Denn erfüllt eine Matrix A ohne leere Spalten (AB), so ist das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ ein BK-Raum mit der Norm

$$\|x\| = \sup_{m,n} \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k \right| .$$

Bei der Übertragung der Sätze auf nichtnormale Matrizen muß man darauf achten, daß gewisse „unangenehme" Matrizen (AB) erfüllen, z. B. Matrizen, die außer $\{0, 0, \ldots\}$ keine Folge limitieren, oder Matrizen, die aus einer divergenten Spalte und sonst Nullen bestehen.

9. Starke Limitierbarkeit

Eine Folge $\mathfrak{x}$ heißt stark C_1-limitierbar zum Werte x, wenn

$$|x_0 - x| + \cdots + |x_n - x| = o(n+1)$$

ist. Die zum Werte Null stark C_1-limitierbaren Folgen bilden einen BK-Raum mit der Norm

$$\|\mathfrak{x}\| = \sup_n \frac{|x_0| + \cdots + |x_n|}{n+1}.$$

In diesem BK-Raum bilden die $\mathfrak{e}_i$ eine Basis. Daher ist unsere Theorie anwendbar. Bei der konkreten Durchführung sind noch gewisse Schwierigkeiten zu überwinden, wie wir am Beispiel der Konvergenzfaktoren ausführen.

Satz 5 (Konvergenzfaktoren bei starker Limitierbarkeit). *Folgende Eigenschaften einer Zahlenfolge $\{f_k\}$ sind gleichbedeutend:*

1° *$\sum f_k x_k$ konvergiert für jede stark C_1-limitierbare Folge $\{x_k\}$.*

2° *Es gilt $f_k \to 0$ und*

$$\sum_{p=0}^{\infty} |f_{k_p}|\,|k_p - k_{p-1}| < \infty,$$

wenn die k_p folgendermaßen induktiv definiert sind:

$k_{-1} = -1$; k_p ist die kleinste ganze Zahl $> k_{p-1}$ mit $|f_{k_p}| > |f_k|$ für $k > k_p$.

Bemerkung. Die $|f_{k_p}|$ sind demnach echte Betragsmaxima „nach rechts". Außerdem ist $|f_{k_p}| \geq |f_k|$ für $k_{p-1} < k < k_p$. Die Konvergenzfaktorenbedingungen unterscheiden sich von dem sonst Gewohnten, vgl. unten.

Beweis. Es wird genügen, den Beweis zu skizzieren.

1° $\curvearrowright$ 2°. Natürlich gilt $f_k \to 0$. Die Folge

$$x_k = \begin{cases} k_p - k_{p-1} & \text{für } k = k_p,\ p = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist zwar im allgemeinen nicht stark C_1-limitierbar, jedoch gilt $\|\mathfrak{x}\| = 1$. Daher ist für jedes $v_k \to 0$ die Folge $v_k x_k$ stark C_1-limitierbar, woraus die Konvergenz der Reihe in 2° folgt.

2° $\curvearrowright$ 1°. Es genügt zu zeigen, daß für jedes $\mathfrak{x}$ mit $\|\mathfrak{x}\| = 1$ die Beziehung $\sum |f_k x_k| \leq \sum |f_{k_p}|\,(k_p - k_{p-1})$ gilt. Dies sehen wir durch schrittweise Abänderung von $\mathfrak{x}$ unter Erhaltung der Bedingung $\|\mathfrak{x}\| = 1$ ein. Wir vergrößern $|x_{k_0}|$ auf Kosten anderer $|x_k|$ mit möglichst kleinem Index k, bis $|x_{k_0}|$ den Wert $k_0 - k_{-1}$ erreicht. Analoges tun wir bei $k_1, k_2, \ldots$. Abgesehen von dem trivialen Fall, wo das Verfahren abbricht, gelangen wir so zu der im ersten Beweisteil genannten Folge. Bei jedem Schritt wird $\sum |f_k x_k|$ nicht verkleinert, w. z. z. w.

Zum Vergleich führen wir weitere Konvergenzfaktoren für verschiedene Arten der C_1-Limitierbarkeit an. Am einfachsten gewinnt man die Bedingungen durch Betrachtung der Matrix, die die C_1-Transformierte $\{y_n\}$ in $\{f_k x_k\}$ abbildet, vgl. [36]. Im folgenden sind jeweils 1° und 2° äquivalent.

1° $\sum f_k x_k$ konvergiert für jedes C_1-limitierbare x.

2° $\sum (k+1)\,|f_k - f_{k+1}| < \infty$, $f_k \to 0$.

1° $\sum f_k x_k$ konvergiert für jedes $|C_1|$-limitierbare x.

2° $\sup (k+1)\,|f_k| < \infty$, $\sum f_k$ konvergiert.

1° $\sum |f_k x_k|$ konvergiert für jedes C_1-limitierbare x.

2° $\sum (k+1)\,|f_k| < \infty$.

1° $\sum |f_k x_k|$ konvergiert für jedes $|C_1|$-limitierbare x.

2° $\sup (k+1)\,|f_k| < \infty$, $\sum |f_k| < \infty$.

Literatur

Mit F, R, Z wird auf die Referate in den Fortschritten der Mathematik, den Mathematical Reviews und im Zentralblatt für Mathematik hingewiesen.

[1] AGNEW, R. P.: Convergence fields of methods of summability. Ann. of Math. (2) **46**, 93—101 (1945). R **6**, 150. — [2] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires, insbesondere S. 90ff. Warschau 1932. F **58**, 420; Z **5**, 209. — [3] BOSANQUET, L. S.: A mean value theorem. J. Lond. Math. Soc. **16**, 146—148 (1941). R **3**, 144. Z **28**, 219. — [4] BOSANQUET, L. S.: Note on the Bohr-Hardy theorem. J. Lond. Math. Soc. **17**, 166—173 (1942). F **68**, 137. R **4**, 194. Z **28**, 149. — [5] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors. I. J. Lond. Math. Soc. **20**, 39—48 (1945). R **7**, 432. — II. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **50**, 295—304 (1948). R **10**, 112. Z **30**, 248. — III. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **50**, 482—496 (1949). R **10**, 368. Z **32**, 404. — [6] BROMWHICH, T. J. I'A.: An introduction to the theory of infinite series, 2. Aufl., S. 427. London 1926. F **52**, 208. — [7] CESÀRO, E.: Sur les lois asymptotiques des nombres. Rom. Accad. L. Rend. (4) $\mathbf{IV_1}$, 452—457 (1888). F **20**, 188. — [8] CHANDRASEKHARAN, K., and S. MINAKSHISUNDARAM: Typical means. Oxford 1952. R **14**, 1077. Z **47**, 299. — [9] DAREVSKY, V.: On Toeplitz's methods. Bull. Acad. Sci. URSS., Sér. Math. **11**, 3—32 (1947). R **8**, 510. Z **34**, 34. — [10] GAIER, D., e K. ZELLER: Über den o-Umkehrsatz für das C_k-Verfahren. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **3**, 83—88 (1954). R **16**, 124. — [11] GARABEDIAN, H. J., u. W. C. RANDELS: Theorems on Riesz means. Duke Math. J. **4**, 529—533 (1938). F **64**, 174. Z **19**, 209. — [12] HARDY, G. H.: On certain oscillating series. Quart. J. Math. **38**, 269—288 (1907). F **38**, 293. — [13] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. R **11**, 25. Z **32**, 58. — [14] HARDY, G. H., and M. RIESZ: The general theory of Dirichlet's series. Cambridge 1915. F **45**, 387. — [15] IYENGAR, K. S. K.: On linear transformations of bounded sequences. Proc. Ind. Acad. Sci. A I; **7**, 399—410; II: **8**, 20—38; III: **8**, 135—144 (1938). F **64**, 169. Z **19**, 308. — [16] JACOB, M.: Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittel für Integrale bei gleicher reeller Ordnung $k > 0$. Math. Z. **26**, 672—682 (1927). F **53**, 221. — [17] JACOB, M.: Über die Verallgemeinerung einiger Theoreme von Hardy in der Theorie der Fourierschen Reihen. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **26**, 470—492 (1927). F **53**, 249. — [18] JURKAT, W.: Über Rieszsche Mittel mit unsteitgem Parameter. Math. Z. **55**, 8—12 (1951). R **13**, 933. Z **44**, 62. — [19] JURKAT, W.: Über Rieszsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen. Math. Z. **57**, 353—394 (1953). R **14**, 866. Z **50**, 66. — [20] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 92—108 (1951). R **13**, 934. Z **44**, 63. — [21] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z. **56**, 152—178 (1952). R **14**, 158. Z **47**, 64. — [22] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Summierbarkeits-

faktoren. Math. Z. **58**, 186—203 (1953). R **15**, 305. Z **50**, 67. — [*23*] KNOPP, K.: Folgenräume und Limitierungsverfahren. Rend. Mat. Roma **5**, 11, 269—298 (1952). — [*24*] LORENTZ, G. G.: Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein Cesàro-Verfahren sind. Math. Z. **51**, 85—91 (1948). R **10**, 31. Z **30**, 148. — [*25*] MACPHAIL, M. S.: On some recent developments in the theory of series. Canad. J. Math. **6**, 405—409 (1954). — [*26*] MAZUR, S.: Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren. Studia Math. **2**, 40—50 (1930). F **56**, 906. — [*27*] OSTROWSKI, A. M.: Note on bounds for determinants with dominant principal diagonal. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 26—30 (1952). R **14**, 611. Z **46**, 12. — [*28*] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1951). (Auch Dissertation Tübingen 1951.) R **13**, 933. Z **44**, 64. — [*29*] PEYERIMHOFF, A.: Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z. **57**, 265—290 (1953). R **14**, 865. Z **50**, 67. — [*30*] PEYERIMHOFF, A.: Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen. Math. Z. **59**, 417—424 (1954). R **15**, 617. — [*31*] RAJAGOPAL, C. T.: Some limit theorems. Amer. J. Math. **70**, 157—166 (1948). R **9**, 425. Z **41**, 83. — [*32*] RIESZ, M.: Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques. C. R. Acad. Sci. Paris **152**, 1651—1654 (1911). F **42**, 272. — [*33*] RIESZ, M.: Sur une théoreme de la moyenne et ses applications. Acta Szeged **1**, 114—126 (1923). F **49**, 707. — [*34*] ROGOSINSKI, W. W.: On Hausdorff's method of summability. Proc. Cambridge philos. Soc. **38**, 166—192 (1942). F **68**, 133. R **3**, 296. Z **28**, 216. — [*35*] SARGENT, W. L. C.: A mean value theorem involving Cesàro means. Proc. Lond. Math. Soc. **49**, 227—240 (1946). R **8**, 260. — [*36*] SCHUR, I.: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. f. Math. **151**, 79—111 (1920). F **47**, 197. — [*37*] VERBLUNSKY, S.: On the limit of a function at a point. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **32**, 163—199 (1931). F **57**, 294. Z **1**, 207. — [*38*] WILANSKY, A.: An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 59—68 (1949). R **11**, 243. Z **35**, 353. — [*39*] WILANSKY, A.: Summability matrices coincident with regular matrices, Banach space methods. Proc. Int. Congr. Math. **1950**, 424. — [*40*] WILANSKY, A.: Summability: the inset, replaceable matrices, the basis in summability space. Duke Math. J. **19**, 647—660 (1952). R **14**, 369. Z **47**, 300. — [*41*] WILANSKY, A., and K. ZELLER: Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 501—509. — [*42*] WLODARSKI, L.: Sur les méthodes continues de limitation. I, II. Studia math. **14**, 161—199 (1955). — [*43*] ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Matrixtransformationen. Diss. Tübingen 1950. — [*44*] ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951). R **12**, 604. Z **45**, 334. — [*45*] ZELLER, K.: Abschnittskonvergenz in *FK*-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1951). R **13**, 934. Z **45**, 334. — [*46*] ZELLER, K.: Über konvergenztreue Matrixverfahren (Vortrag Berlin 1951). Jber. dtsch. Math.-Ver. **56**, 11 (1952). — [*47*] ZELLER, K.: Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren. Math. Z. **56**, 134—151 (1952). R **14**, 158. Z **46**, 64. — [*48*] ZELLER, K.: Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren. Arch. Math. **4**, 425—431 (1953). R **15**, 618. Z **52**, 55. — [*49*] ZELLER, K.: Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen. Math. Z. **59**, 271—277 (1953). R **15**, 618. Z **52**, 55. — [*50*] ZYGMUND, A.: Two notes on the summability of infinite series. Colloq. Math. **1**, 225—229 (1948). R **10**, 446.

Dept. of Math., Lehigh University, Bethlehem, Pa. (USA.)

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. Juni 1955.)

KUNLE, H.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 270—285 (1956)

Über T-Figuren in einem quadratischen Komplex

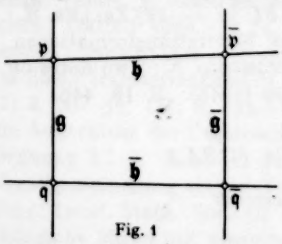
Von

HEINZ KUNLE

Unter einer *T-Figur* versteht man ein Quadrupel von Geradenkongruenzen mit der Eigenschaft, daß die vier zu denselben Parameterwerten u, v gehörigen Geraden ein windschiefes Vierseit bilden, dessen Ecken die Brennflächen der Kongruenzen erzeugen. Man nennt Paare gegenüberliegender Kongruenzen *verschränkt*. Solche Figuren sind von verschiedenen Autoren untersucht worden, insbesondere von S. FINIKOFF [5] und R. CALAPSO [4]. Hier sollen solche T-Figuren betrachtet werden, deren Kongruenzen einem quadratischen Komplex angehören. Dabei werden die von G. BOL [3][1]) mittels halbinvarianter Methoden gewonnenen Ableitungsgleichungen für T-Figuren verwendet.

Der quadratische Komplex kann von verschiedener Art sein. Gehört er der Gattung 46 an[2]), so zeigt sich, daß alle Kongruenzen R-Systeme sind und ein konjugiertes Quadrupel bilden. Die Paare gegenüberliegender Kongruenzen und auch die Diagonalenkongruenzen der T-Figur sind in beiden Richtungen schichtbildend. Die vier Brennflächen sind Regelflächen, die wechselseitig W-Transformierte sind und derselben linearen Kongruenz angehören; sie sind in einer einparametrigen Schar von Kongruenzregelflächen enthalten, die als Schichtflächen einer BIANCHI-Konfiguration auftreten. Im Geradenraum ergibt sich eine spezielle Zentralbewegung im Sinne der projektiven Kinematik [1]; dieser Tatbestand erlaubt dann eine geometrische Konstruktion der Figur. Sie hängt von einer Funktion einer Veränderlichen ab.

Außerdem ist es noch möglich, daß der quadratische Komplex der Gattung 49 oder 45 angehört. Dann sind zwei gegenüberliegende Brennflächen der T-Figur Teile derselben nichtentarteten Quadrik, desselben Kegels zweiter Ordnung oder (dual analog) desselben Kegelschnitts. Hierbei ist noch eine Funktion zweier Veränderlichen willkürlich wählbar.



1. Seien (vgl. Figur) $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ die Ecken und

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{g} = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}), & \mathfrak{h} = (\mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{p}}), & \mathfrak{d} = (\mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{q}}), \\ \bar{\mathfrak{g}} = (\bar{\mathfrak{p}}\,\bar{\mathfrak{q}}), & \bar{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{q}}), & \bar{\mathfrak{d}} = (\mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{p}}) \end{cases}$$

[1]) Die in [3] entwickelten Formeln entsprechen den hier verwendeten, die aus [2] Bd. 3 entnommen sind. Alle folgenden Hinweise auf [2] beziehen sich auf diesen dritten Band. Herrn G. BOL sei auch an dieser Stelle für sein förderndes Interesse an der vorliegenden Untersuchung gedankt.

[2]) Enzykl. der Math. Wiss. III 2 C.

die Kanten bzw. Diagonalen des Vierseits der T-Figur für die Parameterwerte u, v. Dann gelten nach G. Bol [3], [2] Ableitungsgleichungen der Form

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p}_i = \bar{a}_i\,\bar{\mathfrak{p}} + c_i\,\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{q}_i = \bar{b}_i\,\bar{\mathfrak{q}} + d_i\,\mathfrak{p}, \\ \bar{\mathfrak{p}}_i = a_i\,\mathfrak{p} + \bar{c}_i\,\bar{\mathfrak{q}}, \quad \bar{\mathfrak{q}}_i = b_i\,\mathfrak{q} + \bar{d}_i\,\bar{\mathfrak{p}}, \end{cases} \qquad i = 1, 2,$$

wo links halbinvariante Ableitungen stehen. Die Integrierbarkeitsbedingungen lauten:

$$(3)\qquad [a] = [\bar{a}] = [b] = [\bar{b}] = [c] = [\bar{c}] = [d] = [\bar{d}] = 0,$$

$$(4)\qquad \begin{cases} [p] = [\bar{a}\,a] + [c\,d], \\ [q] = [\bar{b}\,b] + [d\,c], \\ [\bar{p}] = [a\,\bar{a}] + [\bar{c}\,\bar{d}], \\ [\bar{q}] = [b\,\bar{b}] + [\bar{d}\,\bar{c}], \end{cases} \qquad (5)\qquad \begin{cases} [\bar{a}\,\bar{c}] + [c\,\bar{b}] = 0, \\ [a\,c] + [\bar{c}\,b] = 0, \\ [\bar{b}\,\bar{d}] + [d\,\bar{a}] = 0, \\ [b\,d] + [\bar{d}\,a] = 0. \end{cases}$$

Dabei bedeutet etwa

$$[p] = \partial_2 p_1 - \partial_1 p_2, \quad [a] = a_{12} - a_{21}, \quad [a\,b] = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Für die Geradenvektoren (1) erhält man wegen (2) die Ableitungsgleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_i = \bar{b}_i\,\mathfrak{d} - \bar{a}_i\,\bar{\mathfrak{d}}, \quad \mathfrak{h}_i = \bar{c}_i\,\mathfrak{d} + c_i\,\bar{\mathfrak{d}}, \\ \bar{\mathfrak{g}}_i = a_i\,\mathfrak{d} - b_i\,\bar{\mathfrak{d}}, \quad \bar{\mathfrak{h}}_i = d_i\,\mathfrak{d} + \bar{d}_i\,\bar{\mathfrak{d}}, \end{cases}$$

$$(6')\qquad \begin{cases} \mathfrak{d}_i = \quad b_i\,\mathfrak{g} + \bar{a}_i\,\bar{\mathfrak{g}} + \bar{d}_i\,\mathfrak{h} + c_i\,\bar{\mathfrak{h}}, \\ \bar{\mathfrak{d}}_i = -a_i\,\mathfrak{g} - \bar{b}_i\,\bar{\mathfrak{g}} + d_i\,\mathfrak{h} + \bar{c}_i\,\bar{\mathfrak{h}}. \end{cases}$$

Nun sei ein fester quadratischer Komplex

$$(7)\qquad \langle \mathfrak{k}\,\mathfrak{k} \rangle = \sum_0^5 \gamma_{ij}\,k_i\,k_j = 0, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \gamma_{ij} = \text{konstant},$$

gegeben, dem die Kongruenzen der T-Figur angehören sollen. Daher ist

$$(8)\qquad \langle \mathfrak{g}\,\mathfrak{g} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{g}}\,\bar{\mathfrak{g}} \rangle = \langle \mathfrak{h}\,\mathfrak{h} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{h}}\,\bar{\mathfrak{h}} \rangle = 0.$$

Differenziert man die erste Gl. (8), so erhält man

$$(9)\qquad \bar{b}_i \langle \mathfrak{g}\,\mathfrak{d} \rangle - \bar{a}_i \langle \mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{d}} \rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

Wir setzen nun durchgängig voraus, daß die Kongruenzen der Figur nicht entarten, so daß

$$(10)\qquad [a\,b]\,[\bar{a}\,\bar{b}]\,[c\,\bar{c}]\,[d\,\bar{d}] \neq 0.$$

Dann folgt aus (9) und den analogen Gleichungen

$$(11)\qquad \begin{cases} \langle \mathfrak{g}\,\mathfrak{d} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{d} \rangle = \langle \mathfrak{h}\,\mathfrak{d} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{h}}\,\mathfrak{d} \rangle = 0, \\ \langle \mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{d}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{g}}\,\bar{\mathfrak{d}} \rangle = \langle \mathfrak{h}\,\bar{\mathfrak{d}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{h}}\,\bar{\mathfrak{d}} \rangle = 0. \end{cases}$$

Man liest ab: *Die von* $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{h}}$ *bzw.* $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ *im Geradenraum aufgespannten Räume* U_3 *bzw.* U_1 *sind für jedes Wertepaar* u, v *in bezug auf den quadratischen Komplex* (7) *total-polar.*

Mit den Abkürzungen

$$(12)\qquad \begin{cases} K = \langle \mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\rangle, & M = \langle \bar{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{h}\rangle, & G = \langle \mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{g}}\rangle - \langle \mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle, \\ L = \langle \mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{h}}\rangle, & N = \langle \bar{\mathfrak{g}}\,\bar{\mathfrak{h}}\rangle, & H = \langle \mathfrak{h}\,\bar{\mathfrak{h}}\rangle + \langle \mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle \end{cases}$$

folgt aus (11) bei nochmaliger Differentiation

$$(13)\qquad \begin{cases} \bar{b}_i\langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle + \bar{a}_i G + \bar{d}_i K + c_i L = 0, \\ \bar{a}_i\langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle + \bar{b}_i G - d_i K - \bar{c}_i L = 0, \\ \bar{c}_i\langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle + c_i H + \bar{a}_i M + b_i K = 0, \\ c_i\langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle + \bar{c}_i H - \bar{b}_i M - a_i K = 0, \\ d_i\langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle + \bar{d}_i H + \bar{a}_i N + b_i L = 0, \\ \bar{d}_i\langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle + d_i H - \bar{b}_i N - a_i L = 0, \\ a_i\langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle + b_i G + c_i N + \bar{d}_i M = 0, \\ b_i\langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle + a_i G - \bar{c}_i N - d_i M = 0. \end{cases}$$

Führt man nun wie in [2] die Torsallinien der Kongruenz $\mathfrak{g}(u, v)$ als Parameterkurven ein und normiert geeignet, so gilt

$$(14)\qquad \bar{a}_2 = \bar{b}_1 = 0, \quad \bar{a}_1 = \bar{b}_2 = 1$$

und

$$(15)\qquad c_1 + \bar{c}_2 = 0, \quad d_2 + \bar{d}_1 = 0.$$

Jetzt folgt aus den vier Relationen $(13)_1$ und $(13)_2$

$$(16)\qquad \begin{cases} \langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle = -\bar{d}_2 K - c_2 L, \\ \langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle = \quad d_1 K + \bar{c}_1 L, \end{cases} \qquad G = d_2 K + \bar{c}_2 L.$$

Die Gln. $(13)_3$ bis $(13)_8$ erhalten die Gestalt

$$(17)\qquad \begin{cases} M + c_1 H + \quad (b_1 - \bar{c}_1 \bar{d}_2) K - c_2 \bar{c}_1 L = 0, \\ \quad c_2 H + \quad (b_2 - \bar{c}_2 \bar{d}_2) K - c_2 \bar{c}_2 L = 0, \\ \bar{c}_1 H + (-a_1 + c_1 d_1) K + c_1 \bar{c}_1 L = 0, \\ -M + \bar{c}_2 H + (-a_2 + c_2 d_1) K + c_2 \bar{c}_1 L = 0, \\ N + \bar{d}_1 H + \quad (b_1 - c_2 d_1) L - d_1 \bar{d}_2 K = 0, \\ \quad \bar{d}_2 H + \quad (b_2 - c_2 d_2) L - d_2 \bar{d}_2 K = 0, \\ \quad d_1 H + (-a_1 + \bar{c}_1 \bar{d}_1) L + d_1 \bar{d}_1 K = 0, \\ -N + d_2 H + (-a_2 + \bar{c}_1 \bar{d}_2) L + d_1 \bar{d}_2 K = 0 \end{cases}$$

2. Wir setzen nun bis auf weiteres voraus[3]), daß der Komplex (7) nicht Tangentenkomplex einer Fläche zweiter Ordnung F_2 ist, so daß

$$K L M N \neq 0 \text{[4])}. \tag{18}$$

Addition von $(17)_1$ und $(17)_4$, sowie von $(17)_5$ und $(17)_8$ liefert

$$a_2 - b_1 = 0, \quad c_2 d_1 - \bar{c}_1 \bar{d}_2 = 0, \tag{19'}$$

also

$$[a\bar{a}] + [b\bar{b}] = 0, \quad [c\,d] + [\bar{c}\,\bar{d}] = 0. \tag{19}$$

Nach [2] gilt somit: *Sämtliche Kongruenzen der T-Figur sind W-Strahlensysteme.*

Die Gl. $(17)_3$ ist mit $(17)_2$, ebenso $(17)_7$ mit $(17)_6$ gleichwertig. Aus $(17)_2$ und $(17)_6$ folgt schließlich noch

$$(b_2 + c_1 \bar{d}_2 - c_2 \bar{d}_1)\, \bar{d}_2 K + (-b_2 + c_1 \bar{d}_2 - c_2 \bar{d}_1)\, c_2 L = 0. \tag{20}$$

Außerdem stellen $(17)_2$, $(17)_4$, $(17)_8$ drei Bedingungen für (7) dar.

Es sind noch $(13)_7$ und $(13)_8$ auszuwerten. $(13)_8$ ist mit $(13)_7$ gleichwertig. $(13)_7$ führt auf

$$[p]\,(\bar{d}_2 K + c_2 L) = 0, \tag{21}$$

$$c_1 c_2 [p]\, L + \{-c_2 d_2 [p] + ([p] - a_2)\,(b_2 + c_1 \bar{d}_2 - c_2 \bar{d}_1)\}\, K = 0. \tag{22}$$

Aus (21) ergibt sich eine Alternative.

Wenn (im ersten Fall)

$$\bar{d}_2 K + c_2 L = 0, \tag{23}$$

so zerfällt der quadratische Komplex (7) in zwei lineare Komplexe, derart, daß gegenüberliegende Kongruenzen der T-Figur jeweils demselben linearen Komplex angehören.

Zunächst folgt nämlich aus (23), (20) und (5)

$$b_2 = a_1 = 0,$$

und aus (22) folgt weiter

$$c_1 \bar{d}_2 - c_2 \bar{d}_1 = 0,$$

so daß wegen

$$[a\bar{b}] = [\bar{a}\,b] = [c\,\bar{d}] = [\bar{c}\,d] = 0 \tag{24}$$

[3]) Auch wird vorläufig angenommen, daß keine der Brennflächen in eine Kurve entartet, so daß

$$[\bar{a}c]\,[a\bar{c}]\;\;[\bar{b}d]\,[b\bar{d}] \neq 0.$$

[4]) Ist nämlich etwa $K = 0$ identisch in u, v, so gehören alle Tangenten der Fläche $\mathfrak{p}$ zu (7), und man sieht leicht, daß $\mathfrak{p}$ eine F_2 (Quadrik oder Kegel) ist. Denn eine allgemeine Ebene schneidet $\mathfrak{p}$ in einer Kurve zweiter Ordnung. Der Komplex (7) ist der Tangentenkomplex dieser F_2 von der Gattung 49 oder 45. Diesen Fall behandeln wir später in 6.

und (19) nach [2] gegenüberliegende Kongruenzen in gleichen linearen Komplexen liegen. Da aber der quadratische Komplex (7) eindeutig bestimmt ist, zerfällt er in diese beiden linearen Komplexe.

Wegen (16) und (19) bedeutet (23), daß die Diagonalen im Komplex (7) liegen. *Wenn die Diagonalenkongruenzen dem quadratischen Komplex angehören, so zerfällt er.*

Aber auch die Umkehrung gilt: *Wenn der quadratische Komplex (7) zerfällt, so gehören gegenüberliegende Kongruenzen der T-Figur dem gleichen linearen Komplex an, und die Diagonalen liegen in der linearen Schnittkongruenz der beiden linearen Komplexe.*

Wenn nämlich $\mathfrak{g}$ einem linearen Komplex $\boldsymbol{k}$ angehört, so liegt eine benachbarte Kongruenz, etwa $\mathfrak{h}$, nicht auch in $\boldsymbol{k}$, da nach [2] die Diagonalen in $\boldsymbol{k}$ liegen, und also andernfalls von $\mathfrak{p}$ die Geraden $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{d}$ des Komplexes ausgingen. Der Komplex $\boldsymbol{k}$ wäre speziell und $\mathfrak{p}$ die singuläre Gerade, entgegen der Annahme in Fußnote [3]). Daraus folgt alles.

3. Der Komplex (7) möge nun weiterhin nicht zerfallen, so daß in (21) der zweite Fall $[p]=0$ eintritt. Wegen

$$[p] = -[q] = -[\bar{p}] = [\bar{q}]$$

folgt

$$[p] = [q] = [\bar{p}] = [\bar{q}] = 0. \tag{25}$$

Dies bedeutet, daß sich die vier Brennflächen der T-Figur bis auf konstante Faktoren in eindeutiger Weise so normieren lassen, daß die Größen p_i, q_i, $\bar{p}_i$, $\bar{q}_i$ verschwinden. Wir denken uns dies durchgeführt. Die halbinvariante Differentiation reduziert sich jetzt auf die gewöhnliche.

Nun ist

$$b_2 + c_1 \bar{d}_2 - c_2 \bar{d}_1 \neq 0, \tag{26}$$

da sonst wegen (20) wieder (24) gelten würde, was doch ausgeschlossen war. Daher ist (20) nicht identisch erfüllt, und der Komplex (7) wird durch (8), (11), (16), $(17)_2$, $(17)_4$, $(17)_8$ und (20) eindeutig bestimmt. Aus (22) und (19′) folgt weiter

$$a_2 = b_1 = 0 \tag{27′}$$

oder also

$$[a\,\bar{a}] = [b\,\bar{b}] = 0, \tag{27}$$

woraus noch wegen (25) und (4) kommt

$$[c\,d] = [\bar{c}\,\bar{d}] = 0. \tag{28}$$

Die Gln. (25), (27), (28) lassen sich nach [2] so deuten[5]):

[5]) Dabei sollen die bisher gemachten Allgemeinheitsannahmen gelten.

Die T-Figur im quadratischen Komplex (7) *besteht aus einem konjugierten Quadrupel von Kongruenzen, d.h. die Paare gegenüberliegender Kongruenzen sind gegenseitig schichtbildend derart, daß die sich entsprechenden Torsallinien eines solchen Paares auf allen Schichtflächen ein konjugiertes Netz bilden. Die Brennflächen und Schichtflächen haben übereinstimmende Asymptotenlinien.*

Die Kongruenzen sind sämtlich R-Strahlensysteme.

Die Diagonalenkongruenzen sind ebenfalls verschränkt und folglich gegenseitig schichtbildend.

Um schließlich die Bedingungen zu ermitteln, die sich aus (16), $(17)_2$, $(17)_4$, $(17)_8$, (20) bei nochmaliger Differentiation ergeben, bemerkt man zunächst, daß die Ableitungen aller vorkommenden Klammersymbole (7) verschwinden. Ferner sind nach (3) die Größen $a_i, \bar{a}_i, \ldots, \bar{d}_i$ Gradientvektoren von acht Funktionen $a, \bar{a}, \ldots, \bar{d}$, und wir können wie in [2] $\bar{a}$ und $\bar{b}$ als Parameter u, v wählen. Dann gilt

$$(29)\qquad \begin{cases} a_1 = U(u), & b_1 = 0, \\ a_2 = 0, & b_2 = V(v), \end{cases} \qquad d = d(c), \quad \bar{d} = \bar{d}(\bar{c}),$$

mit den Relationen

$$(30)\qquad c_1 + \bar{c}_2 = 0, \quad U c_2 + V \bar{c}_1 = 0, \quad U\bar{d}' - V d' = 0.$$

Die früheren Formeln bleiben richtig, da (14) auch jetzt gültig ist.

Aus

$$(31)\qquad \bar{c}_1 \langle \mathfrak{b}\,\mathfrak{b} \rangle + c_2 \langle \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{b}} \rangle = 0$$

folgt zunächst zusammen mit (30)

$$(32)\qquad \begin{cases} \bar{c}_1 + \lambda c_2 = 0, \\ \bar{c}_2 + c_1 = 0, \end{cases} \qquad c_{11} - \lambda c_{22} = 0, \quad \lambda = \text{konstant}.$$

Ferner ist wegen (30)

$$(33)\qquad U - \lambda V = 0,$$

so daß also U und V konstant sind. Ebenso folgt aus (30)

$$(34)\qquad d' - \lambda \bar{d}' = 0,$$

und wegen $[c\,\bar{c}] \neq 0$ sind auch d' und $\bar{d}'$ konstant. Somit ist alles auf c_1, c_2 und Konstanten zurückgeführt[6]).

Wenn nun c_1 und c_2 konstant sind, so folgen aus (16), (17), (20) keine neuen Relationen. Die Figur hängt nur noch von Konstanten ab. Man zeigt leicht, daß alle Flächen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ voneinander verschiedene *Quadriken desselben Büschels* sind, dessen *Fundamentalkurve ein Vierseit* ist.

[6]) Wegen (10) sind die Konstanten λ, V, $\bar{d}'$ von Null verschieden, desgleichen c_1 und c_2.

Lassen wir diesen trivialen Fall außer acht, so folgt aus (16), (17), (20) bei weiterer Differentiation

$$c_1 = \alpha c_2 + \omega \tag{35}$$

mit

$$\alpha = \sqrt{\lambda}, \quad \omega = \sqrt{V\delta^{-1}}, \quad \delta = \bar{d}', \tag{36}$$

oder, wenn man (35) und (32) integriert:

$$c = C(u + \alpha^{-1} v) + \omega u, \quad \bar{c} = -\alpha C(u + \alpha^{-1} v) - \omega v. \tag{37}$$

Dabei ist C eine beliebige Funktion einer Veränderlichen. $a, b, d, \bar{d}$ sind der Reihe nach lineare Funktionen von $u, v, c, \bar{c}$.

Die T-Figur hängt jetzt noch von einer Funktion einer Veränderlichen (und Konstanten) ab.

Für die Klammersymbole findet man

$$\begin{cases} L = \alpha\delta K, \quad M = -\alpha V K, \quad N = -\lambda\delta V K, \\ G = -H = -\alpha\delta\omega K, \quad \langle \mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}} \rangle = \lambda \langle \mathfrak{b}\mathfrak{b} \rangle = \lambda\delta\omega K. \end{cases} \tag{38}$$

4. Nun sollen noch einige geometrische Eigenschaften der T-Figur aufgezeigt werden. Zunächst:

Die vier Brennflächen der T-Figur sind Regelflächen.

Denn etwa für $\mathfrak{p}$ gilt bei Differentiation längs der Richtung $\frac{dv}{du} = -\alpha$ mit der Abkürzung

$$\nabla = \partial_1 - \alpha\,\partial_2,$$

daß

$$\nabla\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} + \omega\mathfrak{q}, \quad \nabla\nabla\mathfrak{p} = 2\lambda V\mathfrak{p}. \tag{39}$$

Also ist $\mathfrak{p}$ Regelfläche, und ebenso die übrigen Flächen, da $\mathfrak{p}$ geometrisch nicht ausgezeichnet ist.

Wir können annehmen, daß $\mathfrak{p}$ keine Quadrik ist, da sonst c_1 und c_2 konstant wären. Dasselbe gilt für $\mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$. Dann gilt weiter:

Die vier Brennflächen sind sogar Kongruenzregelflächen und gehören derselben linearen Kongruenz an.

Setzt man nämlich

$$\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}} - \alpha V\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{h}} + \alpha\delta\mathfrak{h}, \quad \mathfrak{c} = \bar{\mathfrak{b}} + \alpha\mathfrak{b}, \tag{40}$$

so folgt mit der Abkürzung

$$\overset{+}{\nabla} = \partial_1 + \alpha\,\partial_2,$$

daß

$$\begin{cases} \overset{+}{\nabla}\mathfrak{a} = \overset{+}{\nabla}\mathfrak{b} = \overset{+}{\nabla}\mathfrak{c} = 0, \\ \nabla\mathfrak{a} = 2\alpha V\mathfrak{c}, \quad \nabla\mathfrak{b} = 2\alpha\delta\omega\mathfrak{c}, \quad \nabla\mathfrak{c} = 2\alpha(\mathfrak{a} + \omega\mathfrak{b}). \end{cases} \tag{41}$$

Daraus ergibt sich, daß

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{a} + \omega\,\mathfrak{b} + \sigma\,\mathfrak{c}, \qquad \sigma^2 = 2V \tag{42}$$

fest ist. (42) stellt die beiden Leitlinien der linearen Kongruenz dar; die Erzeugenden der vier Regelflächen, nämlich[7])

$$\begin{cases} \mathfrak{p} \,(=)\, (\mathfrak{p}, \nabla\mathfrak{p}) \,(=)\, (\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}} + \omega\,\mathfrak{q}) & (=)\, \bar{\mathfrak{y}} + \omega\,\mathfrak{g}, \\ \mathfrak{q} \,(=)\, (\mathfrak{q}, \nabla\mathfrak{q}) \,(=)\, (\mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{q}} - \alpha\,\delta\,\omega\,\mathfrak{p}) \,(=)\, \bar{\mathfrak{y}} + \alpha\,\delta\,\omega\,\mathfrak{g}, \\ \bar{\mathfrak{p}} \,(=)\, (\bar{\mathfrak{p}}, \nabla\bar{\mathfrak{p}}) \,(=)\, (\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}} + \alpha\,\delta\,\omega\,\mathfrak{p}) \,(=)\, \bar{\mathfrak{g}} - \alpha\,\delta\,\omega\,\mathfrak{y}, \\ \bar{\mathfrak{q}} \,(=)\, (\bar{\mathfrak{q}}, \nabla\bar{\mathfrak{q}}) \,(=)\, (\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{p}} - \omega\,\mathfrak{q}) & (=)\, \bar{\mathfrak{g}} - \omega\,\bar{\mathfrak{y}}, \end{cases} \tag{43}$$

sind zu (42) im Geradenraum bezüglich der PLÜCKER-Quadrik polar. Gleichzeitig erkennt man aus (43):

Entsprechende Erzeugende gegenüberliegender Brennflächen treffen die Diagonalen in Punkten, die die beiden anderen Brennflächen harmonisch trennen.

Ferner gilt:

Die entsprechenden Erzeugenden der vier Brennflächen gehören einem Regulus an, der auf der Quadrik

$$y_0 y_1 - \omega\, y_0 y_2 + \alpha\,\delta\,\omega\, y_1 y_3 + \alpha\, V\, y_2 y_3 = 0$$

liegt. Dabei sind die lokalen Koordinaten y_i durch

$$\mathfrak{y} = y_0\,\mathfrak{p} + y_1\,\mathfrak{q} + y_2\,\bar{\mathfrak{p}} + y_3\,\bar{\mathfrak{q}}$$

definiert. Die vier Brennflächen werden also im Geradenraum durch vier Kurven auf einer zweidimensionalen Quadrik in einem festen dreidimensionalen Unterraum $\boldsymbol{U}_3$ repräsentiert, und zwar derart, daß vier korrespondierende Punkte demselben Kegelschnitt angehören. Wir zeigen:

Die Tangenten an diese vier Kurven treffen sich in einem Punkt. Die Brennflächen sind also (über die Ergebnisse in 2. hinaus) *paarweise W-Transformierte voneinander.*

Denn man findet

$$\mathfrak{p}_1 \,(=)\, \mathfrak{q}_1 \,(=)\, \bar{\mathfrak{p}}_1 \,(=)\, \bar{\mathfrak{q}}_1 \,(=)\, \hat{\mathfrak{c}},$$

wobei gesetzt wurde

$$\hat{\mathfrak{c}} = \bar{\mathfrak{b}} - \alpha\,\mathfrak{b}. \tag{44}$$

$\hat{\mathfrak{c}}$ ist offenbar der Pol der Ebene $\boldsymbol{e}$, in welcher die Punkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ liegen. In dieser Ebene liegt auch der Punkt

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{a} - \omega\,\mathfrak{b}, \tag{45}$$

der wegen (41) fest ist. Daher:

Die einparametrige Schar von Polarebenen zur Kurve (44) *hat den Punkt* (45) *als Fixpunkt. Die Kurve* (44) *ist folglich eben (d.h. zweidimensional).*

Man spricht mit M. BARNER [*1*] von einer *Zentralbewegung im Sinne der projektiven Kinematik.* Bahnkurven der Bewegung sind jene Kurven, deren

[7]) Das Symbol (=) bedeutet Proportionalität der Vektoren.

Tangenten in den einer Ebene e angehörigen Punkten durch den entsprechenden Punkt $\hat{c}$ gehen, also insbesondere die vier Kurven, die unsere Brennflächen darstellen. Die Ebenen e bewegen sich normal zu sich selbst im Sinn der hyperbolischen Geometrie, bezüglich der PLÜCKER-Quadrik als absoluter Quadrik.

Die Fixebene E, in der die Kurve $\hat{c}$ liegt, wird aufgespannt von (44) und

$$\hat{a} = \bar{g} + \alpha V g, \quad \hat{b} = \bar{h} - \alpha \delta h. \tag{46}$$

Sie schneidet aus der PLÜCKER-Quadrik Q einen nichtentarteten Kegelschnitt aus, denn ihr Pol in U_3 ist n, und n liegt nicht auf Q. Die beiden Punkte dieses Kegelschnitts, die zugleich dem Kegelschnitt der bewegten Ebene e angehören, sind

$$r = \hat{a} + i\omega \hat{b}, \quad s = \hat{a} - i\omega \hat{b}; \quad i^2 = -1. \tag{47}$$

In lokalen Koordinaten

$$q_0 n + q_1 r + q_2 s \tag{48}$$

hat der Kegelschnitt in e die Gleichung

$$2q_1 q_2 - q_0^2 = 0 \tag{49}$$

mit der Parameterdarstellung

$$q_0 = \tau, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = \tfrac{1}{2}\tau^2. \tag{49'}$$

Die Parameterwerte von $r, s, p, q, \bar{p}, \bar{q}$ sind bzw. $0, \infty, i-1, -i-1, i+1, -i+1$. Daraus folgt:

Das Doppelverhältnis von vier entsprechenden Erzeugenden der vier Brennflächen $p, \bar{q}, \bar{p}, q$ *ist* -1. Ferner: *Die Doppelverhältnisse* DV $(r, s, p, \bar{q})$, DV $(r, s, q, \bar{p})$, DV (r, s, p, q) *haben der Reihe nach die Werte* $-1, -1, -i$. Kennt man also für einen Parameterwert $t = t_0$ die Lage von p, so ist diejenige der übrigen Erzeugenden bestimmt.

Um schließlich den Zusammenhang mit dem quadratischen Komplex (7) noch genauer zu klären, fragen wir: Welche Geraden des Regulus (49) gehören dem Komplex (7) an? Man bestätigt mittels (38), daß die durch (47) repräsentierten Geraden die einzigen sind, oder anders ausgedrückt:

Der Regulus, dessen repräsentierender Kegelschnitt durch die Fixebene E *ausgeschnitten wird, ist dadurch gekennzeichnet, daß er genau diejenigen Geraden der linearen Kongruenz umfaßt, die im quadratischen Komplex enthalten sind.*

Damit ist klar: *Die Fundamentalkurve des vom quadratischen Komplex* (7) *und von der* PLÜCKER*-Quadrik in* U_3 *bestimmten Büschels ist der Fixkegelschnitt in* E. Alle Quadriken des Büschels berühren sich längs dieses Fixkegelschnitts.

Schließlich zeigt man noch mittels (38), daß

$$\langle e\, e \rangle = 0.$$

Das bedeutet: *Die Leitlinien der linearen Kongruenz gehören dem quadratischen Komplex* (7) *an.*

Die Figur hängt, wie oben festgestellt, noch von der willkürlichen Funktion C ab. Diese läßt sich nun leicht mit der hyperbolischen Krümmung der ebenen Kurve $\hat{\mathfrak{c}}$ in Verbindung bringen und so geometrisch deuten.

Führt man nämlich statt v einen neuen Parameter s ein:

$$v = f(s), \quad f' = \xi^{-1},$$

wobei

$$\xi^2 = \omega^2 + (\overset{+}{\nabla} c)^2$$

gesetzt ist, so erhält man mit

$$\mathfrak{t} = \hat{\mathfrak{c}}', \qquad \mathfrak{y} = \xi^{-1}\{(\overset{+}{\nabla} c)\,\hat{\mathfrak{a}} - \omega^2 \hat{\mathfrak{b}}\}$$

die Tabelle der Polarprodukte bezüglich der PLÜCKER-Quadrik

	$\hat{\mathfrak{c}}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{y}$
$\hat{\mathfrak{c}}$	-2α	0	0
$\mathfrak{t}$	0	$2\alpha\delta$	0
$\mathfrak{y}$	0	0	$2\alpha V$

und die FRENETschen Ableitungsgleichungen

$$\hat{\mathfrak{c}}' = \mathfrak{t},$$
$$\mathfrak{t}' = \delta\hat{\mathfrak{c}} + 2c_{12}\xi^{-3}\mathfrak{y},$$
$$\mathfrak{y}' = -2\omega^2 c_{12}\xi^{-3}\mathfrak{t}.$$

Die hyperbolische Krümmung von $\hat{\mathfrak{c}}$ hat demnach bis auf konstante Faktoren die Gestalt

$$\varkappa = \frac{2C''/\omega}{\{1 + (1 + 2C'/\omega)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Analogie zur klassischen Krümmungsformel

$$\varkappa = \frac{y''}{\{1 + y'^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

in cartesischen Koordinaten liegt auf der Hand.

5. Nachdem nun die wichtigsten geometrischen Eigenschaften der T-Figur klargestellt sind, gehen wir dazu über, ihre Behandlung dadurch zu vereinfachen, daß wir die Zentralbewegung im Geradenraum als einparametrigen Vorgang darstellen, um so zu einer Konstruktion zu gelangen.

Es sollen $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5$ der Reihe nach dieselben Punkte des R_5 darstellen wie (in der bisherigen Bezeichnung) $\hat{\mathfrak{c}}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{n}$ und die beiden Punkte $\mathfrak{e}$ in (42).

Wenn dann das Zeichen $\circ$ Polarenbildung an der PLÜCKER-Quadrik bedeutet, so verschwinden alle Produkte $\mathfrak{a}_i \circ \mathfrak{a}_k$ außer

$$\mathfrak{a}_0 \circ \mathfrak{a}_0, \quad \mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{a}_3 \circ \mathfrak{a}_3, \quad \mathfrak{a}_4 \circ \mathfrak{a}_5.$$

Die Normierung von $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_3$ kann so festgelegt werden, daß

$$\mathfrak{a}_0 \circ \mathfrak{a}_0 = \eta, \quad \mathfrak{a}_3 \circ \mathfrak{a}_3 = \bar{\eta}, \quad \eta^2 = \bar{\eta}^2 = 1. \tag{50}$$

Ähnlich läßt sich bewirken, daß

$$\mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{a}_2 = \eta, \quad \mathfrak{a}_4 \circ \mathfrak{a}_5 = \eta, \tag{51}$$

wobei noch Umnormungen

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{a}}_1 = f(t)\,\mathfrak{a}_1, & \bar{\mathfrak{a}}_2 = f^{-1}\,\mathfrak{a}_2, \\ \bar{\mathfrak{a}}_4 = g(t)\,\mathfrak{a}_4, & \bar{\mathfrak{a}}_5 = g^{-1}\,\mathfrak{a}_5 \end{cases} \tag{52}$$

möglich sind.

Die PLÜCKER-Quadrik hat dann in lokalen Koordinaten

$$\mathfrak{a} = \sum x_i\,\mathfrak{a}_i = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \tag{53}$$

die Gleichung

$$Q = \eta\,x_0^2 + 2\eta\,x_1 x_2 + \bar{\eta}\,x_3^2 + 2\eta\,x_4 x_5 = 0. \tag{54}$$

Da die Signatur Null sein soll, kann man vereinfachend

$$\eta = -\bar{\eta} = 1$$

annehmen, so daß aus (54)

$$Q = x_0^2 + 2x_1 x_2 - x_3^2 + 2x_4 x_5 = 0 \tag{54'}$$

wird. Die *Tabelle der Polarprodukte* erhält die Gestalt

(55)

	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$
$\mathfrak{a}_0$	1	0	0	0	0	0
$\mathfrak{a}_1$	0	0	1	0	0	0
$\mathfrak{a}_2$	0	1	0	0	0	0
$\mathfrak{a}_3$	0	0	0	−1	0	0
$\mathfrak{a}_4$	0	0	0	0	0	1
$\mathfrak{a}_5$	0	0	0	0	1	0

Berücksichtigt man (55) und verfügt passend über die Umnormungsmöglichkeiten (52), so findet man die *Ableitungsgleichungen*

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_0' = -b\,\mathfrak{a}_1 - a\,\mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3' = 0, \\ \mathfrak{a}_1' = a\,\mathfrak{a}_0, & \mathfrak{a}_4' = 0, \\ \mathfrak{a}_2' = b\,\mathfrak{a}_0, & \mathfrak{a}_5' = 0 \end{cases} \tag{56}$$

mit den Invarianten a, b (bei freiem Parameter t).

Ein Punkt (53) ist genau dann fest und fest normiert, wenn die *Stationaritätsbedingungen*

$$\begin{cases} x_0' = -a\,x_1 - b\,x_2, & x_3' = 0, \\ x_1' = b\,x_0, & x_4' = 0, \\ x_2' = a\,x_0, & x_5' = 0 \end{cases} \tag{57}$$

erfüllt sind.

Die *Bahnkurven der Zentralbewegung* für die Punkte der Ebene $\mathfrak{e}$ sind gegeben durch

$$\mathfrak{b} = x_1 \mathfrak{a}_1 + x_2 \mathfrak{a}_2 + x_3 \mathfrak{a}_3; \quad x_1, x_2, x_3 \text{ konstant.} \tag{58}$$

Denn die Tangente von (58) geht durch $\mathfrak{a}_0$. Insbesondere sind die vier Erzeugenden der Brennflächen nach den Ergebnissen der vorigen Nummer gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} \mathfrak{p} = \{0, \ \tfrac{1}{2}\mu^2, \ 1, \ \ \mu, \ 0, \ 0\}, \\ \mathfrak{q} = \{0, \ -\tfrac{1}{2}\mu^2, \ 1, \ \ i\mu, \ 0, \ 0\}, \\ \bar{\mathfrak{p}} = \{0, \ -\tfrac{1}{2}\mu^2, \ 1, \ -i\mu, \ 0, \ 0\}, \\ \bar{\mathfrak{q}} = \{0, \ \tfrac{1}{2}\mu^2, \ 1, \ -\ \mu, \ 0, \ 0\}, \end{cases} \quad \mu = \text{konstant.} \tag{59}$$

Wir bestimmen nun die Koeffizienten in der Gleichung

$$F = \langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{a} \rangle = \sum \gamma_{ik} x_i x_k = 0 \tag{60}$$

des quadratischen Komplexes aus folgenden vier Bedingungen I bis IV, die den früher gefundenen geometrischen Eigenschaften des Komplexes entsprechen.

I. Da die Leitlinien $\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5$ (60) erfüllen, ist

$$\gamma_{44} = \gamma_{55} = 0.$$

II. Wegen des Satzes über die Fundamentalkurve des von F und Q gebildeten, in U_3 liegenden Büschels in der vorigen Nummer ist

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{01} = \gamma_{02} = \gamma_{03} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0, \qquad \gamma_{00} = \gamma_{12}.$$

III. Die W-Kongruenz $\mathfrak{g}$ mit den Brennflächen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ besteht aus ∞^1 Regelscharen; ein solcher Regulus wird von derjenigen Ebene aus der PLÜCKER-Quadrik ausgeschnitten, die zur Ebene $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ total-polar ist. Der ausgeschnittene Kegelschnitt hat die Parameterdarstellung

$$\{0, \ i\mu^2, \ 2, \ \mu(1+i), \ -i\mu^2\tau, \ \tau^{-1}\}. \tag{61}$$

Berücksichtigt man, daß (61) im Komplex F enthalten ist (und analog für die übrigen Kongruenzen), so folgt

$$\begin{aligned} &\gamma_{14} = \gamma_{24} = \gamma_{34} = 0, \\ &\gamma_{15} = \gamma_{25} = \gamma_{35} = 0, \end{aligned} \qquad \gamma_{33} - \gamma_{45} + 2\gamma_{12} = 0.$$

Gemäß I, II, III hat man bisher

$$F = \gamma_{12} Q + 2\gamma_{04} x_0 x_4 + 2\gamma_{05} x_0 x_5 + (\gamma_{33} + \gamma_{12})(x_3^2 + 2x_4 x_5). \tag{60'}$$

IV. F soll fest sein. Wegen (57) führt das auf

$$\gamma_{04} = \gamma_{05} = 0.$$

Somit hat man für $F \bmod Q$ die Darstellung

$$F = x_3^2 + 2x_4 x_5 = 0. \tag{62}$$

Wir bezeichnen als *Leitgebilde* jene Figur, die aus den Leitlinien $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_5$ und dem *Leitkegelschnitt* besteht, der von der Ebene $(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)$ ausgeschnitten wird. Im R_3 stellt das Leitgebilde einen Regulus und zwei Geraden des anderen Regulus auf einer Quadrik dar. Dann gilt auf Grund der Tatsache, daß μ in (62) nicht vorkommt:

Je nach Wahl von μ gibt es zu einer Zentralbewegung, gegeben durch das Leitgebilde und $\mathfrak{a}_0(t)$, ∞^1 mögliche T-Figuren, die demselben Komplex angehören[8]).

Das einparametrige System von Bahnkurven (58) auf $\boldsymbol{Q}$ repräsentiert ∞^1 Regelflächen in derselben linearen Kongruenz; die Erzeugenden, die zum gleichen Parameterwert $t=t_0$ gehören, liegen sämtlich im gleichen Regulus. Man erkennt leicht: *Das System dieser Regelflächen ist identisch mit jedem der beiden Systeme von Schichtflächen der Diagonalenkongruenzen. Die ∞^1 Regelflächen bilden somit eine (spezielle) Konfiguration des Vertauschungstheorems von* BIANCHI. *Je vier unter ihnen fügen sich gemäß* (59) *in eindeutiger Weise zu einer T-Figur zusammen.*

Fassen wir diese ∞^1 T-Figuren in ein *T-Gebilde* zusammen, so können wir sagen: *Das T-Gebilde ist völlig bestimmt durch Vorgabe des Leitgebildes und einer Kurve in der Ebene des Leitkegelschnitts, oder auch durch Vorgabe eines $\boldsymbol{U}_3$ und einer ebenen Kurve in ihm.* Dem T-Gebilde ist der Komplex $\boldsymbol{F}$ eindeutig zugeordnet.

Welcher Art ist der Komplex $\boldsymbol{F}$? Die Determinante von

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}+\varrho\,\boldsymbol{Q}$$

ist

$$\Delta=\begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\varrho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\varrho & 0 \end{vmatrix} = \varrho^3(1+\varrho)^2(1-\varrho).$$

Demnach hat der Komplex das Symbol [(111) (11) 1] und ist von der Gattung 46[2]). *Die Singularitätenfläche des Komplexes ist eine doppeltgezählte Quadrik, die durch den Leitkegelschnitt repräsentiert wird. Die Doppelgeraden des Komplexes sind die Geraden des Leitgebildes.*

Nun gibt es bekanntlich zu $\boldsymbol{F}$ und seiner Singularitätenfläche noch ∞^1 konsinguläre Komplexe mit derselben Singularitätenfläche. Wie man leicht bestätigt, sind das die Komplexe

$$\boldsymbol{g}=\sigma\,x_3^2+2\,x_4\,x_5+\varrho\,\boldsymbol{Q}=0$$

[8]) Daß so tatsächlich immer eine T-Figur entsteht, d.h. daß im R_3 geschlossene Vierseite und ihre Brennflächen auftreten, ist fast evident und läßt sich auch rechnerisch leicht bestätigen.

mit σ, ϱ als Parametern. Für beliebig gewähltes, aber festes σ gibt es im Büschel genau einen Kegel, für den sämtliche Punkte der Fixebene $(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)$ Doppelpunkte sind, nämlich für $\varrho = 0$, d.i. der Kegel

$$\overline{g} = \sigma\, x_3^2 + 2\, x_4\, x_5 = 0.$$

Er schneidet die total-polare Ebene $(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_5)$ in einem Kegelschnitt. Für veränderliches σ entsteht ein Büschel von Kegelschnitten mit den Ausartungselementen $\sigma = 0$, $\sigma = \infty$. Die PLÜCKER-Quadrik schneidet den Büschelkegelschnitt $\sigma = -1$ aus. Wegen (62) ist für $\boldsymbol{F}$ $\sigma = +1$. Also:

$\boldsymbol{F}$ ist derjenige Komplex in der konsingulären Schar, dessen Spurkegelschnitt denjenigen der PLÜCKER*-Quadrik harmonisch von den Ausartungselementen trennt. Damit ist $\boldsymbol{F}$ nun völlig charakterisiert.*

Wir fassen zu einer *Konstruktion* zusammen: *Geht man von einem beliebig gewählten Leitgebilde aus, so gibt es dazu ∞^1 konsinguläre quadratische Komplexe, unter denen man nach obiger Vorschrift $\boldsymbol{F}$ auszuwählen hat. Gibt man ferner eine beliebige ebene Kurve in der Ebene des Leitkegelschnitts vor, so ist das T-Gebilde eindeutig bestimmt.*

Oder anders formuliert: Vorgegeben sei eine Kongruenzregelfläche in einer nichtparabolischen linearen Kongruenz. Im zugehörigen $\boldsymbol{U}_3$ des R_5 kann man auf ∞^3 Arten eine Ebene festlegen; es gibt somit ∞^3 mögliche Leitgebilde. Die Kurve $\mathfrak{a}_0(t)$ ist fixiert als Schnitt der Fixebene mit den Tangenten jener Kurve, die die Kongruenzregelfläche darstellt. Die T-Figur ist jetzt innerhalb des T-Gebildes sogar eindeutig bestimmt.

Zu einer Kongruenzregelfläche mit verschiedenen Leitlinien gibt es also ∞^3 T-Figuren, denen sie angehört, nämlich genau eine zu jeder Quadrik, die die Leitlinien enthält.

Nach M. BARNER[9]) zeigt man, daß sich die zu gegebenem Leitgebilde gehörigen T-Gebilde sogar integralfrei darstellen lassen.

6. Betrachten wir nun noch den Fall, daß der quadratische Komplex Tangentenkomplex einer F_2 ist[10]). Diese F_2 ist dann notwendig Brennfläche aller Kongruenzen der T-Figur. Da aber benachbarte Flächen wegen (10) nicht Teile der gleichen F_2 sein können, so folgt, daß etwa $\mathfrak{p}$ und $\overline{\mathfrak{q}}$ derselben F_2 angehören. Der quadratische Komplex besteht aus deren Tangenten, so daß

$$K = N = 0.$$

Aus (17), $(13)_7$, $(13)_8$ kommt jetzt mit $c_2 \neq 0$[3])

$$[a\,\overline{b}] + [\overline{c}\,d] = 0, \qquad [\overline{a}\,b] + [\overline{d}\,c] = 0, \tag{63}$$

$$[a\,\overline{a}] + [\overline{c}\,\overline{d}] = 0, \qquad [\overline{b}\,b] + [d\,c] = 0. \tag{64}$$

[9]) Man vgl. die demnächst im Archiv der Mathematik erscheinende Note von M. BARNER: Geometrische integralfreie Konstruktion der Asymptotenlinien der Regelflächen. Man hat den dort aufgeführten Ausnahmefall einer Geradenschar durch einen festen Punkt etwa auf die Geraden $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3)$ anzuwenden.

[10]) Vgl. 2. Dort wurde das zunächst ausgeschlossen. Jedoch sei weiterhin an [3]) festgehalten.

(63) läßt sich nach [2] so deuten: *Die Brennebenen durch* $\bar{\mathfrak{d}}$ *trennen* $\mathfrak{p}$ *und* $\bar{\mathfrak{q}}$ *harmonisch. Die Brennpunkte auf* $\mathfrak{d}$ *trennen* $\mathfrak{p}$ *und* $\bar{\mathfrak{q}}$ *harmonisch.*

(64) bedeutet, falls $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ nicht in Torsen (oder Kurven) entarten: *Beide Diagonalenkongruenzen* $\mathfrak{d}$ *und* $\bar{\mathfrak{d}}$ *sind zu den Flächen* $\mathfrak{q}$ *und* $\bar{\mathfrak{p}}$ *konjugiert.* $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ sind also *Fundamentaltransformierte von* EISENHART. *Die Kongruenz* $\mathfrak{d}$ *ist für* $\bar{\mathfrak{d}}$ *schichtbildend.*

Geht man etwa von der Parameterdarstellung einer Quadrik

$$\mathfrak{p}\,(=)\,\{1, u, v, uv\}, \qquad \bar{\mathfrak{q}}\,(=)\,\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$$

mit $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$ aus, so kann man für $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ zusammenfassend setzen

$$\mathfrak{r}\,(=)\,\{1 + \lambda,\ u + \lambda\alpha,\ \beta + \lambda v,\ u\beta + \lambda v\alpha\},$$

wobei λ dem System von Differentialgleichungen

$$(65)\qquad \begin{cases} [\log \lambda(\alpha - u)\,(\beta - v)^{-1}]_u + \dfrac{2}{\alpha - u} = 0, \\ [\log \lambda(\alpha - u)\,(\beta - v)^{-1}]_v - \dfrac{2}{\beta - v} = 0 \end{cases}$$

mit der Integrierbarkeitsbedingung

$$(66)\qquad \frac{\alpha_v}{(\alpha - u)^2} + \frac{\beta_u}{(\beta - v)^2} = 0$$

genügt. *Also hängt jetzt die T-Figur von einer Funktion zweier Veränderlichen ab.* Da für λ ein beliebiger Anfangswert vorgebbar ist, so sind alle ∞^1 Schichtflächen gleichberechtigt, und *es gibt bei vorgegebener Punktzuordnung, d.h. bei gegebenen* α, β, *die* (66) *genügen,* ∞^2 *T-Figuren im quadratischen Komplex*[11]).

Falls aber die F_2 ein Kegel zweiter Ordnung ist, so verläuft alles entsprechend, und auch die Ergebnisse sind ganz die gleichen.

Hierzu ist auch die duale Konstruktion möglich: Statt von einem Kegel kann man von einem Kegelschnitt (als Klassengebilde) ausgehen. Etwa die Brennflächen $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ sind jetzt in Teile des Kegelschnitts entartet.

In den beiden letzterwähnten Fällen gehört der quadratische Komplex der Gattung 45 an, während er für eine (nichtentartete) Quadrik von der Gattung 49 war.

7. Bisher war stets die Entartung einer Brennfläche in eine Kurve von der Betrachtung ausgenommen (abgesehen von der Bemerkung am Schluß der vorigen Nummer). Läßt man nun auch diese Einschränkung fallen, so kann etwa

$$(67)\qquad c_2 = 0$$

[11]) Insbesondere ist als Sonderfall eine aus der Theorie der Komplexflächen bekannte Figur enthalten. Genau dann nämlich, wenn die Diagonalenkongruenzen sogar gegenseitig schichtbildend sind, gilt (25), und alle Kongruenzen sind R-Systeme. Die Flächen $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ sind im allgemeinen zweifache Komplexflächen. Die Schichtflächen der Diagonalenkongruenzen bilden zwei einparametrige Systeme von Komplexflächen. Man vgl. hierzu etwa [6], [8].

angenommen werden, so daß $\mathfrak{p}$ eine Kurve ist. Dabei sei aber der triviale Fall, wo der quadratische Komplex (oder einer der möglichen quadratischen Komplexe) zerfällt, ausgeschlossen. Wenn man nun mit (67) die Gln. (17), sowie $(13)_7$ und $(13)_8$ diskutiert, zeigt sich, daß sich stets Sonderfälle der vorigen Nummer ergeben: Entweder sind zwei gegenüberliegende Flächen der T-Figur Teile derselben F_2 (Quadrik oder Kegel), und eine der anderen Brennflächen oder beide entarten in Kurven. Oder aber es entarten zwei gegenüberliegende Flächen in denselben Kegelschnitt, die beiden restlichen sind Flächen oder auch Kurven, der Komplex besteht aus den Treffgeraden dieses Kegelschnitts.

Literatur

[1] Barner, M.: Kinematische Fragen in der Projektivgeometrie der Regelflächen. Mh. Math. Phys. **59** (1956). — [2] Bol, G.: Projektive Differentialgeometrie. 2 Bde. Göttingen 1950 u. 1954. Bd. 3 in Vorbereitung. — [3] Bol, G.: Alternierende Formen und halbinvariante Differentiation. Math. Z. **54**, 141—159 (1951). — [4] Calapso, R.: Sur la configuration (T) de Finikoff et sur les éléments projectifs qui s'y rattachent. C. R. Acad. Sci. URSS. **1935** (II), 441—446. — Rec. math. Moscou **42**, 451—460 (1935). — Sur la configuration (T) de M. Finikoff à caractéristique -1. Rec. math. Moscou **42**, 461—464 (1935). — [5] Finikoff, S.: La transformation T des congruences de droites. Rend. Accad. L. Roma (6) **14**, 421—427 (1931). — Transformation T des congruences de droites. Annali Pisa (2) **2**, 59—88 (1933). — [6] Gambier, B.: Surfaces dont les asymptotiques de l'un ou l'autre système appartiennent à des complexes linéaires. I. II. C. R. Acad. Sci. Paris **203**, 700—702, 971—973 (1936). — [7] Su, B.: On certain configurations (T) of Finikoff and the transformations of Calapso. I. J. Chinese Math. Soc. **1**, 174—206 (1936). II. J. Chinese Math. Soc. **2**, 61—83 (1937). — [8] Su, B.: On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes. I. Tohoku **40**, 408—420 (1935). II. Tohoku **40**, 433—448 (1935). III. Tohoku **41**, 1—19 (1935). IV. Tohoku **41**, 203—215 (1935). V. Rep. Tohoku Univ. **24**, 601—633 (1936). VI. Rep. Tohoku Univ. **24**, 634—642 (1936).

Freiburg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 5. September 1955.)

McMINN, T. J.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 286—297 (1956)

On figures of equilibrium of rotating liquids

By
TREVOR J. McMINN

1. Summary. Suppose we have a liquid of uniform density rotating in space under the influence of its own Newtonian gravitational forces. Calling the direction of the axis of rotation vertical, we suppose that the liquid fills a bounded open set with vertical convexity and a horizontal equatorial, plane of symmetry. In Theorem 3.2 below we fix finite bounds for the radius of curvature at equatorial points of curves cut by vertical planes from a surface on which the sum of the gravitational and centrifugal potential is constant. In particular, these bounds apply when the surface is the boundary of a figure of equilibrium of a uniformly rotating liquid.

In Theorems 3.5, 3.6, 3.7. and 3.8 we modify a technique introduced by L. Lichtenstein [*1*] pp. 12–15 to fix another bound for the radius of curvature at certain points on the equator of curves cut by vertical planes from the bounding surfaces of members of fairly general classes of equilibrium figures. This bound is the width of the figure in the direction parallel to both the plane of the curve and the equatorial plane. For a figure with a vertical plane of symmetry perpendicular to the plane of the curve which is convex in the direction perpendicular to the vertically symmetric plane, the bound for all points of the equator is one-half the width in the direction perpendicular to the vertical plane of symmetry (Theorems 3.9 and 3.10).

An immediate consequence of Theorem 3.2 is a stronger result than that due to L. Lichtenstein [*1*] pp. 20–21 and [*2*]. Our result, Theorem 3.3, is that, if a curve of the kind mentioned in the first paragraph is smooth at a point on the equator, then the weight force (vector sum of the gravitational and centrifugal forces) is different from zero at this point and hence the surface of constant weight force potential is smooth in the neighborhood of this point.

The question of the oblateness of an equilibrium figure has been treated by W. Nikliborc [*3*], [*4*], [*5*], [*6*]. His best upper bound for the oblateness (defined by him somewhat differently than by us) is $\sqrt{20}$. We employ Theorem 3.5 to prove Theorems 4.4 and 4.6 which state that for members of fairly general classes of figures, the oblateness with respect to a particular direction perpendicular to the axis of rotation (the ratio of the width in the direction of the axis of rotation to the width in the particular direction) is less than 2. For somewhat less general classes, we prove in Theorems 4.5 and 4.7 that it is less than or equal to $\sqrt{3}$. For a figure which is convex in the direction perpendicular to a vertical plane of symmetry, we prove in Theorem 4.8 that the oblateness with respect to this direction is less than or equal to one.

2. Preliminary Agreements. We assume a rectangular system of coordinates x, y, z and agree that the z-axis is vertical and the xy-plane is the equatorial plane E.

We let R_ϑ be a transformation that rotates the liquid through an angle ϑ about the z-axis.

We let M be the set of points with non-negative z-coordinates.

We assume we have a perfect liquid of constant density ϱ occupying a bounded open set T in three-space.

Let S be the boundary of T, v the volume of T, d the diameter of T, b one-half the vertical width of T, w_ϑ the width of $R_\vartheta(T)$ in the x-direction, u_ϑ the inf of the x-coordinates of points in $R_\vartheta(T)$, c the sup of the volumes of right cylindrical figures with vertical elements contained in T, Δ the intersection of T with the xy-plane, L the boundary of Δ, and d' the horizontal diameter of Δ.

We assume the gravitational constant is one and let $V(x, y, z)$ be the Newtonian potential at (x, y, z) due to the liquid in T. Thus

$$V(x, y, z) = \iiint_T \varrho\, \delta(x', y', z', x, y, z)^{-1}\, dx'\, dy'\, dz'$$

where $\delta(x', y', z', x, y, z)$ is the distance between (x, y, z) and (x', y', z'). We let $U(x, y, z) = V(x, y, z) + (\omega^2/2)\,(x^2 + y^2)$, where ω is the uniform angular velocity of rotation. Thus U is the weight force potential. First partical derivatives of V and U give components of the gravitational and weight force respectively.

3. Curvature. Probably due to E. Schmidt [7] is the following elementary result, a proof of which we adumbrate.

3.1. LEMMA. *The absolute value of the component of the gravitational force normal to a plane tangent to S at the point of tangency is less than or equal to* $\varrho(1.92\pi^2 v)^{\frac{1}{3}}$.

For a given volume the normal component of the force is maximized by the liquid enclosed by a surface having the property that the contribution to the normal component at the point of tangency due to a unit point mass on the surface is the same for all points of the surface, the appropriate surface being chosen to enclose a figure with the given volume.

3.2. THEOREM. *If*

(i) *T is vertically convex and symmetric about the xy-plane,*

(ii) *S' is a surface of constant U,*

(iii) *P is a vertical plane intersecting S' not tangent to S',*

(iv) *r is the radius of curvature of $P \cap S'$ at a point (a, k, o) of $P \cap S' \cap E$,*

(v) *F is the absolute value of the weight force in the direction parallel to P and E at (a, k, o),*

(vi) *l is the sup of distances from (a, k, o) to points of T, then*

$$r \leq F\, l^3 (\varrho\, c)^{-1} < \left[\varrho(1.92\pi^2 v)^{\frac{1}{3}} + \omega^2 |a|\right] l^3 (\varrho\, c)^{-1}.$$

PROOF. We may assume without loss of generality that P is parallel to the xz-plane. It is easily shown (see [1], p. 19) that the vertical component of the weight force is different from zero outside of E. Hence there is a continuous function g whose graph is $S' \cap M$. Let $g(t, k) > 0$ and let Q_t be the plane with equation $z = g(t, k)$. Let $0 < \zeta < b$ and let h_t be the function whose graph is that part of the image of S about Q_t which lies below the plane $z = -\zeta$. Let A_t be the domain of h_t and B_t the area of A_t. Let F_t and H_t be the x and z-components respectively of the weight force at $g(t, k)$. Let λ_t be the x-component of the intersection of the xy-plane with the normal to S' at $(t, k, g(t, k))$. Finally, let l_t be the sup of distances from $(t, k, g(t, k))$ to points of T.

If we take note of the convexity and symmetry of T, then we observe that the part of T lying above the graph of h_t does not contribute to H_t and hence that

$$|H_t| > \iint_{A_t} \int_{h_t(x,y)-2g(t,k)}^{h_t(x,y)} \varrho\,(g(t,k)-z)\,[(x-t)^2+(y-k)^2+(z-g(t,k))^2]^{-\frac{3}{2}}\,dz\,dy\,dx >$$

$$> \iint_{A_t} \int_{h_t(x,y)-2g(t,k)}^{h_t(x,y)} \varrho\,(g(t,k)+\zeta)\,l_t^{-3}\,dz\,dy\,dx >$$

$$> 2\varrho\,B_t\,g(t,k)\,(g(t,k)+\zeta)\,l_t^{-3} > 0.$$

Since the force is normal to S', it is clear that

$$|a-\lambda_t|/g(t,k) = |F_t/H_t|$$

and hence that

$$|a-\lambda_t| = |(F_t\,g(t,k))/H_t| \leq$$

$$\leq |F_t\,g(t,k)|/(2\varrho\,B_t\,g(t,k)\,(g(t,k)+\zeta)\,l_t^{-3})$$

$$= |F_t|/(2\varrho\,B_t(g(t,k)+\zeta)\,l_t^{-3}).$$

Allowing (t, k, o) to approach (a, k, o) through points of $P \cap \Delta$ we get

$$r = \lim_{t \to a} |a-\lambda_t| \leq F/(2\varrho\,B_a\,\zeta\,l^{-3}).$$

Now since $2B_a\zeta \leq c$, we use Lemma 3.1 to conclude that

$$r \leq F\,l^3(\varrho\,c)^{-1} < [\varrho(1.92\,\pi^2 v)^{\frac{1}{3}} + \omega^2|a|]\,l^3(\varrho\,c)^{-1}.$$

3.3. THEOREM. *If* (i) *through* (vi) *of Theorem* 3.2 *and* $P \cap S'$ *is smooth at* (a, k, o), *then* $F > 0$ *and* S' *is smooth at* (a, k, o).

PROOF. If $P \cap S'$ is smooth at (a, k, o), then by 3.2, $0 < r < \infty$ and $F > 0$. Since $F > 0$, S' is the graph of some function possessing continuous partial derivatives in the neighborhood of (a, k, o). Hence S' is smooth at (a, k, o).

3.4. REMARKS. We shall henceforth assume that $\omega > 0$ and that our liquid is in relative equilibrium, that is, that U assumes a constant value on the surface of each component of T. The surface value of U may, however, vary from component to component.

It is proved in [1], pp. 12–15, that the center of mass of T lies on the z-axis, the axis of rotation, and in a plane of symmetry of T perpendicular to the axis of rotation. We shall assume without loss of generality that this plane of symmetry, the equatorial plane, is the xy-plane. It is also proved there that T is vertically convex. Thus $S \cap M$ is the graph of a function g defined on $\Delta \cup L$. It is further proved in [1], p. 12, that g has derivatives of all orders in Δ, in fact, B. Friedman [8] has proved that g is analytic.

We are now justified in applying the results of 3.3 to surfaces of constant weight force potential of a figure of equilibrium, in particular to the bounding surface of such a figure.

Applying the Poincaré upper bound $2\pi\varrho$ for ω^2 [9], or assuming conditions which permit us to apply the upper bound $\pi\varrho$ of Crudeli and Nikliborc [10] and [11] or [1], p. 20, we get for the r of 3.2 the purely geometric bounds

$$\left[(1.92\pi^2 v)^{\frac{1}{3}} + 2\pi|a|\right] l^3 c^{-1},$$
$$\left[(1.92\pi^2 v)^{\frac{1}{3}} + \pi|a|\right] l^3 c^{-1}$$

respectively.

Let α_ϑ be the inf of the x-coordinates of the points of intersection of the xy-plane with normals to S, not lying in the xy-plane, at points with positive x-coordinates.

Let β_ϑ be the inf of the x-coordinates of the points of intersection of the xy-plane with normals to S, not lying in the xy-plane, at points with negative x-coordinates.

3.5. THEOREM. *If* $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$, *then* $\mu_\vartheta \leq \alpha_\vartheta$.

PROOF. There is no loss of generality in taking ϑ to be zero.

We shall assume the negation of the theorem and arrive at a contradiction, namely, that the weight force potential is not constant on some component of S. Thus we assume $\alpha_0 < \mu_0$.

Since the vertical component of the weight force is not zero above the xy-plane, there is no point except possibly in E where a tangent to S can be vertical. This fact and 3.3 assure us that $-\infty < \alpha_0 < \beta_0 < \infty$. Now let h be such that $\alpha_0 < h < \mu_0$ and $h < (\alpha_0 + \beta_0)/2$. Let J be the line in the xy-plane parallel to the y-axis passing through (h, o, o). Let y, r, φ be cylindrical coordinates of a point at a distance r from J such that the plane through the point and through J makes an angle φ with the yz-plane, such that $\pi/2 \leq \varphi < \pi$ for first octant points. Let $\delta(y, r, \varphi, p)$ be the distance between a point with cylindrical coordinates y, r, φ and a point p. Let K be the set of mid points of open arcs formed by the intersection of T with circles concentric to J lying in planes perpendicular to J. Let K' be the closure of K.

Let p_0 be a point of K' with maximum φ-coordinate. Let the cylindrical coordinates of p_0 be y_0, r_0, φ_0. Since $\alpha_0 < h < u_0$ it is clear that $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$.

Let Δ' and Δ'' be the cylindrical projections of T and Δ respectively on the half plane with cylindrical equation $\varphi = 0$. Let $\xi(y, r)$ and $\eta(y, r)$ be finite or possibly infinite sequences of φ coordinates of upper and lower end

points respectively of open circular arcs formed by the intersection of T with a circle of radius r in a plane perpendicular to J having its center at (h, y, o).

We now break the proof into two cases according to whether p_0 is or is not in S.

CASE 1. *p_0 is in S.* Let F be the component of the gravitational force at p_0 in direction of the line tangent to S at p_0 lying in the plane $y = y_0$. Let F be positive in the direction opposite to the direction in which φ is measured. Let $\cos(y, r, \varphi)$ be the cosine of the angle from the vector at p_0 representing F and the line from p_0 to the point with cylindrical coordinates y, r, φ. It is easy to see that if $0 < \varphi_0 - (\varphi' + \varphi'')/2$ and $\varphi' < \varphi''$, then

$$0 < \int_{\varphi'}^{\varphi''} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi .$$

Hence for points in Δ' with cylindrical coordinates y, r, o

$$0 \leq \sum_i \int_{\eta(y,r)_i}^{\xi(y,r)_i} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi .$$

Since $\Delta'' \subset \Delta'$, Δ'' is a set of positive two dimensional measure, and the preceding inequality is strict for points in Δ'', we see that

$$0 < \iint_{\Delta'} \sum_i \int_{\eta(y,r)_i}^{\xi(y,r)_i} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi\, dr\, dy = F .$$

Since the normal to S at p_0 intersects J, $h < \beta_0$ and $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$ it is clear that the x-coordinate of p_0 is positive and hence the component of the centrifugal force in the direction of F is also positive. Thus there is a non-zero component of the weight force tangent to S. But this contradicts the condition that the weight force is normal to S, that is, that the boundary o each component of T is a surface of constant weight force potential.

CASE 2. *p_0 is not in S.* There are points p_1 and p_2 on the boundary of the same component of T with cylindrical coordinates y_0, r_0, φ_1 and y_0, r_0, φ_2, respectively such that $\varphi_1 < \varphi_2$, $\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ and there is no point of S with cylindrical coordinates y_0, r_0, φ' for which $\varphi_1 < \varphi' < \varphi_2$. Let V_1 and U_1 be the gravitational and weight force potentials respectively at p_1. Let V_2 and U_2 be corresponding quantities at p_2.

It is easy to see that if

$$|\varphi_1 - (\varphi' + \varphi'')/2| < |\varphi_2 - (\varphi' + \varphi'')/2| ,$$

then

$$0 < \int_{\varphi'}^{\varphi''} \varrho\, [\delta(y, r, \varphi, p_1)^{-1} - \delta(y, r, \varphi, p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi .$$

Hence for points (y, r, o) in Δ'

$$0 \leq \sum_i \int_{\eta(y,r)_i}^{\xi(y,r)_i} \varrho\, [\delta(y, r, \varphi, p_1)^{-1} - \delta(y, r, \varphi, p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi .$$

Since $\Delta'' \subset \Delta'$, Δ'' is a set of positive two dimensional measure, and the preceding inequality is strict for (y, r, o) in Δ'', we see that

$$0 < \iint_{\Delta'} \sum_i \int_{\eta(y,r)_i}^{\xi(y,r)_i} \varrho\,[\delta(y, r, \varphi, p_1)^{-1} - \delta(y, r, \varphi, p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi\, dr\, dy = V_1 - V_2.$$

If we can show that the square of the x-coordinate of p_1 is greater than or equal to the square of the x-coordinate of p_2, then we will have $0 < U_1 - U_2$ in contradiction to the condition that the boundary of each component of T is a surface of constant weight force potential.

We now proceed to show this. Let x_1, y_1, z_1 and x_2, y_1, z_2 be the rectangular coordinates of p_1 and p_2 respectively. If $0 \leq x_2$, then since $x_2 < x_1$, clearly $x_2^2 < x_1^2$. If $x_2 < 0$, then consider the three circular cylindrical surfaces

$$C_1: \quad (x-h)^2 + z^2 = r_0^2 = h^2 + n^2,$$
$$C_2: \quad (x-\alpha_0)^2 + z^2 = \alpha_0^2 + m^2,$$
$$C_3: \quad (x-\beta_0)^2 + z^2 = \beta_0^2 + m^2,$$

where m is so chosen that (x_2, y_1, z_2) lies in C_3. Let γ be that part of the intersection of S with the plane $y = y_0$ which lies outside C_1, and inside the sector between φ_1 and φ_2. Because of the nature of α_0 and β_0, it is not difficult to see that γ cannot lie inside both C_2 and C_3. Hence, letting x_0 be the x-coordinate of the intersection of C_1, and C_2, we have $x_0 < x_1$. Expressing the fact that (x_2, y_1, z_2) lies on C_1 and C_3 and that x_0 is the x-coordinate of a point on C_1 and C_2 we get

$$x_2 = (n^2 - m^2)/(2(\beta_0 - h)),$$
$$x_0 = (n^2 - m^2)/(2(\alpha_0 - h)).$$

Now since $x_2 < 0$ and $h < \beta_0$, we have $n^2 < m^2$. Furthermore, since

$$\alpha_0 < h < (\alpha_0 + \beta_0)/2,$$

we have

$$|x_2| < x_0 < x_1.$$

Hence, finally, $x_2^2 < x_1^2$.

The proof is complete.

3.6. THEOREM. *If for each plane P perpendicular to the y-axis, $P \cap R_\vartheta(S) \cap M$ is non-decreasing from an equatorial point with negative x-coordinate to the yz-plane, then $u_\vartheta \leq \alpha_\vartheta$.*

PROOF. Suppose the contrary. Then since $u_\vartheta \leq \beta_\vartheta$ we have $\alpha_\vartheta < u_\vartheta \leq \beta_\vartheta$. Hence by 3.5, $u_\vartheta \leq \alpha_\vartheta$. Contradiction.

3.7. THEOREM. *If $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$, P is a vertical plane intersecting $R_\vartheta(T)$ and r is the radius of curvature at a point of $P \cap R_\vartheta(S) \cap E$ with positive x-coordinate of $P \cap R_\vartheta(S)$, then $r \leq w_\vartheta$.*

PROOF. Apply 3.5.

3.8. THEOREM. *If for each plane P perpendicular to the y-axis $P \cap R_\vartheta(S) \cap M$ is non-decreasing from an equatorial point with negative x-coordinate to the yz-plane, then for each plane P perpendicular to the y-axis the radius of curvature of $P \cap R_\vartheta(S)$ at a point of $P \cap R_\vartheta(S) \cap E$ with positive x-coordinate is less than or equal to w_ϑ.*

PROOF. Apply 3.6.

3.9. THEOREM. *If $R_\vartheta(T)$ is symmetric about the yz-plane and convex in the x-direction, then $0 \leq \alpha_\vartheta$.*

PROOF. As in 3.5 we shall take ϑ to be zero and assume the negation of the theorem. We will then arrive at the contradiction that the boundary of some component of T is not a surface of constant weight force potential. We thus assume $\alpha_0 < 0$.

Let $h < 0$ and let J_h be the line parallel to the y-axis passing through (h, o, o). Let y, r, φ be cylindrical coordinates of a point at a distance r from J_h such that the plane through the point and through J_h makes an angle φ with the yz-plane, such that $\pi/2 \leq \varphi < \pi$ for first octant points. Let $\delta(y, r, \varphi, p)$ be as in 3.5. Let W be the set of points with cylindrical coordinates y, r, φ in T such that there are two points in S with cylindrical coordinates y, r, φ' and y, r, φ'' respectively for which $0 \leq \varphi' < \varphi < \varphi''$, $\varphi' < \pi$, and there is no point in S with cylindrical coordinates y, r, φ''' with $\varphi' < \varphi''' < \varphi''$. Let W' be the set of points in $T - W$ with x-coordinates greater than h, W'' be the set of points in T with x-coordinates less than h, and W''' be the image of W' about the plane $x = h$. Let q_h be the sup of the lengths of line segments formed by intersecting W with lines parallel to the x-axis.

Since circles concentric and perpendicular to the line J_{α_0} intersect T in circles or in pairs of open circular arcs with mid points in the xy-plane, it is possible to choose h so that $\alpha_0 < h < 0$ and $0 < q_h < -h$. Since $q_h < -h$ and since T is symmetric about the yz-plane and convex in the x-direction, it is clear that W''' contains W''. It is also clear that W, W' and W'' are mutually disjointed sets whose union is T.

Let K be the set of midpoints of open arcs, each arc having the property that the x-coordinate of the endpoint with the smaller φ-coordinate is positive and it is formed by the intersection of T with a circle concentric and perpendicular to J_h. Let K' be the closure of K. Let p_0 be the point of K' with the maximum φ-coordinate. Let the cylindrical coordinates of p_0 be y_0, r_0, φ_0. Since $\alpha_0 < h < 0$, T is convex in the x-direction and symmetric about the yz-plane, it can be checked that $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$.

We now break the proof into two cases according to whether p_0 is or is not in S.

CASE 1. *p_0 is in S.* Since T is symmetric about the yz-plane and convex in the x-direction and $h < 0$, it is easy to see that the x-coordinate of p_0 is non-negative. Indeed, since S is smooth above the xy-plane, the x-coordinate of p_0 is positive.

Let F be the component of the gravitational force at p_0 in the direction of the line tangent to S at p_0 lying in the plane $y = y_0$. Let F be positive in the direction opposite to the direction in which φ is measured. Let $\cos(y, r, \varphi)$ be the cosine of the angle from the vector at p_0 representing F and the line from p_0 to the point with cylindrical coordinates y, r, φ.

It can be checked that if

$$0 < \varphi' < \pi/2, \quad 0 < \varphi'' \leq \pi/2, \quad \varphi' < \varphi'', \quad 0 < r,$$
$$\pi \leq t \leq 2\pi - \varphi_0, \quad \varphi_0 - \pi/2 < s \leq \pi/2,$$

then

$$0 < \delta(y, r, \pi - t, p_0)^{-2} < \delta(y, r, t, p_0)^{-2},$$
$$-\cos(y, r, \pi - t) < \cos(y, r, t),$$
$$0 < \delta(y, r, \pi + s, p_0)^{-2} < \delta(y, r, s, p_0)^{-2},$$
$$\cos(y, r, \pi + s) < -\cos(y, r, s)$$

and hence that

$$(1) \quad \begin{cases} 0 > \int\limits_{\pi+\varphi'}^{\pi+\varphi''} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi + \\ + \int\limits_{2\pi-\varphi''}^{2\pi-\varphi'} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0 < \int\limits_{\varphi'}^{\pi-\varphi'} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi + \\ + \int\limits_{\pi+\varphi'}^{2\pi-\varphi'} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi. \end{cases}$$

We can now use (1) to show that

$$\iiint\limits_{W'''} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi\, dr\, dy <$$
$$< \iiint\limits_{W''} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi\, dr\, dy$$

and use (2) to show that

$$0 < \iiint\limits_{W'''} + \iiint\limits_{W'}$$

and hence that

$$0 < \iiint\limits_{W'''} + \iiint\limits_{W'}.$$

The preceeding inequalities are strict because the cylindrical projection of W' on the half plane with cylindrical equation $\varphi = 0$ is a set of positive two dimensional measure. Finally, we may check that $0 \leq \iiint\limits_{W}$ and hence that

$$0 < \iiint\limits_{W'''} + \iiint\limits_{W'} + \iiint\limits_{W'} = F.$$

Since the x-coordinate of p_0 is positive, the component of the centrifugal force in the direction of F is also positive.

A contradiction has now been arrived at, namely, that there is a non-zero component of the weight force tangent to S.

CASE 2. *p_0 is not in S.* There are points p_1 and p_2 on the boundary of the same component of T with cylindrical coordinates y_0, r_0, φ_1 and y_0, r_0, φ_2 respectively such that $\varphi_1 < \varphi_2$, $\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ and there is no point in S with cylindrical coordinates y_0, r_0, φ' for which $\varphi_1 < \varphi' < \varphi_2$. Let V_1 and U_1 be the gravitational and weight force potentials respectively at p_1. Let V_2 and U_2 be corresponding quantities at p_2.

Somewhat as in CASE 1, we can show that if $0 < \varphi' < \pi/2$, $0 < \varphi'' \leq \pi/2$, $\varphi' < \varphi''$ and $0 < r$, then

$$(3) \quad \begin{cases} 0 > \int\limits_{\pi+\varphi'}^{\pi+\varphi''} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\,r\,d\varphi + \\ \quad + \int\limits_{2\pi-\varphi''}^{2\pi-\varphi'} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\,r\,d\varphi, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 0 < \int\limits_{\varphi'}^{\pi-\varphi'} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\,r\,d\varphi + \\ \quad + \int\limits_{\pi+\varphi'}^{2\pi-\varphi'} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\,r\,d\varphi. \end{cases}$$

We can now use (3) to show that

$$\iiint\limits_{W'''} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\,r\,d\varphi\,dr\,dy <$$
$$< \iiint\limits_{W''} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\,r\,d\varphi\,dr\,dy$$

and use (4) to show that

$$0 < \iiint\limits_{W'''} + \iiint\limits_{W'}$$

and hence that

$$0 < \iiint\limits_{W''} + \iiint\limits_{W'}.$$

The preceding inequalities are strict for the same reason given in CASE 1. We have finally $0 \leq \iiint\limits_{W}$ and hence

$$0 < \iiint\limits_{W''} + \iiint\limits_{W'} + \iiint\limits_{W} = V_1 - V_2.$$

Since the x-coordinate of p_1 is greater than the absolute value of the x-coordinate of p_2, the centrifugal potential at p_1 is greater than at p_2. Hence $0 < U_1 - U$, in contradiction to the condition that the boundary of each component of T is a surface of constant weight force potential.

The proof is complete.

3.10. THEOREM. *If $R_\vartheta(T)$ is symmetric about the yz-plane and convex in the x-direction, P is a plane perpendicular to the y-axis intersecting $R_\vartheta(T)$, and r is the radius of curvature of $P \cap R_\vartheta(S)$ at a point of $P \cap R_\vartheta(S) \cap E$, then $r \leq w_\vartheta/2$.*

PROOF. Apply 3.9.

4. Oblateness.

4.1. LEMMA. *If* $0 \leq f(x) < \infty$ *for* $0 \leq x \leq a$, $f(0) = h$, $f(a) = 0$, *and* f *is differentiable for* $0 < x < a$ *and* $0 < f(x)$, *then*

$$\inf_{0<x<a} f(x) f'(x) + x \leq (a^2 - h^2)/(2a).$$

PROOF. $f(x) f'(x) + x$ is the x-coordinate of the point of intersection of the x-axis with the normal to the graph of f at the point $(x, f(x))$. Consider now the function whose graph is the arc of the circle with center on the x-axis passing through (o, h) and (a, o). The x-coordinate of the center is $(a^2 - h^2)/2a$.

It can be easily checked that if the graph of f does not coincide with this arc between o and a, then there is an x' for which

$$f(x') f'(x') + x' < (a^2 - h^2)/(2a).$$

4.2. THEOREM. *If* $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$, (p, q, h) *is in* $R_\vartheta(S)$, (a, q, o) *is in* $R_\vartheta(S)$, $0 < h$, *and* $\alpha_\vartheta \leq p < a$ *then*

(i) $u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq (h^2 + (p - u)^2)^{\frac{1}{2}} + u_\vartheta$,

(ii) $0 \leq p$ *implies*

$$u_{\vartheta+\pi} \geq a > (h^2 + w_\vartheta^2)^{\frac{1}{2}} - w_\vartheta \geq (h^2 + d'^2)^{\frac{1}{2}} - d'.$$

PROOF. Obviously $u_{\vartheta+\pi} \geq a$ and $p - u_\vartheta < w_\vartheta \leq d'$. By 3.5, $u_\vartheta \leq \alpha_\vartheta$.

Letting $f(x) = g(x, q)$ for (x, q, o) in Δ and $f(x) = 0$ for (x, q, o) not in Δ, we have by 4.1

$$u_\vartheta - p \leq \alpha_\vartheta - p \leq \big((a - p)^2 - h^2\big)/\big(2(a - p)\big).$$

Consequently,

$$2(a - p)(u_\vartheta - p) \leq \big((a - p)^2 - h^2\big),$$

$$(a - p)^2 + 2(a - p)(p - u_\vartheta) + (p - u_\vartheta)^2 \geq h^2 + (p - u_\vartheta)^2,$$

$$(a - u_\vartheta) \geq (h^2 + (p - u_\vartheta)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Thus

$$u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq \big(h^2 + (p - u)^2\big) + u_\vartheta.$$

Also $0 \leq p$ implies

$$u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq (h^2 + (p - u_\vartheta)^2)^{\frac{1}{2}} + u_\vartheta - p > (h^2 + w_\vartheta^2)^{\frac{1}{2}} - w_\vartheta$$
$$\geq (h^2 + d'^2)^{\frac{1}{2}} - d'.$$

4.3. THEOREM. *If* $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$, (p, q, b) *is in* $R_\vartheta(S)$ (a, q, o) *is in* $R_\vartheta(S)$, *then*

(i) $u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq (b^2 + (p - u_\vartheta)^2)^{\frac{1}{2}} + u_\vartheta$,

(ii) $0 \leq p$ *implies*

$$u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq (b^2 + w_\vartheta^2)^{\frac{1}{2}} - w_\vartheta \geq (b^2 + d'^2)^{\frac{1}{2}} - d'.$$

PROOF. Since (p, q, b) is a point of $R_\vartheta(S)$ with maximum z-coordinate, $\alpha_\vartheta \leq p$. Obviously $0 < b$ and $p < a$. Hence the conclusion follows immediately from 4.2.

4.4. THEOREM. *If* $\alpha_\phi < \beta_\phi$ *then* $(2b)/w_\phi < 2$.

PROOF. From 4.3, (i) we get

$$w_\phi \geq a - u_\phi \geq \left(b^2 + (p - u_\phi)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$w_\phi^2 \geq b^2 + (p - u_\phi)^2,$$
$$\left(w_\phi^2 - (p - u_\phi)^2\right)/w_\phi^2 \geq b^2/w_\phi^2,$$
$$2\left(1 - (p - u_\phi)^2/w_\phi^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq (2b)/w_\phi.$$

Since $0 < p - u_\phi < w_\phi$ we get

$$2 > (2b)/w_\phi.$$

4.5. THEOREM. *If* $\alpha_\phi < \beta_\phi$ *and* $\alpha_{\phi+\pi} < \beta_{\phi+\pi}$, *then* $(2b)/w_\phi \leq \sqrt{3}$.

PROOF. From 4.3 (i) we get

$$2\left(1 - (p - u_\phi)^2/w_\phi^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq (2b)/w_\phi,$$
$$2\left(1 - (p - u_{\phi+\pi})^2/w_\phi^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq (2b)/w_\phi.$$

Since $p - u_\phi \geq w_\phi/2$ or $p - u_{\phi+\pi} \geq w_\phi/2$, we have

$$\sqrt{3} \geq (2b)/w_\phi.$$

4.6. THEOREM. *If for each plane* P *perpendicular to the* y*-axis* $P \cap R_\phi(S) \cap M$ *is non-decreasing from an equatorial point with negative* x*-coordinate to the* yz*-plane then* $(2b)/w_\phi < 2$.

PROOF. Suppose $(2b)/w_\phi \geq 2$. Then it is easy to see that $\alpha_\phi < u_\phi$. But the nature of S for points with negative x-coordinates assures us that $u_\phi \leq \beta_\phi$. Hence $\alpha_\phi < \beta_\phi$. But 4.4 tells us that $(2b)/w_\phi < 2$, in contradiction to our supposition.

4.7. THEOREM. *If* $R_\phi(T)$ *is convex in the* x*-direction, if for each plane* P *perpendicular to the* y*-axis intersecting* $R_\phi(T)$, $P \cap R_\phi(T) \cap M$ *has a point of maximum* z*-coordinate in the* yz*-plane, and if* $-u_\phi = u_{\phi+\pi}$, *then* $(2b)/w_\phi \leq \sqrt{3}$.

PROOF. Suppose $(2b)/w_\phi > \sqrt{3}$. Then there is a point of $R_\phi(S)$ which is outside both of the cylindrical surfaces C_1 and C_2 described as follows: Let C_1 be the circular cylindrical surface with radius w_ϕ concentric to the line through (u_ϕ, o, o) parallel to the y-axis and C_2 the circular cylindrical surface of radius w_ϕ concentric to the line through $(u_{\phi+\pi}, o, o)$ parallel to the y-axis. Hence $\alpha_\phi < u_\phi \leq \beta_\phi$ and $\alpha_{\phi+\pi} < u_{\phi+\pi} \leq \beta_{\phi+\pi}$. But 4.5 tells us that $(2b)/w_\phi \leq \sqrt{3}$ which contradicts our supposition.

4.8. THEOREM. *If* T *is symmetric about the* yz*-plane and convex in the* x*-direction, then* $(2b)/w_\phi \leq 1$.

PROOF. Since by 3.9, $0 \leq \alpha_\phi$ it is clear that T is contained in the circular cylindrical surface with radius $w_\phi/2$ concentric to the y-axis. Hence $(2b)/w_\phi \leq 1$.

4.9. REMARKS. Because of the fact that the oblateness of a sphere (the figure of equilibrium of a non-rotating liquid) is one, a better bound holding

for all angular velocities cannot be found. However, there is much room for improvement. First it seems natural to conjecture that the unit bound still holds when all geometric restrictions are removed and furthermore is only attained for $\omega = 0$. Beyond this it would be desirable to obtain the best bounds for each angular velocity with or without planes of symmetry or other particular characteristics.

It might be pertinent here to raise the question of whether or not every figure of equilibrium having the same weight force potential on each component surface has at least one plane of symmetry containing the axis of rotation. Every known figure of equilibrium with the same weight force potential on each component surface does have such a plane of symmetry. E. Hölder [*12*], has exhibited a configuration with three components having no such plane of symmetry, but having a different surface weight force potential on each component.

References

[*1*] LICHTENSTEIN, L.: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin 1933. — [*2*] LICHTENSTEIN, L.: Über eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion. Math. Z. **11**, 319—320 (1921). — [*3*] NIKLIBORC, W.: Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. Math. Z. **34**, 74—90 (1931). — [*4*] NIKLIBORC, W.: Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. II. Math. Z. **36**, 655—676 (1933). — [*5*] NIKLIBORC, W.: Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. III. Studia Math. **5**, 111—126 (1934). — [*6*] NIKLIBORC, W.: Ein Satz über die Winkegeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. Math. Z. **31**, 366—377 (1929). — [*7*] SCHMIDT, E.: Bemerkungen zur Potentialtheorie, S. 365—383, besonders S. 368. Schwarz-Festschrift. Berlin 1914. — [*8*] FRIEDMAN, B.: Analyticity of equilibrium figures of rotation. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 183—198 (1938). — [*9*] POINCARÉ, H.: Figures d'equilibre d'une masse fluide, pp. 27—28. Paris 1902. — [*10*] CRUDELI, U.: Nuovo limite superiore delle velocita angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformenente, limitari da figura di equilibrio. Atti Lincei **19**, 666—668 (1910). — [*11*] NIKLIBORC, W.: Über die obere Schranke der Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten. Math. Z. **30**, 787—793 (1929). — [*12*] HÖLDER, E.: Mathematische Untersuchung zur Himmelsmechanik. Math. Z. **31**, 197—257 (1929), besonders S. 219—225.

Dept. of Math., University of California, Berkeley 4, Cal. (U.S.A.).

(Eingegangen am 8. August 1955.)

Jacobs, K.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 298—338 (1956)

Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen*)

Von

Konrad Jacobs

Einleitung

In der allgemeinen Ergodentheorie untersucht man Mittelwert- und Periodizitätseigenschaften von Halbgruppen stetiger linearer Transformationen in einem topologischen Vektorraum. Es sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein topologischer Vektorraum und $\mathfrak{G} = \{x, y, \ldots\}$ eine Halbgruppe von stetigen linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$. Den aus dem Vektor $h \in \mathfrak{H}$ durch Anwendung der linearen Transformation $x \in \mathfrak{G}$ entstehenden Vektor bezeichnen wir mit xh.

Die Mittelwertuntersuchungen haben den Beweis der folgenden Aussage zum Ziel:

Mittelwert-Aussage (Fixpunkt-Aussage). Zu jedem Vektor $h \in \mathfrak{H}$ gibt es in der konvexen abgeschlossenen Hülle $\mathfrak{K}(h)$ der „Bahn" $\{xh \mid x \in \mathfrak{G}\} = \mathfrak{G}h$ von h genau einen Fixpunkt, d. h. einen Vektor h_0, für welchen

$$xh_0 = h_0 \quad \text{für jedes} \quad x \in \mathfrak{G}$$

gilt. Man sagt dann: h besitzt den Fixpunkt h_0, bzw. h_0 wird *der* Fixpunkt von h genannt (vgl. Eberlein [*22*], S. 220).

Diese Aussage ist nicht allgemein richtig (vgl. das Beispiel 2 in Kapitel II, § 2). Um sie zu beweisen, muß man zusätzliche Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ machen. Beweise für die Mittelwert-Aussage (bzw. Teilaussagen, Varianten und Verschärfungen derselben) unter verschiedenen Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ finden sich z. B. bei v. Neumann [*46*], [*47*], Hopf [*25*], Riesz [*51*], [*52*], [*53*], Wiener [*57*], G. Birkhoff [*5*], [*6*], Alaoglu-Birkhoff [*1*], Lorch [*34*], Kakutani [*29*], [*30*], Yosida-Kakutani [*58*], Dunford [*18*], [*19*], Dunford-Miller [*20*], Day [*13*], [*15*], Maak [*36*], [*37*], [*39*], [*40*], Eberlein [*22*], Bourbaki [*10*], Dixmier [*59*], Jacobs [*27*], Riesz-Nagy [*54*]; vgl. auch den Bericht von Kakutani [*31*]. — Unter den sich so ergebenden Mittelwert-, Fixpunkt- bzw. Ergodensätzen ist der folgende von besonderer Bedeutung:

Mittelwertsatz (Fixpunktsatz). *Sei* $\mathfrak{H}$ *ein reflexiver Banachraum* (vgl. Definition I). *Sei* $\mathfrak{G}$ *eine beschränkte abelsche Halbgruppe, welche die*

*) Herrn Prof. Dr. W. Maak in München bin ich für viele Hinweise dankbar. Mein Dank gilt ferner der Deutschen Forschungsgemeinschaft, deren Unterstützung mir die Fertigstellung dieser Arbeit ermöglichte. Ich danke ebenso Herrn Prof. Dr. W. Süss, durch dessen Entgegenkommen mir die hervorragenden Arbeitsmöglichkeiten im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach zur Verfügung standen.

Identität e enthalten möge; es gebe also eine Zahl $\Gamma \geq 1$ derart, daß für jedes $h \in \mathfrak{H}$ und jedes $x \in \mathfrak{G}$

$$|xh| \leq \Gamma |h|$$

gilt, wobei $|h|$ die Norm von h im Banachraum $\mathfrak{H}$ bedeutet. Dann ist die Mittelwert-Aussage richtig.

Für Beweise bzw. Beweisideen vgl. u. a. RIESZ [*51*], DIXMIER [*59*], LORCH [*34*], BOURBAKI [*10*], EBERLEIN [*22*], DAY [*13*], [*15*], RIESZ-NAGY [*54*][1]). Bei EBERLEIN [*22*], DIXMIER [*59*] und DAY [*15*] finden sich weitgehende Verallgemeinerungen.

Dieser Fixpunktsatz läßt sich auch als Aufspaltungssatz formulieren: Unter den angegebenen Voraussetzungen bilden die unter $\mathfrak{G}$ invarianten Vektoren $f \in \mathfrak{H}$ einen invarianten Teilraum $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$, ebenso bilden die Vektoren $g \in \mathfrak{H}$, welche den Fixpunkt $0 \in \mathfrak{H}$ besitzen, einen invarianten Teilraum $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$. Es gilt:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{F} + \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N} = \{0\},$$

genauer: jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Zerlegung

$$h = f + g, \quad f \in \mathfrak{F}, \quad g \in \mathfrak{N}.$$

Die Komponenten f, g hängen linear, stetig und invariant von h ab.

Man kann nun als Ziel der Periodizitätsuntersuchungen der Ergodentheorie ebenfalls eine Aufspaltungsaussage aufstellen. Sie ergibt sich aus der folgenden Fragestellung. In den Theorie der fastperiodischen Funktionen auf abstrakten Gruppen spielt der Mittelwertsatz eine fundamentale Rolle; mit seiner Hilfe ist es möglich, die E. SCHMIDTsche Theorie der Integralgleichungen auf fastperiodische Funktionen auf beliebigen Gruppen zu übertragen und auf diese Weise einen Approximationssatz für diese Funktionen zu beweisen (vgl. v. NEUMANN [*47*], MAAK [*36*]. Die Mittelwerttheorie für fastperiodische Funktionen ist von besonderer Eleganz und Schönheit (vgl. MAAK [*36*], S. 31 ff.). Es entsteht nun die Frage: Liegt der Gültigkeit der Mittelwertsätze der Ergodentheorie ein fastperiodisches Verhalten der Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{G}$ zugrunde und lassen sich die bekannten Ergebnisse über fastperiodische Funktionen für die Ergodentheorie fruchtbar machen?

Vor kurzem konnte gezeigt werden, daß den bekannten Mittelwert-Eigenschaften beliebiger unitärer bzw. beschränkter Gruppen im Hilbertraum ein fastperiodisches Verhalten zugrunde liegt. Diese Aussage wurde als Aufspaltungssatz formuliert (MAAK [*40*], JACOBS [*28*]); ein ähnlicher Satz findet sich bei GODEMENT [*23*], S. 64; in der vorliegenden Arbeit soll die entsprechende Aussage — ebenfalls in Form eines Aufspaltungssatzes — für den dem obigen Fixpunktsatz zugrunde liegenden Fall beschränkter abelscher Halbgruppen in reflexiven Banachräumen bewiesen werden.

Zu diesem Zweck benötigt man passende Verallgemeinerungen der klassischen Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Gruppen (v. NEUMANN [*47*],

[1]) In Kapitel III, § 3, der vorliegenden Arbeit ist ebenfalls ein Beweis durchgeführt.

MAAK [36]). Zunächst braucht man eine Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen; diese Theorie ist von MAAK [38] entwickelt worden; der Approximationssatz für fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen läßt sich nach MAAK auf den entsprechenden Satz für Gruppen zurückführen, indem man ein geeignetes homomorphes Bild der Halbgruppe in eine Gruppe einbettet. — Ferner muß man die Theorie auf Funktionen mit Werten in einem Banachraum verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung ist durch WEYL [56], MAAK [37] und KAWADA [32] gegeben worden; danach läßt sich der Approximationssatz für vektorwertige Funktionen auf den entsprechenden Satz für numerische Funktionen zurückführen, indem man Faltungen vektorwertiger Funktionen mit numerischen Funktionen bildet. Vergleiche den Beweis von Satz IV.1.1.

Wir können nun definieren, was unter einem bezüglich $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektor $p \in \mathfrak{G}$ verstanden werden soll (Definition II.1). Man zeigt leicht: Die Gesamtheit $\mathfrak{P}$ aller fastperiodischen Vektoren $p \in \mathfrak{H}$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$. Dabei ist $\mathfrak{P}$ im allgemeinen ein echter Teilraum von $\mathfrak{H}$ (Kap. II, § 1, Beispiel 1), d. h. die Vektoren von $\mathfrak{H}$ sind nicht immer alle fastperiodisch. Wir suchen nun einen zweiten invarianten Teilraum $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ derart, daß $\mathfrak{H}$ direkt in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ zerfällt. Zu diesem Zweck benützen wir die schwache Topologie in $\mathfrak{H}$ (Kap. I) und definieren: Ein Vektor $f \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn die schwach-abgeschlossene Hülle $\mathfrak{G}(f)$ der Bahn $\mathfrak{G}f$ den Vektor $O \in \mathfrak{H}$ enthält, d. h. wenn es in jeder schwachen Umgebung von $O \in \mathfrak{H}$ einen Vektor der Gestalt $xf\,(x \in \mathfrak{G})$ gibt (Definition II. 2; vgl. JACOBS [28]). Die Gesamtheit aller Fluchtvektoren heiße $\mathfrak{F}$.

Als Ziel der Periodizitätsuntersuchungen formulieren wir nun die

Aufspaltungsaussage. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P} + \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}.$$

Genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Darstellung

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten p, f von h hängen linear, stetig und invariant von h ab.

Diese Aussage ist nicht allgemein richtig (vgl. Kap. II, § 2, Beispiel 2). In dieser Abhandlung beweisen wir den folgenden

Aufspaltungssatz I. *Sei $\mathfrak{H}$ ein reflexiver Banachraum und sei $\mathfrak{G}$ eine beschränkte abelsche Halbgruppe in $\mathfrak{H}$. Dann ist die Aufspaltungsaussage richtig* (Satz II.2.2; vgl. den obigen Fixpunktsatz).

Der Beweis dieses Satzes wird in mehreren Schritten geführt. Zunächst wird — für eine beliebige beschränkte Halbgruppe $\mathfrak{G}$ in einem beliebigen Banachraum $\mathfrak{H}$ — der Teilraum $\mathfrak{P}$ der unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren genauer untersucht. Man kann für die Fastperiodizität eines Vektors $h \in \mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{G}$ ein Kriterium angeben, welches sich zur Definition II.1 ähnlich verhält wie die v. NEUMANNsche Formulierung des Begriffs „fastperiodische

Funktion auf einer Gruppe" (v. NEUMANN [47]; MAAK [36], S. 152 f.) zu der von MAAK gegebenen Definition (MAAK [36], S. 26): Satz II.1.4.

Mit Hilfe dieses Kriteriums kann man sich völlige Aufklärung über das Verhältnis zwischen den Begriffen „fastperiodisch" bezüglich *Halbgruppen* einerseits und bezüglich *Gruppen* andererseits verschaffen (Satz II.1.6). Man kann beweisen, daß $\mathfrak{P}$ in *endlichdimensionale* irreduzible, invariante Teilräume zerfällt (ist $\mathfrak{G}$ *abelsch*, so sind diese Teilräume *eindimensional* (MAAK [36], S. 17 f)). Es ergibt sich zugleich ein neuer Zugang zu der von MAAK entwickelten Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen (Anhang II). Das dabei verwendete Prinzip der *topologischen Einbettung einer Halbgruppe in eine Gruppe* legen wir nun dem Beweis des Aufspaltungssatzes I zugrunde.

Wir setzen von nun an den Banachraum $\mathfrak{H}$ als reflexiv und die beschränkte Halbgruppe $\mathfrak{G}$ als abelsch voraus.

Wir bilden die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ (Definition III.1). $\overline{\mathfrak{G}}$ ist wieder eine beschränkte abelsche Halbgruppe, mit derselben Schranke wie $\mathfrak{G}$ (Satz III.1.1). Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, wenn er unter $\overline{\mathfrak{G}}$ fastperiodisch ist; ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn er ein Fluchtvektor unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist $\overline{\mathfrak{G}}h$ eine schwach-kompakte $\overline{\mathfrak{G}}$-invariante Menge; sie ist nämlich gleich der schwachen Hülle $\mathfrak{G}(h)$ der Bahn $\mathfrak{G}h$. Für jeden Vektor $g \in \overline{\mathfrak{G}}h$ gilt $\overline{\mathfrak{G}}g \subseteq \overline{\mathfrak{G}}h$. Ist der Vektor $h \in \mathfrak{H}$ so beschaffen, daß $\overline{\mathfrak{G}}g = \overline{\mathfrak{G}}h$ für jedes $g \in \overline{\mathfrak{G}}h$ gilt, so heiße h ein unter $\mathfrak{G}$ reversibler Vektor (Definition III.2); die Gesamtheit aller reversiblen Vektoren $r \in \mathfrak{H}$ heiße $\mathfrak{R}$. Mittels des ZORNschen Lemmas (BOURBAKI [8,] S. 37) zeigt man: Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ enthält $\overline{\mathfrak{G}}h$ mindestens einen reversiblen Vektor (vgl. den Beweis des Satzes II.3.1; aus dieser Aussage läßt sich übrigens leicht ein Beweis des oben formulierten Fixpunktsatzes gewinnen; man kann nämlich zeigen: Ist die Halbgruppe $\mathfrak{G}$ konvex, so ist jeder unter $\mathfrak{G}$ reversible Vektor ein Fixpunkt bezüglich $\mathfrak{G}$; vgl. Kap. II, § 3). Dies ist bereits nahezu die Existenzaussage aus dem

Aufspaltungssatz II. *$\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R} + \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}.$$

Genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt mindestens eine Darstellung

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten r, f von h hängen linear, stetig und invariant von h ab (Satz III.2.2).

Die Eindeutigkeitsaussage dieses Satzes kann man nach einem Verfahren, welches ich an anderer Stelle angegeben habe, beweisen (Kap. III, § 4; vgl. JACOBS [28]). Man benützt hierbei die duale Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ im dualen Raum $\mathfrak{G}'$ (Kap. III, § 4) symmetrisch zu $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$.

Der Definition des Begriffs „reversibel" liegt der Gedanke zugrunde, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ sich bezüglich reversibler Vektoren wie eine Gruppe verhält (vgl. die Anmerkung nach der Definition III.2). In der Tat gilt: Die von $\overline{\mathfrak{G}}$ im invarianten Teilraum $\mathfrak{R}$ induzierte Halbgruppe ist eine **Gruppe** (Satz III.5.1).

Wir haben nun noch zu zeigen, daß $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ gilt. Dann wird der Aufspaltungssatz I bewiesen sein. Für gleichmäßig-konvexe Räume und duale Räume von solchen kann man hierzu ein Verfahren anwenden, welches ich an anderer Stelle angegeben habe (JACOBS [*28*]; Satz III.5.2). Es gibt jedoch auch reflexive Banachräume, die sich nicht gleichmäßig-konvex normieren lassen (DAY [*12*]). Aus diesem Grunde wird im Kap. IV eine Methode entwickelt, mit welcher man die Aussage $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ allgemein für reflexive Banachräume beweisen kann.

Man sieht zunächst, daß $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}$ gilt (Satz II.2.1). Auf Grund dieser Tatsache können wir nach dem vorhin erwähnten Ergebnis stets annehmen, daß $\mathfrak{G}$ eine Gruppe sei. Wir beweisen nun allgemein den Aufspaltungssatz I für Gruppen (Kap. IV, § 2); dabei werden Teile der von EBERLEIN gegebenen Theorie der schwach-fastperiodischen Funktionen auf abelschen Gruppen als wesentliches Beweismittel herangezogen (Satz IV.1.2, Satz IV.2.2). Wendet man den so gewonnenen Aufspaltungssatz auf den Raum $\mathfrak{R}$, der keine Fluchtvektoren mehr enthält, an, so folgt $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$. Damit ist der Aufspaltungssatz I vollständig bewiesen.

Im Anhang I wird gezeigt, daß sich der Aufspaltungssatz I auch allgemeiner für gleichmäßig-stetige abelsche Halbgruppen in reflexiven lokalkonvexen topologischen Vektorräumen beweisen läßt.

Im Anhang II wird eine neue Ausführung der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen skizziert.

Im Anhang III betrachten wir den Spezialfall kontrahierender abelscher Halbgruppen $\mathfrak{G}$ in einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Für zyklische Halbgruppen wird der Aufspaltungssatz mittels eines Satzes von SZ.-NAGY ([*42*], [*43*]) auf den entsprechenden Aufspaltungssatz für zyklische *unitäre Gruppen* (MAAK [*40*], JACOBS [*28*]) zurückgeführt; es werden einige Verschärfungen bewiesen. Anschließend wird gezeigt, daß dieselben Verschärfungen sich allgemein für abelsche Halbgruppen (und ohne Verwendung des „Unitarisierungssatzes" von SZ.-NAGY) gewinnen lassen; zugleich ergibt sich eine Unitaritätsaussage für $\mathfrak{G}$.

Verallgemeinerungen auf nicht-beschränkte Halbgruppen (vgl. DUNFORD-MILLER [*20*], DUNFORD [*19*]) und auf auflösbare Halbgruppen (DAY [*15*]) werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Auf Anwendungen der gewonnenen Ergebnisse in der Theorie der verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen (vgl. den Literaturbericht von MAAK [*36*], S. 222ff.), der MARKOFFschen Prozesse (vgl. z. B. YOSIDA-KAKUTANI [*58*], DOOB [*17*]) und der Spektraltheorie (vgl. z. B. DUNFORD [*19*], LORCH [*35*]) soll an anderer Stelle eingegangen werden.

Anmerkung. Als *Teilräume* eines Banachraumes $\mathfrak{H}$ werden in dieser Abhandlung nur *abgeschlossene* lineare Teilmannigfaltigkeiten von $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Anmerkung. Um eine allzu komplizierte Ausdrucksweise zu vermeiden, soll in dieser Abhandlung der Unterschied zwischen einer abstrakten Halbgruppe und einer Darstellung derselben nicht ausdrücklich hervorgehoben werden. Dieser Unterschied wird im wesentlichen nur dann von Bedeutung,

wenn man von einer Darstellung zur andern übergeht, wie dies strenggenommen z. B. bei der Einführung der Annahme $\mathfrak{C}$ (Kap. III, § 5, insbesondere im Beweis des Satzes III.5.2) der Fall ist. Auf die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit hat dies keinen Einfluß.

Kap. I. Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

Es sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein komplexer Banachraum. Die für die Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ erklärte Norm bezeichnen wir mit $|h|$.

Es sei $\mathfrak{H}' = \{h', g', f', \ldots\}$ der zu $\mathfrak{H}$ *duale* Banachraum. $\mathfrak{H}'$ besteht aus den sämtlichen stetigen Linearformen h' auf $\mathfrak{H}$. Der Wert der Linearform $h' \in \mathfrak{H}'$ an der Stelle $h \in \mathfrak{H}$ werde mit (h, h') bezeichnet. In $\mathfrak{H}'$ ist die Norm, wie üblich, durch die Festsetzung

$$|h'| = \sup_{|h| \leq 1} |(h, h')| \tag{1}$$

gegeben. Nach dem *Satz von Hahn-Banach* (BANACH [4], S. 27 f., S. 55; BOURBAKI [10], S. 101) gilt dann auch umgekehrt stets

$$|h| = \sup_{|h'| \leq 1} |(h, h')|. \tag{2}$$

Der Raum $\mathfrak{H}'$ induziert im Raum $\mathfrak{H}$ die sog. *schwache Topologie*. Für diese Topologie ist eine Umgebungsbasis an der Stelle $0 \in \mathfrak{H}$ durch die Mengen der Gestalt

$$\mathfrak{U} = \{h \,|\, |(h, h'_\nu)| < \varepsilon, \quad \nu = 1, \ldots, n\}$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebigen Vektoren $h'_1, \ldots, h'_n \in \mathfrak{H}'$ gegeben; diese Mengen heißen auch schwache Umgebungen von $0 \in \mathfrak{H}$. Die schwachen Umgebungen eines beliebigen Punktes $h \in \mathfrak{H}$ erhält man aus den schwachen Umgebungen des Punktes $0 \in \mathfrak{H}$ durch Translation um h. Ist eine Folge $h_\nu \in \mathfrak{H}$ schwach-konvergent mit dem Limes $h \in \mathfrak{H}$, so schreiben wir kurz

$$h_\nu \to h \quad \text{(schwach)}$$

oder

$$\lim_{\nu \to \infty} h_\nu = h \quad \text{(schwach)}.$$

Im Gegensatz zur schwachen Topologie wird die Normtopologie in $\mathfrak{H}$ auch die *starke* Topologie genannt. Ist eine Folge $g_i \in \mathfrak{H}$ stark-konvergent mit dem Limes $g \in \mathfrak{H}$, so schreiben wir kurz

$$g_i \to g \quad \text{(stark)}$$

oder

$$\lim_{i \to \infty} g_i = g \quad \text{(stark)}.$$

Allgemein sind bezüglich beider Topologien die Begriffe „konvergentes Filter" und „Cauchy-Filter" (BOURBAKI [9], S. 10) erklärt.

Die schwache Topologie hat mit der starken Topologie einige einfache Eigenschaften gemeinsam. So ist der Limes eines schwach-konvergenten

Filters F in $\mathfrak{H}$ stets eindeutig durch F bestimmt, hängt linear von F ab und seine Norm beistzt, falls F beschränkt ist, dieselbe Schranke wie F.

Ist $\mathfrak{H}$ von endlicher Dimension, so ist die schwache Topologie zur starken Topologie äquivalent. Ist $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension, so ist dies niemals der Fall. Man kann z. B. beweisen, daß jedes beschränkte Filter in $\mathfrak{H}$ sich zu einem Cauchy-Filter bezüglich der schwachen Topologie verfeinern (BOURBAKI [9], S. 8) läßt (die Verfeinerung muß nicht notwendig schwach-konvergent sein); dagegen gibt es in jedem unendlich-dimensionalen Banachraum beschränkte Filter, die sich nicht zu einem Cauchy-Filter bezüglich der starken Topologie verfeinern lassen (vgl. RIESZ [50], S. 78; BANACH [4], S. 84).

Die Gleichung (2) stellt eine Beziehung zwischen der schwachen und der starken Topologie in $\mathfrak{H}$ dar. Eine schärfere Beziehung liefert der

Satz I.1 (MAZUR). *Jede konvexe stark-abgeschlossene Menge in $\mathfrak{H}$ ist auch schwach-abgeschlossen* (BOURBAKI [10], S. 73; NIKAIDÔ [48]).

Man kann zum dualen Banachraum $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ nochmals den dualen Banachraum $\mathfrak{H}''$ bilden und einsehen, daß $\mathfrak{H}$ auf natürliche Weise isometrisch in $\mathfrak{H}''$ eingebettet ist: $\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{H}''$. Hierbei gilt im allgemeinen nicht das Gleichheitszeichen (vgl. RIESZ-NAGY [54], S. 211).

Definition I. *Der Banachraum $\mathfrak{H}$ heißt reflexiv, wenn $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}''$ gilt, d. h. wenn es zu jeder stetigen Linearform L auf $\mathfrak{H}'$ einen Vektor $h \in \mathfrak{H}$ gibt, derart, daß*

$$L(g') = (h, g') \quad \text{für jedes} \quad g' \in \mathfrak{H}'$$

gilt.

Ein Kriterium für die Reflexivität von Banachräumen liefert der

Satz I.2 (BANACH-ARENS). *Der Banachraum $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann reflexiv, wenn jedes beschränkte Filter F in $\mathfrak{H}$ eine schwach-konvergente Verfeinerung besitzt* (BANACH [4], S. 189; ARENS [3]; vgl. auch den sehr eleganten Beweis von NIKAIDÔ [48]).

Anmerkung. Da man jedes beschränkte Filter in $\mathfrak{H}$ zu einem Cauchy-Filter bezüglich der schwachen Topologie verfeinern kann, ist die Reflexivität von $\mathfrak{H}$ äquivalent zur Schwach-Vollständigkeit von $\mathfrak{H}$ (falls man nur beschränkte Filter in Betracht zieht).

Beispiele reflexiver Banachräume sind die *gleichmäßig-konvex* (CLARKSON [11]) normierbaren Räume (PETTIS [49]; NIKAIDÔ [48]); ebenso die „gleichmäßig-flach" normierbaren Räume (DAY [14]; NAKANO [44]). Insbesondere ist jeder Hilbertraum ein reflexiver Banachraum (man kann sogar schon $\mathfrak{H}'$ mit $\mathfrak{H}$ identifizieren). Es gibt aber auch reflexive Banachräume, die sich nicht gleichmäßig-konvex normieren lassen (DAY [12]).

Man beweist ohne Schwierigkeit den

Satz I.3. *Jeder Teilraum eines reflexiven Banachraumes ist ein reflexiver Banachraum. Ein Banachraum $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann reflexiv, wenn auch der duale Raum $\mathfrak{H}'$ reflexiv ist.*

Mit Hilfe des Satzes I.2 ergibt sich sofort der

Satz I.4. *Jedes absteigende System nichtleerer, beschränkter, schwach-abgeschlossener Mengen in einem reflexiven Banachraum $\mathfrak{H}$ besitzt einen nichtleeren Durchschnitt.*

Man kann in reflexiven Räumen das Arbeiten mit *Filtern* weitgehend durch das Arbeiten mit *gewöhnlichen Folgen* ersetzen und dadurch schärfere Ergebnisse erhalten. Dies wird ermöglicht durch den

Satz I.5 (Abzählbarkeitssatz). *Ist F ein beschränktes Filter in dem reflexiven Banachraum $\mathfrak{H}$, welches schwach gegen den Limes $f \in \mathfrak{H}$ konvergiert, und ist $\mathfrak{F} \in F$ beliebig gewählt, dann gibt es in $\mathfrak{F}$ eine Folge $f_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, derart, daß*

$$f_\nu \to f \quad \text{(schwach)}$$

d. h.

$$(f_\nu, h') \to (f, h') \quad \text{für jedes} \quad h' \in \mathfrak{H}'$$

gilt.

Beweis. Sei etwa $|f| \leq A$ für jedes $f \in \mathfrak{F}$. Wir setzen $\mathfrak{K} = \{h \mid |h| \leq A\}$. Dabei sei $A > 0$.

1. Sei $f_1 \in \mathfrak{F}$ beliebig gewählt und $\mathfrak{H}_1$ der von f und f_1 aufgespannte, höchstens 2-dimensionale Teilraum von $\mathfrak{H}$. Sei $g_{11}, \ldots, g_{1n_1}$ ein System von endlichvielen Punkten in $\mathfrak{H}_1$, deren 1-Umgebungen zusammen die (stark-kompakte!) Menge $1 \cdot \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}_1$ überdecken. Seien $h'_{11}, \ldots, h'_{1n_1} \in \mathfrak{H}'$ derart gewählt, daß

$$|h'_{1\nu}| = 1, \quad |(g_{1\nu}, h'_{1\nu})| \geq \tfrac{1}{2} |g_{1\nu}| \qquad (\nu = 1, \ldots, n_1)$$

gilt. Das ist nach (2) möglich.

2. Wir bestimmen $f_2 \in \mathfrak{F}$ derart, daß

$$|(f_2 - f, h'_{1\nu})| < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n_1)$$

gilt. Sei $\mathfrak{H}_2$ der von f, f_1 und f_2 aufgespannte, höchstens 3-dimensionale Teilraum von $\mathfrak{H}$. Sei $g_{21}, \ldots, g_{2n_2}$ ein System von endlichvielen Punkten in $\mathfrak{H}_2$, deren $\frac{1}{2}$-Umgebungen zusammen die (stark-kompakte!) Menge $2 \cdot \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}_2$ überdecken. Seien $h'_{21}, \ldots, h'_{2n_2} \in \mathfrak{H}'$ derart gewählt, daß

$$|h'_{2\nu}| = 1, \quad |(g_{2\nu}, h'_{2\nu})| \geq \tfrac{1}{2} |g_{2\nu}| \qquad (\nu = 1, \ldots, n_2)$$

gilt.

3. Wir bestimmen $f_3 \in \mathfrak{F}$ derart, daß

$$|(f_3 - f, h'_{2\nu})| < \tfrac{1}{3} \qquad (\nu = 1, \ldots, n_2)$$

gilt. Sei $\mathfrak{H}_3$ der von $f, f_1, \ldots, f_3$ aufgespannte, höchstens 4-dimensionale Teilraum von $\mathfrak{H}$. Sei $g_{31}, \ldots, g_{3n_3}$ ein System von endlichvielen Punkten in $\mathfrak{H}_3$, deren $\frac{1}{3}$-Umgebungen zusammen die (stark-kompakte!) Menge $3 \cdot \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}_3$ überdecken. Seien $h'_{31}, \ldots, h'_{3n_3} \in \mathfrak{H}'$ derart gewählt, daß

$$|h'_{3\nu}| = 1, \quad |(g_{3\nu}, h'_{3\nu})| \geq \tfrac{1}{2} |g_{3\nu}| \qquad (\nu = 1, \ldots, n_3)$$

gilt.

Wir zeigen nun, daß

$$f_\nu \to f \quad \text{(schwach)} \tag{3}$$

gilt. Sei $g_1, g_2, \ldots$ eine Durchzählung der Vektoren $g_{k\nu}$ ($k = 1, 2, \ldots$; $\nu = 1, \ldots, n_k$) und $h_1', h_2', \ldots$ die entsprechende Durchzählung der $h_{k\nu}'$. Sei $\mathfrak{H}_0$ der von $f, f_1, f_2, \ldots$ aufgespannte Teilraum von $\mathfrak{H}$. Die Folge $g_1, g_2, \ldots$ liegt stark-dicht in $\mathfrak{H}_0$. Sämtliche f_ν liegen in $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{H}_0$, ebenso f.

Sei F_0 das der Folge $f_1, f_2, \ldots$ entsprechende Frechet-Filter (BOURBAKI [9], S. 8). Zum Beweise von (3) genügt es, zu zeigen, daß jede schwach-konvergente Verfeinerung von F_0 gegen f konvergiert. Sei also $\overline{F}_0$ eine schwach-konvergente Verfeinerung von F_0 und f_0 ihr Limes. Aus Satz I.1 folgt $f_0 \in \mathfrak{H}_0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann kann man g_n derart bestimmen, daß

$$|(f_0 - f) - g_n| < \frac{\varepsilon}{6}$$

gilt. Nunmehr hat man

$$\begin{aligned} |(f_0 - f, h_n')| &\geq |(g_n, h_n')| - \frac{\varepsilon}{6}|h_n'| \\ &\geq \frac{1}{2}|g_n| - \frac{\varepsilon}{6} \\ &\geq \frac{1}{2}|f_0 - f| - \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Wir können $N > 0$ derart bestimmen, daß für $\nu > N$ stets

$$|(f_\nu - f, h_n')| < \frac{\varepsilon}{8}$$

gilt. Unter Zuhilfenahme von $\overline{F}_0$ kann man $\nu > N$ so wählen, daß außerdem

$$|(f_\nu - f_0, h_n')| < \frac{\varepsilon}{8}$$

gilt. Insgesamt haben wir dann

$$|f_0 - f| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich $f_0 = f$. q. e. d.

Anmerkung. Vgl. den ähnlichen Satz von EBERLEIN ([21]; DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [16], S. 88). Wie ein Beispiel von v. NEUMANN zeigt ([45], S. 380), ist die Beschränktheitsannahme für die Gültigkeit des Abzählbarkeitssatzes unentbehrlich.

Aus dem Abzählbarkeitssatz lassen sich einige einfache Folgerungen ziehen.

Satz I.6. *Sei $\mathfrak{H}$ ein reflexiver Banachraum. Die schwach-abgeschlossene Hülle einer beschränkten Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ besteht aus allen Punkten $h \in \mathfrak{H}$, die als Limites schwach-konvergenter Folgen $h_\nu \in \mathfrak{M}$ auftreten können.*

Satz I.7. *Jede beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum besitzt eine schwach-konvergente Teilfolge.*

Kap. II. Fastperiodische Vektoren und Fluchtvektoren

Sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein beliebiger komplexer Banachraum. Es sei $\mathfrak{G} = \{x, y, a, b, \ldots\}$ eine beschränkte Halbgruppe von linearen Transformationen $x, y, \ldots$ in $\mathfrak{H}$; es gibt also eine Zahl $\Gamma > 0$ derart, daß stets

$$|xh| \leq \Gamma |h| \qquad (x \in \mathfrak{G},\ h \in \mathfrak{H})$$

gilt. $\mathfrak{G}$ enthalte die identische Transformation e. Es ist also stets $\Gamma \geq 1$. Für jeden Vektor $h \in \mathfrak{H}$ bezeichnen wir die Menge $\{xh \mid x \in \mathfrak{G}\} = \mathfrak{G}h$ auch als die „Bahn" von h unter $\mathfrak{G}$.

Wir wollen die Fastperiodizitätseigenschaften der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ untersuchen.

§1. Fastperiodische Vektoren

Der Begriff „fastperiodisch" ist von MAAK für komplexwertige Funktionen auf beliebigen abstrakten Halbgruppen mit Einselement erklärt worden (MAAK [38]). Wir betrachten nun auf unserer Halbgruppe $\mathfrak{G}$ Funktionen mit Werten aus $\mathfrak{H}$, und zwar Funktionen der Form

$$h(x) = xh$$

mit beliebigem, festem $h \in \mathfrak{H}$. In sinngemäßer Übertragung der Definition von MAAK geben wir nun die

Definition II.1. *Seien $h \in \mathfrak{H}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Ein endliches System $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von Teilmengen von $\mathfrak{G}$ heißt eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$, wenn folgendes gilt:*

1. $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{G}$.

2. Gibt es zu zwei Elementen $x, y \in \mathfrak{G}$ zwei weitere Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$, derart, daß für geeignetes ν

$$axb \in \mathfrak{A}_\nu, \qquad ayb \in \mathfrak{A}_\nu$$

gilt, so gilt

$$|cxdh - cydh| < \varepsilon$$

für alle $c, d \in \mathfrak{G}$.

Ein Vektor $p \in \mathfrak{H}$, der zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{p; \varepsilon\}$ besitzt, heißt fastperiodisch unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$. Die Menge aller unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $p \in \mathfrak{H}$ heiße $\mathfrak{P}$.

Beispielsweise ist jeder unter $\mathfrak{G}$ *fixe* Vektor $p \in \mathfrak{H}$ (d. h. jeder Vektor, welcher $xp = p$ für alle $x \in \mathfrak{G}$ erfüllt) fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$; insbesondere ist der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ stets fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$.

Für fastperiodische Vektoren läßt sich eine Mittelwerttheorie von außerordentlicher Schärfe und Eleganz mittels des sog. *Verheiratungssatzes* (vgl. WEYL [56], S. 202; MAAK [36], S. 234) durchführen (vgl. MAAK [36], S. 31 ff.); doch soll an dieser Stelle hierauf nicht eingegangen werden.

Man beweist leicht den

Satz II.1.1. *Die Menge $\mathfrak{P}$ aller unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren ist ein linearer invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$* (vgl. MAAK [38], S. 37).

Nahezu trivial ist ferner der

Satz II.1.2. *Für jeden Vektor $p \in \mathfrak{P}$ ist die Bahn $\mathfrak{G}p$ totalbeschränkt, d.h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ endlichviele Vektoren $h_1, \ldots, h_m \in \mathfrak{H}$, derart, daß für jedes $x \in \mathfrak{G}$ ein μ mit*

$$|xp - h_\mu| < \varepsilon$$

existiert (vgl. ALEXANDROFF-HOPF [2], S. 104).

Dagegen ist ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ mit totalbeschränkter Bahn $\mathfrak{G}h$ nicht notwendig fastperiodisch. Dies ergibt sich aus folgendem

Beispiel 1. Sei $\mathfrak{H}$ beliebig. $\mathfrak{G}$ bestehe aus den Transformationen e und 0. Dann ist für jedes $h \in \mathfrak{H}$ die Bahn $\mathfrak{G}h$ die endliche, also gewiß totalbeschränkte, Menge $\{h, 0\}$. Sei $h \neq 0$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|h|$. Dann kommt als Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ nur das System der beiden Mengen $\mathfrak{A}_e = \{e\}$ und $\mathfrak{A}_0 = \{0\}$ in Frage. Sei $x = e$, $y = 0$, $a = b = 0$; dann gilt

$$axb \in \mathfrak{A}_0, \quad ayb \in \mathfrak{A}_0.$$

Dagegen ist für $c = d = e$

$$|cxdh - cydh| = |h| > \varepsilon.$$

Die Definition II.1 ist also nicht erfüllt, h ist nicht fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$.

Man kann leicht den folgenden Satz beweisen:

Satz II.1.3. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, so ist ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ dann und nur dann fastperiodisch, wenn die Bahn $\mathfrak{G}h$ totalbeschränkt ist* (vgl. MAAK [36], S. 152 f.; MAAK [37], S. 163).

Ist $\mathfrak{G}$ aber keine Gruppe, so muß ein Vektor $h \in \mathfrak{G}$ mit totalbeschränkter Bahn $\mathfrak{G}h$, um fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$ zu sein, noch weitere Bedingungen erfüllen und man kann vermuten, daß diese Bedingungen etwa besagen, daß sich $\mathfrak{G}$ bezüglich h annähernd wie eine Gruppe verhält; charakteristische Gruppeneigenschaft ist die Möglichkeit der Division. In der Tat gilt der

Satz II.1.4. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, wenn folgendes gilt:*

1. $\mathfrak{G}h$ ist eine totalbeschränkte Menge in $\mathfrak{H}$.

2. Sind die Elemente $x, y \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Elemente $s, t \in \mathfrak{G}$, derart, daß

$$|xth - yh| < \varepsilon \tag{1}$$

und — identisch in $z \in \mathfrak{G}$ —

$$|sxzh - yzh| < \varepsilon \tag{2}$$

gilt.

Beweis. I. Sei $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$. Es ist nur noch Nr. 2 zu beweisen.

Wir beweisen zunächst (1). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Es gibt Teilungen $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$. Wir erweitern nun unseren Teilungsbegriff etwas. Seien $a_0, b_0 \in \mathfrak{G}$, $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Unter einer Teilung $\mathfrak{T}\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ verstehen wir ein System $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von Teilmengen von $\mathfrak{G}$, für welches die folgenden Aussagen gelten:

1. $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{G}$.

2. Aus $c, d \in \mathfrak{G}$, $x, y \in \mathfrak{A}_\nu$ folgt

$$|c a_0 x b_0 d h - c a_0 y b_0 d h| < \varepsilon.$$

3. Aus $c, d \in \mathfrak{G}$, $cxd, cyd \in \mathfrak{A}_\nu$ folgt

$$|xh - yh| < \varepsilon.$$

Unsere ursprünglichen Teilungen $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ sind Teilungen $\mathfrak{T}\{h; e, e; \varepsilon\}$. Eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ besteht aus einer gewissen Anzahl von Teilmengen von $\mathfrak{G}$. Unter den bei unserem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ — aber beliebig wählbaren a_0, b_0 — möglichen Anzahlen gibt es eine kleinste $n(\varepsilon)$. Eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ mit $n(\varepsilon)$ Bestandteilen heiße eine *Minimalteilung*. Sei $\mathfrak{T}_0\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ eine Minimalteilung. Ein von MAAK bewiesener Satz ([38], S. 40; der Beweis läßt sich ohne weiteres auf unseren Fall übertragen) lautet: *Eine Minimalteilung $\mathfrak{T}_0\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ erstreckt sich stets quer durch die ganze Halbgruppe, d. h. für jedes $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$ und beliebige $c, d \in \mathfrak{G}$ ist die Menge $c\mathfrak{G}d \cap \mathfrak{A}$ nichtleer.* Wir wählen nun $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ so, daß das Element $y \in \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$ liegt, und setzen $c = x$, $d = e$. Dann gibt es ein $t \in \mathfrak{G}$ mit $xt \in \mathfrak{A}$. Nach der Definition II.1 ist dann

$$|xth - yh| < \varepsilon.$$

Nun beweisen wir (2). Der Beweis ist ähnlich, aber etwas komplizierter.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir bestimmen Elemente $z_1, \ldots, z_m \in \mathfrak{G}$ derart, daß für jedes $z \in \mathfrak{G}$ ein μ mit

$$|zh - z_\mu h| < \frac{\varepsilon}{4\Gamma}$$

existiert. Nun betrachten wir die abstrakte direkte Summe $\hat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}$ von m Exemplaren des Banachraumes $\mathfrak{H}$. $\hat{\mathfrak{H}}$ besteht also aus den sämtlichen formalen Ausdrücken $[h_1, \ldots, h_m]$, mit $h_\mu \in \mathfrak{H}$, wobei das lineare Rechnen komponentenweise vorzunehmen ist. Wir führen in $\hat{\mathfrak{H}}$ die Norm $|[h_1, \ldots, h_m]| = \sum_{\mu=1}^{m} |h_\mu|$ ein. Dadurch wird $\hat{\mathfrak{H}}$ zu einem Banachraum gemacht. Setzt man für beliebiges $x \in \mathfrak{G}$

$$\hat{x}[h_1, \ldots, h_m] = [xh_1, \ldots, xh_m],$$

so erhält man in $\hat{\mathfrak{H}}$ eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Halbgruppe $\hat{\mathfrak{G}}$. Der Vektor $\hat{h} = [z_1 h, \ldots, z_m h]$ ist nun, wie man ohne weiteres sieht (vgl. Satz II.1.1), fastperiodisch unter $\hat{\mathfrak{G}}$. Betrachten wir nun eine Minimalteilung $\mathfrak{T}_0\left\{\hat{h}; \hat{a}_0, \hat{b}_0; \frac{\varepsilon}{2}\right\}$

in $\hat{\mathfrak{G}}$, so erhalten wir analog wie vorhin zu beliebigen $x, y \in \mathfrak{G}$ ein $s \in \mathfrak{G}$, derart, daß

$$|sxz_\mu h - yz_\mu h| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gilt. Dann gilt aber für beliebiges $z \in \mathfrak{G}$ und geeignetes μ

$$\begin{aligned} |sxzh - yzh| &\leq |sxzh - sxz_\mu h| + \frac{\varepsilon}{2} + |yz_\mu h - yzh| \\ &\leq 2\Gamma |zh - z_\mu h| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

II. Sei $h \in \mathfrak{H}$ derart, daß die Aussagen Nr. 1 und 2 unseres Satzes gelten. Wir führen den Beweis für die Fastperiodizität von h in mehreren Schritten.

1. Für beliebige $a, z, t \in \mathfrak{G}$ gilt

$$|zh - th| \leq \Gamma |azh - ath|. \tag{3}$$

Denn man kann ja nach Nr. 2 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $s \in \mathfrak{G}$ derart bestimmen, daß

$$|sazh - zh| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |sath - th| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} |zh - th| &< \varepsilon + |sazh - sath| \\ &\leq \varepsilon + \Gamma |azh - ath|, \end{aligned}$$

und dies ergibt die Behauptung (3).

2. Wir wählen auf Grund der Totalbeschränktheit von $\mathfrak{G}h$ die Elemente $t_\mu \in \mathfrak{G}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ derart, daß zu jedem $t \in \mathfrak{G}$ ein μ mit

$$|th - t_\mu h| < \frac{\varepsilon}{8\Gamma^3}$$

existiert. Die Bahnen $\mathfrak{G}t_\mu h (\mu = 1, \ldots, m)$ sind totalbeschränkt. Man kann daher endlichviele Mengen $\mathfrak{A}_\nu \in \mathfrak{G}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ mit $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{G}$ derart bestimmen, daß für $x, y \in \mathfrak{A}_\nu$

$$|xt_\mu h - yt_\mu h| < \frac{\varepsilon}{4\Gamma^2}$$

und somit

$$|xth - yth| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma^2} \quad \text{(für alle } t \in \mathfrak{G}\text{)} \tag{4}$$

gilt.

3. Nun zeigen wir, daß die Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ bilden. Seien also die Elemente $x, y, a, b \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$axb \in \mathfrak{A}_\nu, \quad ayb \in \mathfrak{A}_\nu$$

gilt. Seien die Elemente $c, d \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt. Wir bestimmen ein $t \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$|bth - dh| < \frac{\varepsilon}{4\Gamma^3} \tag{5}$$

gilt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} |cxdh - cydh| &\leq \Gamma |xdh - ydh| \\ &\leq \Gamma^2 |axdh - aydh| && \text{(nach (3))} \\ &< \Gamma^2 |axbth - aybth| + \frac{\varepsilon}{2} && \text{(nach (5))} \\ &< \varepsilon && \text{(nach (4))} \end{aligned}$$

q. e. d.

Anmerkung. Die erste Hälfte dieses Beweises läßt sich leicht zu einem Beweis der folgenden Aussage ausgestalten: *Sind $p_1, \ldots, p_r$ endlichviele unter $\mathfrak{G}$ fastperiodische Vektoren, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $x \in \mathfrak{G}$ ein $t \in \mathfrak{G}$ derart, daß*

$$|txp_\varrho - p_\varrho| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{6}$$

gilt. — Von dieser Aussage werden wir beim Beweis des Satzes II.1.6 Gebrauch machen.

Es gilt nun der

Satz II 1.5 **(Approximationssatz).** *Der Raum $\mathfrak{P}$ der unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren ist die lineare stark-abgeschlossene Hülle seiner endlichdimensionalen invarianten irreduziblen Teilräume.*

Zum Beweis dieses Satzes zeigen wir zunächst, daß man den Fall der *Halbgruppen* auf den der *Gruppen* zurückführen kann, indem man die von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$ induzierte Halbgruppe *innerhalb von* $\mathfrak{P}$ in eine geeignete Gruppe einbettet. Dieser Gedanke liegt auch der MAAKschen Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen zugrunde. Die Einbettung erfolgt bei MAAK auf *algebraischem* Wege. Hier soll ein *topologisches* Einbettungsverfahren angegeben werden. Es ergibt sich dabei zugleich ein neuer Zugang zur Theorie von MAAK (s. Anhang II).

Satz II.1.6 **(Einbettungssatz).** *Es sei $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$. Sei $\overline{\mathfrak{G}} = \{\bar{x}, \bar{y}, \ldots\}$ die Menge aller linearen Transformationen $\bar{x}$ in $\mathfrak{H}$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt zu endlichvielen Vektoren $h_1, \ldots, h_r \in \mathfrak{H}$ und zu beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$ ein $x \in \mathfrak{G}$ derart, daß*

$$|xh_\varrho - \bar{x}h_\varrho| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

gilt. Dann ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine die Halbgruppe $\mathfrak{G}$ enthaltende **Gruppe**. *$\overline{\mathfrak{G}}$ besitzt ebenfalls die Schranke Γ. Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist fastperiodisch unter der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$. Jeder unter $\mathfrak{G}$ invariante Teilraum von $\mathfrak{H}$ ist auch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant.*

Beweis. 1. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist die Menge $\mathfrak{G}h$ totalbeschränkt. Die Menge $\overline{\mathfrak{G}}h$ ist jedenfalls in der stark-abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{G}h$ enthalten, also

wiederum totalbeschränkt. Ferner ergibt sich, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ die Schranke Γ besitzt und daß jeder unter $\mathfrak{G}$ invariante Teilraum von $\mathfrak{H}$ auch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant ist. Natürlich ist $\overline{\mathfrak{G}} \supseteq \mathfrak{G}$.

2. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine Halbgruppe. Denn seien $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ und $h_1, \ldots, h_r \in \mathfrak{H}$, sowie ein $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir bestimmen $x, y \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$\left.\begin{aligned} |y h_\varrho - \bar{y} h_\varrho| &< \frac{\varepsilon}{2\Gamma} \\ |x\bar{y} h_\varrho - \bar{x}\bar{y} h_\varrho| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \quad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

gilt. Dann folgt

$$|x y h_\varrho - \bar{x}\bar{y} h_\varrho| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Hierbei ist $xy \in \mathfrak{G}$. Somit folgt $\bar{x}\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$.

3. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine **Gruppe**. Zum Beweis dieser Aussage benützen wir die Aussage Nr. 2 des Satzes II.1.4 in der im Anschluß an den Beweis dieses Satzes formulierten Verallgemeinerung (6).

Sei $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ beliebig gewählt. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebig gewählten Vektoren $h_1, \ldots, h_m \in \mathfrak{H}$ bestimmen wir zunächst ein $x \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$|x h_\mu - \bar{x} h_\mu| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gilt. Nun bestimmen wir gemäß (6) ein $t \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$|t x h_\mu - h_\mu| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gilt. Wir haben dann

$$|t\bar{x} h_\mu - h_\mu| < \varepsilon \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{7}$$

Bezeichnen wir die Menge aller $t \in \mathfrak{G}$, welche (7) erfüllen, mit $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_m; \varepsilon)$, so ist $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_m; \varepsilon)$ stets nichtleer. Der Durchschnitt zweier Mengen dieser Art enthält stets eine dritte Menge dieser Art. Die $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_m; \varepsilon)$ bilden also eine Filterbasis (BOURBAKI [9], S. 9) und erzeugen ein Filter F in $\mathfrak{G}$. Wir verfeinern F zu einem Ultrafilter $\overline{F}$ (BOURBAKI [9], S. 9). Es ist klar, was man für beliebiges $h \in \mathfrak{H}$ unter $\overline{F}h$ zu verstehen hat. $\overline{F}h$ ist als Ultrafilter in der totalbeschränkten Menge $\mathfrak{G}h$ stets stark-konvergent, und die Konvergenz findet offenbar gleichmäßig für endlichviele $h \in \mathfrak{H}$ statt. Durch die Festsetzung

$$\bar{t}h = \lim \overline{F}h$$

ist daher eine Transformation $\bar{t} \in \overline{\mathfrak{G}}$ erklärt. Offensichtlich ist nun

$$\bar{t}\,\bar{x} h = h \quad \text{für jedes} \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Somit besitzt $\bar{x}$ eine Inverse $\bar{x}^{-1} = \bar{t} \in \overline{\mathfrak{G}}$.

4. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist $\overline{\mathfrak{G}}h$ totalbeschränkt. Nach Satz II.1.3 ist also jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$. q. e. d.

Mit Hilfe bekannter Sätze von WEYL [56] bzw. MAAK [37] bzw. KAWADA [32] kann man nun den Approcimationssatz II.1.5 gewinnen. Für die Anwendung auf numerische fastperiodische Funktionen vgl. Anhang II.

Anmerkung. Aus der Definition II.1. entnimmt man: Ist der Vektor $h \in \mathfrak{H}$ unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodisch, so ist er auch unter jeder Unterhalbgruppe von $\mathfrak{G}$ fastperiodisch. Dies Ergebnis scheint im Hinblick auf die Sätze II.1.4 und II.1.6 (bzw. den später zu beweisenden Satz II.2.1) recht merkwürdig, wenn man den Fall betrachtet, daß $\mathfrak{G}$ eine *Gruppe ist.* Sei $\mathfrak{G}_0$ eine *Unter-Halbgruppe* der Gruppe $\mathfrak{G}$ und $p \in \mathfrak{H}$ ein unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischer Vektor. Die Fastperiodizität von p ist nach Satz II.1.3 *allein durch die Totalbeschränktheit der Bahn* $\mathfrak{G}p$ bereits gewährleistet. Es ist trivial, daß auch die Bahn $\mathfrak{G}_0 p$ totalbeschränkt ist. Aber es ist eigenartig, daß jede *Halbgruppe* $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}$ genügend Transformationen enthält, um sich bezüglich p *annähernd wie eine Gruppe* zu verhalten (Satz II.1.4, Satz II.1.6).

§2. Fluchtvektoren. Formulierung der Aufspaltungsaussage

Die Gesamtheit aller unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $p \in \mathfrak{H}$ bildet einen invarianten Teilraum $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}$. Wir wünschen den Raum $\mathfrak{P}$ aus dem Raum $\mathfrak{H}$ abzuspalten, d. h. wir suchen einen zweiten invarianten Teilraum $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$, derart, daß $\mathfrak{H}$ direkt in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ zerfällt. Zu diesem Zweck machen wir die

Definition II.2 *Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ bezeichne $\mathfrak{G}(h)$ (Klammer!) die schwach-abgeschlossene Hülle der Menge $\mathfrak{G}h$. Ein Vektor $f \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fluchtvektor unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$, wenn $0 \in \mathfrak{G}(f)$ ist, d. h. wenn in jeder schwachen Umgebung $\mathfrak{U}$ von $0 \in \mathfrak{H}$ ein Vektor xf ($x \in \mathfrak{G}$) liegt. Die Menge aller Fluchtvektoren $f \in \mathfrak{H}$ heiße $\mathfrak{F}$* (vgl. JACOBS [28]).

Der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ ist stets Fluchtvektor. Bei dem im vorigen Paragraphen angegebenen Beispiel 1 ist jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ein Fluchtvektor. Ein weiteres Beispiel findet sich bei JACOBS [28], S. 417. Im allgemeinen sind nicht alle Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ Fluchtvektoren. Es gilt der

Satz II.2.1. $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, *d. h. ein von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedener Fluchtvektor ist nie fastperiodisch.*

Beweis. Sei $h \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{F}$. Wegen der Totalbeschränktheit von $\mathfrak{G}h$ ist $0 \in \mathfrak{H}$ schon in der starken Hülle von $\mathfrak{G}h$ enthalten. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und $x \in \mathfrak{G}$ derart bestimmt, daß

$$|xh| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma} \tag{7}$$

gilt. Nach Satz II.1.4 gibt es ein Element $s \in \mathfrak{G}$ mit

$$|sxh - h| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit gilt

$$|h| \leq |sxh| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \Gamma |xh| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

[wegen (7)]. Also ist $h = 0 \in \mathfrak{H}$.

Es wäre erwünscht, die folgende Aussage zu beweisen:

Aufspaltungsaussage. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P} + \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}.$$

Genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Darstellung

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}. \tag{8}$$

Die Komponenten p, f von h hängen linear, stetig und invariant von h ab.

Diese Aussage ist nicht allgemein richtig. Dies zeigt das

Beispiel 2. Sei $\mathfrak{G}_0$ die additive Gruppe der reellen Zahlen. Sei $\mathfrak{H}$ die Gesamtheit aller komplexwertigen beschränkten Funktionen $h(x)$ auf $\mathfrak{G}_0$. Führt man in $\mathfrak{H}$ die Norm

$$|h| = \sup_x |h(x)|$$

ein, so ist $\mathfrak{H}$ ein Banachraum. Durch die Festsetzung

$$a h(x) = h(x + a)$$

ist in $\mathfrak{H}$ eine (zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe) Gruppe $\mathfrak{G}$ von linearen Transformationen $a, \ldots$ definiert. $\mathfrak{G}$ hat in $\mathfrak{H}$ die Schranke 1. Jeder fastperiodische Vektor $p \in \mathfrak{H}$ wird durch eine (nicht notwendig stetige) fastperiodische Funktion (im Sinne von MAAK [36], S. 26) repräsentiert; diese Funktionen sind im Sinne der später anzugebenden Definition IV.1 *ergodisch*. Mittels Satz I.1 zeigt man leicht, daß auch jeder Fluchtvektor $f \in \mathfrak{H}$ durch eine ergodische Funktion $f(x)$ (mit dem Mittelwert 0) repräsentiert wird. Die Summe von zwei ergodischen Funktionen ist, wie man mittels der Kommutativität von $\mathfrak{G}_0$ leicht einsieht, wieder eine ergodische Funktion. Jede Funktion $h \in \mathfrak{H}$, die eine Darstellung (8) besitzt, ist also ergodisch. Es gibt in $\mathfrak{H}$ jedoch auch *nicht-ergodische* Funktionen. Eine solche ist z. B. durch

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

gegeben. Somit kann die Aufspaltungsaussage für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ nicht richtig sein.

Das Ziel dieser Abhandlung ist der

Satz II.2.2 **(Aufspaltungssatz I)**. *Ist $\mathfrak{H}$ ein reflexiver Banachraum und ist $\mathfrak{G}$ eine beschränkte abelsche Halbgruppe, so gilt die Aufspaltungsaussage: $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt $\mathfrak{H} = \mathfrak{P} + \mathfrak{F}$, $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Darstellung*

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten p, f von h hängen stark-stetig, linear und invariant von h ab.

Der Beweis dieses Satzes soll in zwei Schritten erfolgen. Im Kap. III führen wir den Fall der *Halbgruppen* auf den Fall der *Gruppen* zurück, indem wir einen weiteren Aufspaltungssatz beweisen [Satz II.2.2 (Aufspaltungssatz II)

ferner Satz II.5.1]. Im Kap. IV beweisen wir dann den Aufspaltungssatz I für den Fall der Gruppen. Damit wird dann der Aufspaltungssatz I vollständig bewiesen sein.

Kap. III. Reversible Vektoren und Fluchtvektoren Einbettung der Halbgruppe in eine Gruppe

Wir machen von nun an die beiden folgenden Annahmen:

Annahme $\mathfrak{A}$. *$\mathfrak{H}$ ist ein reflexiver Banachraum.*

Annahme $\mathfrak{B}$. *$\mathfrak{G}$ ist eine beschränkte abelsche Halbgruppe von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{G}$ enthält die Identität e; $\Gamma \geq 1$ ist eine Schranke von $\mathfrak{G}$.*

Aus der Annahme $\mathfrak{A}$ folgt insbesondere: Der duale Banachraum $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ ist ebenfalls reflexiv (Satz I.3). In $\mathfrak{H}$ wie auch in $\mathfrak{H}'$ gilt der Abzählbarkeitssatz (Satz I.5). Zusammen mit der Annahme $\mathfrak{B}$ ergibt sich: Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist die Bahn $\mathfrak{G}h$ bedingt-schwach-kompakt (im Sinne von BOURBAKI [9], S. 45); die Menge $\mathfrak{G}(h)$ ist schwach-kompakt.

§1. Die schwach-abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$

Die Definition II.2 der Fluchtvektoren legt es nahe, die Halbgruppe $\mathfrak{G}$ durch Hinzunahme von Transformationen in $\mathfrak{H}$ zu erweitern, die als (in geeigneter Weise erklärte) schwache Limites von Transformationen aus $\mathfrak{G}$ auftreten. Dadurch lassen sich viele Überlegungen sehr einfach gestalten.

Definition III.1. *Sei $\mathfrak{T} = \{t, \ldots\}$ eine Menge von linearen Transformationen t in $\mathfrak{H}$. Unter der schwachen Hülle $\overline{\mathfrak{T}}$ von $\mathfrak{T}$ versteht man die Menge all derjenigen Transformationen $\bar{t}$ in $\mathfrak{H}$, für welche folgendes gilt:*

Sind $g_1, \ldots, g_s$ endlichviele beliebige Vektoren aus $\mathfrak{H}$ und ist $\mathfrak{U}$ eine schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$, so gibt es ein $t \in \mathfrak{T}$ derart, daß

$$tg_\sigma - \bar{t}g_\sigma \in \mathfrak{U} \qquad (\sigma = 1, \ldots, s)$$

gilt.

Man sieht unmittelbar: $\overline{\mathfrak{T}}$ besteht aus linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$. Die schwache Hülle von $\mathfrak{T}$ ist $\overline{\mathfrak{T}}$.

Satz III.1.1. *Es sei $\overline{\mathfrak{G}}$ die schwache Hülle von $\mathfrak{G}$. Es gilt:*

1. *$\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine beschränkte abelsche Halbgruppe mit der Schranke Γ.*

2. *Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist $\overline{\mathfrak{G}}h = \mathfrak{G}(h)$.*

3. *Jeder unter $\mathfrak{G}$ invariante Teilraum von $\mathfrak{H}$ ist auch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant und umgekehrt.*

4. *In jedem invarianten Teilraum $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ induziert $\overline{\mathfrak{G}}$ eine dort schwach-abgeschlossene Halbgruppe, nämlich die* (in $\mathfrak{H}_0$ definierte) *schwache Hülle der von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ induzierten Halbgruppe.*

Beweis. 1. a) $\overline{\mathfrak{G}}$ besitzt die Schranke Γ. Dies folgt unmittelbar aus der Beziehung (2) in Kap. I. b) $\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine Halbgruppe. Denn seien $g_\varrho \in \mathfrak{H}$ ($\varrho = 1, \ldots, r$), seien $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ beliebig gewählt und sei $\mathfrak{V} = \{h \mid |(h, h'_\nu)| < \varepsilon, \nu = 1, \ldots,\}$

eine schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$. Wir bestimmen $x \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$x\bar{y}g_\varrho - \bar{x}\bar{y}g_\varrho \in \tfrac{1}{2}\mathfrak{V} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

gilt und setzen nunmehr $\mathfrak{U} = \left\{h \mid |(h, x'h'_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}, \nu = 1, \ldots, n\right\}$. Dabei bedeutet x' die zu x duale Transformation in $\mathfrak{H}'$ (vgl. § 4 dieses Kapitels). Nun bestimmen wir $y \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$yg_\varrho - \bar{y}g_\varrho \in \mathfrak{U} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

gilt. Daraus folgt

$$xyg_\varrho - x\bar{y}g_\varrho \in \tfrac{1}{2}\mathfrak{V} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

und somit

$$xyg_\varrho - \bar{x}\bar{y}g_\varrho \in \mathfrak{V} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Also ist $\bar{x}\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$. c) Die Halbgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ist abelsch: Wenn $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ ist, dann ist $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall $\bar{x} = x \in \mathfrak{G}$. Sei $g \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt und $\mathfrak{V} = \{h \mid |(h, h'_\nu)| < \varepsilon, \nu = 1, \ldots, n\}$ eine schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$. Wir setzen

$$\mathfrak{W} = \left\{h \mid |(h, h'_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |(h, x'h'_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \nu = 1, \ldots, n\right\}$$

und bestimmen $y \in \mathfrak{G}$ derart, daß zugleich

$$yg - \bar{y}g \in \mathfrak{W}$$

und

$$yxg - \bar{y}xg \in \mathfrak{W}$$

gilt. Dann gilt $xyg - x\bar{y}g \in \frac{1}{2}\mathfrak{V}$, $yxg - \bar{y}xg \in \frac{1}{2}\mathfrak{V}$. Da $\mathfrak{G}$ abelsch ist, folgt

$$\bar{y}xg - x\bar{y}g \in \mathfrak{V}.$$

Da $g \in \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V}$ beliebig waren, ergibt sich $\bar{y}x = x\bar{y}$. Wiederholt man dieselbe Überlegung, indem man $\bar{y}$ an die Stelle von x treten und $\bar{x}$ die Rolle von $\bar{y}$ spielen läßt, so ergibt sich die Kommutativität von $\overline{\mathfrak{G}}$.

2. Sei $h_0 \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt und g_0 ein Vektor aus $\mathfrak{G}(h_0)$. Es gibt also (Satz I.6) eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$, derart, daß

$$x_\nu h_0 \to g_0 \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Wir verfeinern das der Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ entsprechende Fréchet-Filter F (BOURBAKI [9], S. 8) zu einem Ultrafilter $\overline{F}$ (BOURBAKI [9], S. 9). Es ist klar, was man bei beliebig vorgegebenem $h \in \mathfrak{H}$ unter $\overline{F}h$ zu verstehen hat. $\overline{F}h$ ist als Ultrafilter in der bedingt schwach-kompakten Menge $\mathfrak{G}h$ sicherlich schwach-konvergent. Offenbar findet die Konvergenz gleichmäßig für je endlichviele $h \in \mathfrak{H}$ statt. Setzt man daher für jedes $h \in \mathfrak{H}$

$$\lim \overline{F}h = \bar{x}h,$$

so ist dadurch eine Transformation $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ gegeben. Es ist

$$\bar{x} h_0 = g_0 .$$

Also ist $\overline{\mathfrak{G}} h = \mathfrak{G}(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{H}$.

3. Die Aussage Nr. 3 folgt aus der starken Abgeschlossenheit der Teilräume von $\mathfrak{H}$ und aus Satz I.1 (MAZUR).

4. Sei $\mathfrak{H}_0$ ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}_0$ die von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ induzierte Halbgruppe. Schränkt man den Definitionsbereich einer Transformation $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{H}_0$ ein, so entsteht trivialerweise eine Transformation aus der (innerhalb von $\mathfrak{H}_0$ definierten) schwachen Hülle $\overline{\mathfrak{G}}_0$ von $\mathfrak{G}_0$. Sei umgekehrt $\bar{x}_0 \in \overline{\mathfrak{G}}_0$. Für beliebig gewählte endlichviele $h_1, \ldots, h_r \in \mathfrak{H}_0$ und eine beliebige schwache Umgebung $\mathfrak{U}$ von $0 \in \mathfrak{H}$ sei $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_r; \mathfrak{U})$ die Menge aller $x \in \mathfrak{G}$, welche

$$x h_\varrho - \bar{x} h_\varrho \in \mathfrak{U} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

erfüllen. Die Mengen der Gestalt $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_r; \mathfrak{U})$ sind nicht-leer und bilden eine Filterbasis (BOURBAKI [9], S. 9), erzeugen also ein Filter F in $\mathfrak{G}$. Wir verfeinern das Filter F zu einem Ultrafilter $\overline{F}$ (BOURBAKI [9], S. 9). Es ist klar, was man für beliebiges $h \in \mathfrak{H}$ unter $\overline{F} h$ zu verstehen hat: $\overline{F} h$ ist für beliebiges $h \in \mathfrak{H}$ ein Ultrafilter in der schwach-kompakten Menge $\overline{\mathfrak{G}} h$, ist also schwach-konvergent. Die Konvergenz findet offenbar gleichmäßig für endlich viele $h \in \mathfrak{H}$ statt. Durch die Festsetzung

$$\bar{x} h = \lim \overline{F} h$$

ist also eine Transformation $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ erklärt, die in $\mathfrak{H}_0$ offensichtlich die Transformation $\bar{x}_0$ induziert.

Die Bedeutung von $\overline{\mathfrak{G}}$ für unsere Untersuchung ergibt sich aus dem

Satz III.1.2. *1. Der Aufspaltungssatz I ist für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ dann und nur dann richtig, wenn er für $\mathfrak{H}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ richtig ist. 2. Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, wenn er fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist. 3. Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn er ein Fluchtvektor unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, d. h. wenn es ein $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{x} h = 0$ gibt. 4. Ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$, d. h. sind alle Vektoren aus $\mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, so ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Gruppe.*

Beweis. Die Aussage Nr. 1 folgt aus Nr. 2 und Nr. 3. Die Aussage Nr. 4 folgt aus Satz II.1.6 (man benütze die Tatsache, daß innerhalb totalbeschränkter Mengen die schwache Topologie zur starken Topologie äquivalent ist). Die Richtigkeit der Aussage Nr. 3 ist aus Satz III.1.1 unmittelbar zu ersehen. Nun beweisen wir die Aussage Nr. 2.

a) Sei $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$. Dann folgt zunächst: $\overline{\mathfrak{G}} h$ ist eine totalbeschränkte Menge. Aus der bereits bewiesenen Aussage Nr. 4 und aus Satz II.1.3 folgt dann, daß h fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist.

b) Sei $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ und sei $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$. Setzt man $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{G}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, so sieht man unmittelbar, daß $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ von $\mathfrak{G}$ ist. q.e.d.

§2. Reversible Vektoren. Formulierung des Aufspaltungssatzes II

Wir benützen eine in Satz II.1.4 festgestellte Eigenschaft der fastperiodischen Vektoren, um eine neue Klasse von Vektoren zu definieren. Es wird sich herausstellen, daß unter den von uns gemachten Annahmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die fastperiodischen Vektoren bereits durch diese Eigenschaft charakterisiert sind.

Sei h ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{H}$. Wir betrachten die schwache Hülle $\mathfrak{G}(h)$ der Bahn $\mathfrak{G}h$. Ist $g \in \mathfrak{G}(h)$, so ist $\mathfrak{G}(g) \subseteq \mathfrak{G}(h)$. Dabei gilt nicht allgemein das Gleichheitszeichen; ist z. B. h ein von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedener Fluchtvektor, so können wir $g = 0$ wählen und haben dann $h \notin \mathfrak{G}(g) = \{0\}$.

Definition III.2. *Ein Vektor $r \in \mathfrak{H}$ heißt reversibel unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$, wenn*

$$\mathfrak{G}(g) = \mathfrak{G}(r) \quad \text{für jedes } g \in \mathfrak{G}(r)$$

gilt. Die Menge aller reversiblen Vektoren $r \in \mathfrak{H}$ heiße $\mathfrak{R}$.

Man sieht unmittelbar: Die Menge $\mathfrak{R}$ ist eine invariante Teilmenge von $\mathfrak{H}$; sie enthält mindestens den Vektor $0 \in \mathfrak{H}$; sie enthält keinen von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedenen Fluchtvektor; hieraus und aus Beispiel 1 folgt, daß im allgemeinen auch nicht-reversible Vektoren in $\mathfrak{H}$ auftreten.

Der Begriff „reversibel" läßt sich mittels der schwachen Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ sehr einfach ausdrücken: Ein Vektor $r \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann reversibel unter $\mathfrak{G}$, wenn es zu jedem $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{y}\,\bar{x}\,r = r$ gibt, d. h. wenn sich $\overline{\mathfrak{G}}$ bezüglich h wie eine *Gruppe* verhält (Existenz der Inversen). Mittels des Abzählbarkeitssatzes I.5 kann man das noch anders ausdrücken: Ein Vektor $r \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann reversibel unter $\mathfrak{G}$, wenn folgendes gilt: Ist $x_1, x_2, \ldots \in \mathfrak{G}$ eine Folge, derart, daß

$$x_\nu r \to g \quad \text{(schwach)}$$

gilt, so gibt es eine Folge $y_\mu \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$y_\mu g \to r \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Die Bezeichnung „reversibel" erscheint auf diese Weise gerechtfertigt.

Beachtet man, daß in einer totalbeschränkten Menge jede schwach-konvergente Folge automatisch stark-konvergent ist, so ergibt sich aus Satz II.1.4 unmittelbar der

Satz III.2.1. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter der abelschen Halbgruppe $\mathfrak{G}$, wenn er reversibel ist und wenn seine Bahn $\mathfrak{G}h$ totalbeschränkt ist.*

Es wird sich herausstellen, daß unter den von uns gemachten Annahmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jeder reversible Vektor automatisch fastperiodisch ist.

In diesem Kapitel beweisen wir den

Satz III.2.2 (Aufspaltungssatz II). *$\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt $\mathfrak{H} = \mathfrak{R} + \mathfrak{F}$, $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Darstellung*

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten r, f von h hängen linear, stetig und invariant von h ab.

Einige Teilaussagen dieses Satzes kann man unmittelbar einsehen. Daß $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$ ist, haben wir vorhin bereits erwähnt. Aus der *Kommutativität* von $\overline{\mathfrak{G}}$ ergibt sich: $\mathfrak{F}$ *ist eine lineare Teilmannigfaltigkeit von* $\mathfrak{H}$; denn seien $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}$ beliebig gewählt, und $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \overline{\mathfrak{G}}$ derart bestimmt, daß $\bar{x}_1 f_1 = 0$, $\bar{x}_2 f_2 = 0$ gilt. Dann ist für beliebige komplexe Zahlen α_1, α_2:

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_1 f_1) + \alpha_2 \bar{x}_1 (\bar{x}_2 f_2) = 0.$$

Also ist $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathfrak{F}$. In § 4 wird sich die lineare Abgeschlossenheit von $\mathfrak{F}$ von neuem ergeben.

§3. Beweis der Existenzaussage des Aufspaltungssatzes II. Ein Beweis des Fixpunktsatzes

Satz III.3.1. *Jeder Vektor* $h \in \mathfrak{H}$ *besitzt mindestens eine Darstellung*

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}$$

mit $r \in \mathfrak{G}(h)$.

Beweis. Offenbar genügt es, in $\mathfrak{G}(h)$ einen Vektor $r \in \mathfrak{R}$ zu finden, derart, daß für geeignetes $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$

$$\bar{x}(h - r) = 0$$

gilt. — Wir betrachten das System Σ aller Mengen der Gestalt $\mathfrak{G}(g)$ mit $g \in \mathfrak{G}(h)$. Jede dieser Mengen ist invariant und schwach-abgeschlossen. Σ ist halbgeordnet bezüglich mengentheoretischer Inklusion. Nach Satz I.4 gibt es zu jedem vollständig geordneten Teilsystem von Σ eine untere Schranke innerhalb des Systems Σ. Also gibt es nach dem Zornschen Lemma (Bourbaki [8], S. 37) ein *absolut minimales Element in* Σ, also ein $s \in \mathfrak{G}(h)$, derart, daß $\mathfrak{G}(g) = \mathfrak{G}(s)$ für jedes $g \in \mathfrak{G}(s)$ gilt; s ist also ein reversibler Vektor. Nach Satz III.1.1 (Aussage Nr. 2) gibt es eine Transformation $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit

$$\bar{x} h = s.$$

Sei $\bar{x} s = g$. Wegen $s \in \mathfrak{R}$ gibt es ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{y} g = s$. Setzt man $r = \bar{y} s$, so ist offenbar $\bar{\bar{x}} r = s$ und $r \in \mathfrak{R}$, $r \in \mathfrak{G}(h)$. Es gilt nun

$$\bar{x}(h - r) = s - s = 0. \qquad \text{q.e.d.}$$

Die beim Beweis des Satzes III.3.1 verwendete Methode läßt sich zum Beweis des in der Einleitung formulierten *Fixpunktsatzes* verwenden. Wir beweisen: *Ist* h *ein beliebiger Vektor aus* $\mathfrak{H}$, *so enthält die konvexe, stark-abgeschlossene Hülle* $\mathfrak{K}(h)$ *von* $\mathfrak{G}h$ *genau einen unter* $\mathfrak{G}$ *invarianten Punkt* h_0.

Hierzu bilden wir zunächst die konvexe Hülle $\mathfrak{K} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, x_i \in \mathfrak{G}, i = 1, \ldots, n \right\}$ von $\mathfrak{G}$. Die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ ist eine konvexe abelsche Halbgruppe von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$, mit der Schranke Γ. Stets ist $\overline{\mathfrak{K}} h = \mathfrak{K}(h)$. Der Fixpunktsatz ist äquivalent zu der Aussage: *Für jedes* $h \in \mathfrak{H}$ *enthält* $\overline{\mathfrak{K}} h$ *genau einen unter der Halbgruppe* $\overline{\mathfrak{K}}$ *fixen Punkt* h_0. Wir beweisen nun diese Aussage.

Nach Satz III.3.1 gibt es in $\overline{\mathfrak{R}}h$ einen unter $\overline{\mathfrak{R}}$ *reversiblen* Vektor h_0. Wir zeigen, daß h_0 unter $\overline{\mathfrak{R}}$ *fix* ist. Sei $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{R}}$ beliebig gewählt. Für jedes $g \in \overline{\mathfrak{R}}h_0$ gilt

$$|\bar{a}h_0 - h_0| \leq \Gamma |\bar{a}g - g|.$$

Denn wegen der Reversibilität von h_0 gibt es zu jedem $g \in \overline{\mathfrak{R}}h_0$ ein $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{R}}$ mit $h_0 = \bar{x}g$. Somit ist

$$|\bar{a}h_0 - h_0| = |\bar{a}\bar{x}g - \bar{x}g| = |\bar{x}(\bar{a}g - g)| \leq \Gamma |\bar{a}g - g|.$$

Setzen wir speziell $g = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} (\bar{a})^\nu h_0$ mit beliebigem $n > 0$ ($\overline{\mathfrak{R}}$ ist konvex!), so folgt

$$|\bar{a}g - g| \leq \frac{2}{n}\Gamma |h_0|$$

und somit

$$|\bar{a}h_0 - h_0| \leq \frac{2}{n}\Gamma^2 |h_0|.$$

Da n beliebig war, ist $\bar{a}h_0 = h_0$.

h_0 ist also fix unter $\overline{\mathfrak{R}}$. Sei h_1 ein weiterer Fixpunkt in $\overline{\mathfrak{R}}h$. Für passende $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in \overline{\mathfrak{R}}$ gilt jedenfalls

$$\bar{x}_0 h = h_0, \quad \bar{x}_1 h = h_1.$$

Daraus folgt

$$h_0 = \bar{x}_0 h = \bar{x}_1 \bar{x}_0 h = \bar{x}_0 \bar{x}_1 h = \bar{x}_1 h = h_1.$$

§4. Beweis der Eindeutigkeitsaussage des Aufspaltungssatzes II

Um die Eindeutigkeitsaussage des Aufspaltungssatzes II zu beweisen, machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß für den dualen Raum $\mathfrak{H}'$ und die in ihm definierte zur Halbgruppe $\mathfrak{G}$ duale Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ ebenfalls die Annahmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelten.

Die zur Halbgruppe $\mathfrak{G}$ duale Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ ist dabei folgendermaßen erklärt. Ist x eine beschränkte lineare Transformation in $\mathfrak{H}$, so gibt es genau eine beschränkte lineare Transformation x' in $\mathfrak{H}'$, derart, daß

$$(xh, g') = (h, x'g') \quad \text{für beliebige} \quad h \in \mathfrak{H}, \quad g' \in \mathfrak{H}'$$

gilt. x' wird die zu x duale Transformation genannt. Durchläuft x die beschränkte abelsche Halbgruppe $\mathfrak{G}$, so durchläuft x' ebenfalls eine abelsche (zu $\mathfrak{G}$ isomorphe) Halbgruppe $\mathfrak{G}'$, welche die zur Halbgruppe $\mathfrak{G}$ duale Halbgruppe genannt wird und ebenfalls beschränkt — mit derselben Schranke Γ wie $\mathfrak{G}$ — ist. Die zur Halbgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ duale Halbgruppe $(\overline{\mathfrak{G}})'$ ist $\overline{(\mathfrak{G}')}$, die schwache Hülle von $\mathfrak{G}'$. $\mathfrak{G}$ ist die zu $\mathfrak{G}'$ duale Halbgruppe.

Für $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}'$ gilt die *Existenzaussage des Aufspaltungssatzes II: Es sei $\mathfrak{R}'$ die Menge der unter $\mathfrak{G}'$ reversiblen Vektoren $r' \in \mathfrak{H}'$; es sei $\mathfrak{F}'$ die Menge der Fluchtvektoren $f' \in \mathfrak{H}'$ bezüglich $\mathfrak{G}'$. Dann besitzt jeder Vektor $h' \in \mathfrak{H}'$ mindestens eine Darstellung*

$$h' = r' + f', \quad r' \in \mathfrak{R}', \quad f' \in \mathfrak{F}'$$

mit $r' \in \mathfrak{G}'(h')$.

Ferner benützen wir die bereits bewiesenen Aussagen:

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}, \quad \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{F}' = \{0'\}.$$

Wir untersuchen nun die Beziehungen zwischen den Mengen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{F}'$.

Satz III.4.1. *Ist $r \in \mathfrak{R}$ und $f' \in \mathfrak{F}'$, so gilt $(r, f') = 0$. Ist $r' \in \mathfrak{R}'$ und $f \in \mathfrak{F}$, so gilt $(f, r') = 0$.*

Beweis. Sei $r \in \mathfrak{R}$, $f' \in \mathfrak{F}'$ und etwa $\bar{x}' f' = 0$. Dann gibt es ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit

$$\bar{y}\,\bar{x}\, r = r.$$

Somit ist

$$(r, f') = (\bar{y}\,\bar{x}\, r, f') = (\bar{y}\, r, \bar{x}' f') = 0.$$

Der Beweis für die andere Hälfte des Satzes erfolgt analog.

Satz III.4.2. *Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Fluchtvektoren in $\mathfrak{H}$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{F}$ besteht genau aus allen Vektoren $f \in \mathfrak{H}$, welche*

(1) $$(f, r') = 0 \quad \textit{für alle} \quad r' \in \mathfrak{R}'$$

erfüllen. — Die Menge $\mathfrak{F}'$ aller Fluchtvektoren in $\mathfrak{H}'$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}'$. $\mathfrak{F}'$ besteht genau aus allen Vektoren $f' \in \mathfrak{H}'$, welche

$$(r, f') = 0 \quad \textit{für alle} \quad r \in \mathfrak{R}$$

erfüllen.

Beweis. Wir beweisen nur die erste Hälfte des Satzes. Der Beweis für die andere Hälfte erfolgt analog.

Wir zeigen zunächst, daß jeder Vektor $f \in \mathfrak{H}$, welcher (1) erfüllt, in $\mathfrak{F}$ liegt. Aus der Invarianz von $\mathfrak{R}'$ folgen dann die restlichen Aussagen.

Sei $f_0 \in \mathfrak{H}$ derart, daß $(f_0, r') = 0$ für alle $r' \in \mathfrak{R}'$ gilt. Nach Satz III.3.1 besitzt f_0 eine Darstellung

$$f_0 = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Für jedes $r' \in \mathfrak{R}'$ gilt

$$(r, r') = (f_0, r') - (f, r') = 0$$

nach der Voraussetzung und nach Satz III.4.1. Nach Satz III.4.1 gilt aber auch

$$(r, f') = 0 \quad \text{für jedes} \quad f' \in \mathfrak{F}'.$$

Da nach Satz III.3.1 $\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}' + \mathfrak{F}'$ gilt, ist

$$(r, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad h' \in \mathfrak{H}',$$

also $r = 0$. Es ist somit $f_0 = f \in \mathfrak{F}$. Hieraus und aus Satz III.4.1 ergibt sich, daß die Vektoren $f \in \mathfrak{F}$ durch die Bedingung (1) gekennzeichnet sind. Daraus folgt: $\mathfrak{F}$ ist ein Teilraum von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{F}$ ist aber auch invariant unter $\mathfrak{G}$. Denn seien $f \in \mathfrak{F}$ und $x \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$(xf, r') = (f, x' r') = 0 \quad \text{für jedes} \quad r' \in \mathfrak{R}'$$

wegen der $\mathfrak{G}'$-Invarianz von $\mathfrak{R}'$ (vgl. die Bemerkung nach der Definition III.2). Es ist also $xf \in \mathfrak{F}$. q. e. d.

Satz III.4.3. *Die Menge $\mathfrak{R}$ aller reversiblen Vektoren in $\mathfrak{H}$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{R}$ besteht genau aus allen Vektoern $r \in \mathfrak{H}$, welche*

$$(r, f') = 0 \quad \text{für alle} \quad f' \in \mathfrak{F}' \tag{2}$$

erfüllen. — Die Menge $\mathfrak{R}'$ aller reversiblen Vektoren r' in $\mathfrak{H}'$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}'$. $\mathfrak{R}'$ besteht genau aus allen Vektoren $r' \in \mathfrak{G}'$, welche

$$(f, r') = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{F}$$

erfüllen.

Beweis. Wir beweisen nur die erste Hälfte des Satzes. Der Beweis für die andere Hälfte erfolgt analog.

Es genügt, zu beweisen, daß jeder Vektor $r \in \mathfrak{H}$, welcher (2) erfüllt, in $\mathfrak{R}$ liegt; aus der Invarianz von $\mathfrak{F}'$ (Satz III.4.2) und aus Satz III.4.1 folgen dann die restlichen Aussagen.

Sei $r_0 \in \mathfrak{H}$ derart, daß $(r_0, f') = 0$ für alle $f' \in \mathfrak{F}'$ gilt. Nach Satz III.3.1 besitzt r_0 eine Darstellung

$$r_0 = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Für jedes $f' \in \mathfrak{F}'$ gilt

$$(f, f') = (r_0, f') - (r, f') = 0$$

nach der Voraussetzung und nach Satz III.4.1. Nach Satz III.4.1 gilt aber auch

$$(f, r') = 0 \quad \text{für jedes} \quad r' \in \mathfrak{R}'.$$

Da nach Satz III.3.1 $\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}' + \mathfrak{F}'$ gilt, ist

$$(f, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad h' \in \mathfrak{H}',$$

also $f = 0$. Es ist also $r_0 = r \in \mathfrak{R}$.

Nunmehr ergeben sich sämtliche Aussagen des Aufspaltungssatzes II ohne Schwierigkeit.

Beweis des Aufspaltungssatzes II.

Es sind noch folgende Aussagen zu beweisen:

1. Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt höchstens eine Darstellung der Gestalt

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}. \tag{3}$$

Denn es sei

$$h = r_0 + f_0, \quad r_0 \in \mathfrak{R}, \quad f_0 \in \mathfrak{F}$$

eine zweite Darstellung. Dann gilt

$$r - r_0 = f_0 - f.$$

Nach Satz III.4.3 ist $r - r_0 \in \mathfrak{R}$, nach Satz III.4.2 ist $f_0 - f \in \mathfrak{F}$, also ist

$$r - r_0 = f_0 - f \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{F}$$

und somit $r - r_0 = f_0 - f = 0$ wegen $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, d. h. $r_0 = r$, $f_0 = f$.

2. Gilt $h_i = r_i + f_i$, $r_i \in \mathfrak{R}$, $f_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, \ldots, n)$, und sind α_i $(i = 1, \ldots, n)$ beliebige komplexe Zahlen, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i \in \mathfrak{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in \mathfrak{F},$$

also hängen die Komponenten der Zerlegung (3) *linear von h ab.*

3. In der eindeutig bestimmten, für jedes $h \in \mathfrak{H}$ vorhandenen Darstellung (3) ist nach Satz III.3.1 stets $r \in \mathfrak{G}(h)$. Daraus folgt $|r| \leq \Gamma|h|$. r hängt also an der Stelle $h = 0$ stetig von h ab. Also hängt auch f an der Stelle $h = 0$ stetig von h ab. Aus Linearitätsgründen (Nr. 2) *hängen* also *die Komponenten r, f an jeder Stelle h in* $\mathfrak{H}$ *stetig von h ab.*

4. Gilt

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}$$

und ist $x \in \mathfrak{G}$ beliebig, so gilt

$$xh = xr + xf, \quad xr \in \mathfrak{R}, \quad xf \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten r, f hängen also *invariant von h ab.*

Damit ist der Aufspaltungssatz II vollständig bewiesen.

§ 5. Untersuchung des Raumes $\mathfrak{R}$. Einbettung der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ in eine Gruppe. Beweis des Aufspaltungssatzes I in Spezialfällen

Aus dem Satz III.2.1 folgt ohne weiteres: $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}$. Wenn man zeigen kann, daß $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ gilt, d. h. daß *jeder reversible Vektor automatisch fastperiodisch* ist, so folgt der Aufspaltungssatz I unmittelbar aus dem Aufspaltungssatz II. Wir haben also nur noch den invarianten Teilraum $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{H}$ näher zu untersuchen.

Wir können zu diesem Zweck — auf Grund der Aussage Nr. 4 des Satzes III.1.1 — jederzeit annehmen, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ *sei.*

Satz III.5.1. *Es sei* $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$. *Dann ist* $\overline{\mathfrak{G}}$ *eine Gruppe mit der Schranke* Γ.

Beweis. Es ist nur noch die Existenz der Inversen in $\overline{\mathfrak{G}}$ zu beweisen.

Wählt man zu $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$, $h \in \mathfrak{H}$ ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ derart, daß $\bar{y}\bar{x}h = h$ gilt, so hat man wegen der Kommutativität von $\overline{\mathfrak{G}}$ auch $\bar{y}\bar{x}h = h$. Hieraus entnimmt man: $\bar{x}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ für jedes $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$. Überdies gilt

$$\frac{1}{\Gamma}|h| \leq \frac{1}{\Gamma}|\bar{y}\bar{x}h| \leq |\bar{x}h|. \tag{4}$$

Es ergibt sich:

Jedes $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ besitzt genau eine Inverse $\bar{x}^{-1}$; diese Transformation hat nach (4) stets die Schranke Γ. Um zu beweisen, daß aus $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ stets $\bar{x}^{-1} \in \overline{\mathfrak{G}}$ folgt, genügt es (wegen der schwachen Abgeschlossenheit von $\overline{\mathfrak{G}}$), folgendes zu zeigen: Ist n eine natürliche Zahl, und sind die Vektoren $h_1, \ldots, h_n \in \mathfrak{H}$ beliebig

gewählt, so gibt es zu jedem $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ derart, daß

$$\bar{y}\,\bar{x}\,h_\nu = h_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt. Dies ergibt sich nun folgendermaßen.

Wir bilden die direkte Summe $\hat{\mathfrak{H}}$ von n Exemplaren des Raumes $\mathfrak{H}$. $\hat{\mathfrak{H}}$ besteht aus den sämtlichen formalen Ausdrücken der Gestalt $[g_1, \ldots, g_n]$, $(g_\nu \in \mathfrak{H})$, mit denen das lineare Rechnen komponentenweise vorzunehmen ist. Führt man als Norm etwa

$$|[g_1, \ldots, g_n]| = \sum_{\nu=1}^{n} |g_\nu|$$

ein, so ist $\hat{\mathfrak{H}}$ ein reflexiver Banachraum. Für beliebiges $x \in \overline{\mathfrak{G}}$ setzen wir

$$\hat{x}\,[g_1, \ldots, g_n] = [\bar{x}g_1, \ldots, \bar{x}g_n].$$

Die so definierten linearen Transformationen $\hat{x}$ in $\hat{\mathfrak{H}}$ durchlaufen eine abelsche Halbgruppe $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ mit der Schranke Γ, wenn $\bar{x}$ die Halbgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ durchläuft. Man überzeugt sich leicht, daß $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ schwach-abgeschlossen ist und daß jeder Vektor der Gestalt $[g_1, 0, \ldots, 0]$ oder $[0, g_2, 0, \ldots, 0]$ oder $[0, \ldots, 0, g_n]$ reversibel unter $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ ist. Nun gilt für $\hat{\mathfrak{H}}$ und $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ der Aufspaltungssatz II. Es folgt, daß alle Vektoren in $\hat{\mathfrak{H}}$ reversibel unter $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ sind. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Mittels des soeben bewiesenen Satzes kann man für eine umfangreiche Klasse von Fällen den Aufspaltungssatz I dadurch beweisen, daß man *direkt* nachweist: *für jeden Vektor $h \in \mathfrak{R}$ ist die Bahn $\mathfrak{G}h$ totalbeschränkt, d. h. $h \in \mathfrak{P}$.*

Wie schon im Anschluß an Satz I.2 erwähnt wurde, ist jeder gleichmäßig-konvex (CLARKSON [*11*]) normierbare Banachraum reflexiv. Es gilt nun der

Satz III.5.2. *Sei $\mathfrak{H}$ ein gleichmäßig-konvex normierbarer Banachraum. Dann ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}$.*

Beweis. Eine Umnormierung von $\mathfrak{H}$ zerstört die Beschränktheit von $\mathfrak{G}$ nicht. Wir können daher gleich annehmen, daß die Norm $|h|$ gleichmäßig-konvex ist. Ferner können wir auf Grund des Aufspaltungssatzes II annehmen, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ ist. Wir betrachten die schwach-abgeschlossene Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{H}$. Wie ich in einer anderen Arbeit gezeigt habe, ist die Norm

$$\|h\| = \sup_{\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}} |\bar{x}\,h|$$

wiederum gleichmäßig-konvex; sie ist *invariant* unter $\overline{\mathfrak{G}}$: stets gilt $\|\bar{x}h\| = \|h\|$ (JACOBS [*27*], S. 345 f.). Die invariante schwach-abgeschlossene Menge $\overline{\mathfrak{G}h}$ ist daher für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ihr eigener „*Minimalteil*" bezüglich dieser Norm ([*28*], S. 415) und somit — auf Grund der gleichmäßigen Konvexität dieser Norm — *totalbeschränkt* ([*28*], S. 415). Es ist also jeder Vektor $h \in \mathfrak{R}$ fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$, also auch (nach Satz III.1.2) fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, d. h. es ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}$. q. e. d.

Aus Satz III.4.1 und der später anzugebenden „schwachen" Kennzeichnung der fastperiodischen Vektoren (Satz IV.1.1) kann man folgern: Ist in $\mathfrak{H}'$ jeder reversible Vektor fastperiodisch, so ist auch in $\mathfrak{H}$ jeder reversible Vektor fastperiodisch und umgekehrt. Die Gleichung $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ gilt daher nach Satz III.5.2 auch für Räume $\mathfrak{H}$, für welche $\mathfrak{H}'$ gleichmäßig-konvex normiert werden kann; Kennzeichnungen dieser Räume finden sich bei DAY [*14*] und NAKANO [*44*].

Wie DAY gezeigt hat, gibt es reflexive Banachräume, die sich nicht gleichmäßig-konvex normieren lassen (DAY [*12*]). Wir geben daher für den Aufspaltungssatz I einen Beweis an, welcher nicht von einer derartigen Eigenschaft Gebrauch macht.

Angenommen, der Aufspaltungssatz I ist unter der Annahme bewiesen, daß $\mathfrak{G}$ eine *Gruppe* sei. Wendet man ihn dann auf die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ im Raume $\mathfrak{R}$ an und beachtet man die Tatsache, daß kein von $0 \in \mathfrak{R}$ verschiedener Vektor ein Fluchtvektor bezüglich $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, so ergibt sich die Fastperiodizität aller Vektoren $r \in \mathfrak{R}$ bezüglich $\overline{\mathfrak{G}}$, also (nach Satz III.1.2) auch bezüglich $\mathfrak{G}$, d. h. wir haben dann $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$. Damit wird dann der Aufspaltungssatz I allgemein bewiesen sein.

Kap. IV. Beweis des Aufspaltungssatzes I

In diesem Kapitel soll der Beweis des Aufspaltungssatzes I unter der folgenden zusätzlichen Annahme durchgeführt werden:

Annahme $\mathfrak{C}$. *$\mathfrak{G}$ ist eine Gruppe.*

Nach der am Ende von Kap. III § 5 gemachten Bemerkung wird dann der Aufspaltungssatz I allgemein bewiesen sein.

Als Hilfsmittel benötigen wir den

Approximationssatz für fastperiodische Funktionen. *Ist $\varphi(x)$ eine fastperiodische Funktion auf der abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ (im Sinne von* v. NEUMANN-MAAK, vgl. MAAK [*36*], S. 26, 152), *so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlichviele Charaktere $\chi_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ von $\mathfrak{G}$ und komplexe Zahlen $\alpha_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ derart, daß*

$$\left| \varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \chi_\nu(x) \right| < \varepsilon$$

identisch in $x \in \mathfrak{G}$ gilt (vgl. MAAK [*36*], S. 126, 18).

Dabei versteht man unter einem Charakter von $\mathfrak{G}$ eine komplexwertige auf $\mathfrak{G}$ erklärte Funktion $\chi(x)$, welche die Gleichungen

$$|\chi(x)| = 1, \quad \chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$$

für alle $x, y \in \mathfrak{G}$ erfüllt. Ein Charakter von $\mathfrak{G}$ ist stets fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$. Man kann einen *Charakter* von $\mathfrak{G}$ auch als *eindimensionale unitäre Darstellung* von $\mathfrak{G}$ auffassen (nach dem SCHURschen Lemma, vgl. MAAK [*36*], S. 17 f. sind alle irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen einer *abelschen* Gruppe *eindimensional*).

Außer dem Approximationssatz ziehen wir Teile der EBERLEINschen *Theorie der schwach-fastperiodischen Funktionen* auf abelschen Gruppen heran (Satz IV.1.2, Satz IV.2.2).

§1. Eine Kennzeichnung der fastperiodischen Vektoren und der Fluchtvektoren

Sowohl die fastperiodischen Vektoren als auch die Fluchtvektoren in $\mathfrak{H}$ lassen sich durch „schwache" Eigenschaften kennzeichnen.

Definition IV.1. *Eine beschränkte komplexwertige, auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ erklärte Funktion $\varphi(x)$ heißt ergodisch mit dem Mittelwert $M_x\{\varphi(x)\}=\alpha$, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ endlichviele Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ gibt, derart, daß*

$$\left|\alpha - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x a_\nu)\right| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{G}$$

gilt (vgl. etwa MAAK [39], S. 36).

Beispielsweise ist jede fastperiodische Funktion ergodisch (MAAK [39], S. 41, 43). Es gibt aber im allgemeinen nicht-fastperiodische ergodische Funktionen (vgl. MAAK [39], S. 42; EBERLEIN [22], S. 233).

Man sieht leicht ein: Die auf der abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ergodischen Funktionen bilden einen linearen Raum; der Mittelwert $M_x\{\varphi(x)\}$ ist durch φ eindeutig bestimmt und hängt linear von φ ab; er ist ferner invariant, d. h. es gilt $M_x\{\varphi(xa)\}=M_x\{\varphi(x)\}$ für jedes $a\in\mathfrak{G}$; ferner ist $M_x\{\varphi(x)\} \leq \sup_x |\varphi(x)|$, d. h. $M\{\varphi\}$ hängt stetig (im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz) von φ ab.

Satz IV.1.1. *Ein Vektor $h\in\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $g'\in\mathfrak{H}'$ die auf $\mathfrak{G}$ erklärte komplexwertige Funktion*

$$\varphi(x)=(xh, g')$$

fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ (im Sinne von v. NEUMANN-MAAK, *vgl.* MAAK [36], S. 26, 152) *ist.*

Beweis. I. Sei $h\in\mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, und sei $g'\in\mathfrak{H}'$ beliebig. Aus der Totalbeschränktheit der Menge $\mathfrak{G}h$ ergibt sich unmittelbar, daß die Funktionenmenge $\{\varphi(xa)|a\in\mathfrak{G}\}$ im Sinne der Norm $|\varphi|=\sup_x|\varphi(x)|$ totalbeschränkt ist. Dies bedeutet aber definitionsgemäß (MAAK [36], S. 152), daß die Funktion $\varphi(x)$ fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ ist.

II. Sei $h\in\mathfrak{H}$ so beschaffen, daß für jedes $g'\in\mathfrak{H}'$ die Funktion $\varphi(x)=(xh, g')$ fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ ist.

Es sei $\chi(x)$ ein Charakter von $\mathfrak{G}$. Für jedes $g'\in\mathfrak{H}'$ und beliebiges $x\in\mathfrak{G}$ können wir den Mittelwert

$$M_t\{(xth, g')\,\chi(t)\} \tag{1}$$

bilden. Der Ausdruck (1) hängt offenbar linear und stetig von $g'\in\mathfrak{H}'$ ab; wegen der Reflexivität von $\mathfrak{H}$ läßt sich (1) also etwa für $x=e$ in der Gestalt

$$M_t\{(th, g')\,\chi(t)\}=(p, g')$$

mit geeignetem $p \in \mathfrak{H}$, darstellen. Es gilt nun für beliebiges $x \in \mathfrak{G}$:

$$\begin{aligned}(xp, g') = (p, x'g') &= M_t\{(th, x'g')\,\chi(t)\}\\ &= M_t\{(xth, g')\,\chi(t)\} = M_t\{(th, g')\,\chi(x^{-1}t)\}\\ &= \chi(x^{-1})\,M_t\{(th, g')\,\chi(t)\}\\ &= \chi(x^{-1})\,(p, g') = \big(\chi(x^{-1})\,p, g'\big).\end{aligned}$$

Da $g' \in \mathfrak{H}'$ beliebig war, ist

$$xp = \chi(x^{-1})\,p \quad \text{für jedes} \quad x \in \mathfrak{G},$$

d. h. p erzeugt einen höchstens eindimensionalen invarianten Teilraum von $\mathfrak{H}$, hat somit sicher eine totalbeschränkte Bahn $\mathfrak{G}h$ und ist daher fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$ (Satz II.1.3.).

Wir zeigen nun, daß der Vektor h in der schwach-abgeschlossenen linearen Hülle des Systems aller eindimensionalen invarianten Teilräume von $\mathfrak{H}$ enthalten ist. Nach Satz I.1 ist h dann auch in der stark-abgeschlossenen Hülle desselben Systems enthalten und somit nach Satz II.1.1 ein fastperiodischer Vektor.

Sei also $\mathfrak{U} = \{g \mid |(g, g'_\varrho)| < \varepsilon, \varrho = 1, \ldots, r\}$ eine beliebige schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$. Wir betrachten die fastperiodischen Funktionen (xh, g_ϱ) $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Man kann nun eine fastperiodische Funktion $\delta(x)$ auf $\mathfrak{G}$ bestimmen, derart, daß für jedes $\varrho = 1, \ldots, r$

$$|(xh, g'_\varrho) - M_t\{(xth, g'_\varrho)\,\delta(t)\}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gleichmäßig in $x \in \mathfrak{G}$ gilt (vgl. Maak [36], S. 54 f.). Sei etwa

$$|(xh, g'_\varrho)| < A \qquad (\varrho = 1, \ldots, r;\ x \in \mathfrak{G}).$$

Wir bestimmen endlichviele Charaktere $\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x)$ von $\mathfrak{G}$, sowie komplexe Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ derart, daß

$$\Big|\delta(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \chi_\nu(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

gleichmäßig in $x \in \mathfrak{G}$ gilt. Offenbar ist dann

$$\Big|(xh, g'_\varrho) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu M_t\{(xth, g'_\varrho)\,\chi_\nu(t)\}\Big| < \varepsilon.$$

Setzen wir

$$M_t\{(th, g')\,\chi_\nu(t)\} = (p_\nu, g') \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so ist $p_\nu \in \mathfrak{P}$. Wir haben also (für $x = e$)

$$\Big|\Big(h - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu p_\nu, g'_\varrho\Big)\Big| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, \ldots, r),$$

d. h.

$$h - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu p_\nu \in \mathfrak{U} \qquad \text{q. e. d.}$$

Eine spezielle Klasse ergodischer Funktionen sind die *schwach-fastperiodischen Funktionen* von EBERLEIN ([22], S. 232 ff.). Aus der Arbeit von EBERLEIN entnehmen wir den

Satz IV.1.2. *Ist $h \in \mathfrak{H}$, $g' \in \mathfrak{H}'$, so ist die auf $\mathfrak{G}$ erklärte komplexwertige Funktion*

$$\varphi(x) = (xh, g')$$

schwach-fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ (im Sinne von EBERLEIN *[22], S. 232). Jede schwach-fastperiodische Funktion auf $\mathfrak{G}$ ist ergodisch* ([22], S. 236). *Die schwach-fastperiodischen Funktionen auf $\mathfrak{G}$ bilden einen linearen Raum. Das Produkt zweier schwach-fastperiodischer Funktionen ist wieder eine schwach-fastperiodische Funktion ([22], S. 234).*

Insbesondere sind die Funktionen $\varphi(x) = |(xh, g')|^2$ (mit fest gewählten $h \in \mathfrak{H}$, $g' \in \mathfrak{H}'$) stets ergodisch.

Satz IV.1.3. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $g' \in \mathfrak{H}'$ die (stets ergodische!) Funktion*

$$\varphi(x) = |(xh, g')|^2$$

den Mittelwert 0 besitzt.

Beweis. I. Sei h ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$ und $g' \in \mathfrak{H}'$ beliebig gewählt. Sei α der Mittelwert der Funktion $\varphi(x) = |(xh, g')|^2$. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ bestimmen wir Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$\left| \alpha - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |(xa_\nu h, g')|^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{G} \tag{2}$$

gilt. Wegen $h \in \mathfrak{F}$ können wir $x \in \mathfrak{G}$ so wählen, daß

$$xh \in \mathfrak{U} = \left\{ g \mid |(g, a_\nu' g')| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \nu = 1, \ldots, n \right\} \tag{3}$$

gilt. Aus (2) und (3) folgt $|\alpha| < \varepsilon$. Also ist $\alpha = 0$.

II. Sei $h \in \mathfrak{H}$ so beschaffen, daß für beliebiges $g' \in \mathfrak{H}'$

$$M_x\{|(xh, g')|^2\} = 0$$

gilt. Sei $\mathfrak{U} = \{g \mid |(g, g_\varrho')| < \sqrt{\varepsilon}, \ \varrho = 1, \ldots, r\}$ eine schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$. Die Funktion $\sum_{\varrho=1}^{n} |(xh, g_\varrho')|^2$ ist offenbar ergodisch mit dem Mittelwert 0. Wir wählen dementsprechend $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{r} |(xa_\nu h, g_\varrho')|^2 < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{G}$$

gilt. Wir setzen $x = e$. Es ergibt sich, daß für mindestens ein ν

$$\sum_{\varrho=1}^{r} |(a_\nu h, g_\varrho')|^2 < \varepsilon$$

sein muß. Daraus folgt unmittelbar $a_\nu h \in \mathfrak{U}$. Also ist $0 \in \mathfrak{G}(h)$, d. h. h ist ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$.

§2. Beweis des Aufspaltungssatzes I für Gruppen

In diesem Paragraphen soll der Aufspaltungssatz I unter Zugrundelegung der Annahmen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, also für beschränkte abelsche Gruppen in reflexiven Banachräumen, bewiesen werden. Der Aufspaltungssatz II wird dabei nicht benützt. Jedoch machen wir von einigen anderen früher bewiesenen Sätzen Gebrauch.

Satz IV.2.1. *a) $\mathfrak{P}$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{P}'$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}'$.*

b) $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, $\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{F}' = \{0'\}$.

c) Ist $p \in \mathfrak{P}$, $f' \in \mathfrak{F}'$ $p' \in \mathfrak{P}'$, $f \in \mathfrak{F}$, so gilt

$$(p, f') = 0 \qquad (f, p') = 0.$$

Beweis. a) Siehe Satz II.1.1.

b) Siehe Satz II.2.1.

c) Nach Satz III.2.1 ist jeder fastperiodische Vektor reversibel, aus Satz III.4.1 folgt dann die Behauptung.

Aus der EBERLEINschen Theorie der schwach-fastperiodischen Funktionen übernehmen wir den

Satz IV.2.2. *Sind f, g Vektoren aus $\mathfrak{H}$, h', k' Vektoren aus $\mathfrak{H}'$, so ist die Funktion*

$$\varphi(x) = M_t\{(xtf, h')\,\overline{(tg, k')}\} \tag{4}$$

(der Mittelwert existiert stets nach Satz IV.1.2) fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ (im Sinne von v. NEUMANN-MAAK, *vgl.* MAAK [36], *S. 26, 152)* (EBERLEIN [22], S. 237).

Es gilt nun der

Satz IV.2.3. *Ist $h \in \mathfrak{H}$, $h \notin \mathfrak{F}$, so gibt es einen Vektor $p' \in \mathfrak{P}'$ mit $(h, p') \neq 0$. Ist $h' \in \mathfrak{H}'$, $h' \notin \mathfrak{F}'$, so gibt es einen Vektor $p \in \mathfrak{P}$ mit $(p, h') \neq 0$.*

Beweis. Sei $h \in \mathfrak{H}$, $h \notin \mathfrak{F}$. Nach Satz IV.1.3 gibt es dann einen Vektor $g' \in \mathfrak{H}'$ derart, daß

$$M_t\{|(th, g')|^2\} \neq 0$$

gilt. Wir betrachten für beliebiges $f \in \mathfrak{H}$ den Ausdruck

$$M_t\{(tf, g')\,\overline{(th, g')}\} = M(f).$$

Offenbar ist $M(f)$ eine stetige Linearform auf $\mathfrak{H}$. Es gibt also einen Vektor $p' \in \mathfrak{H}'$ derart, daß stets

$$M(f) = (f, p')$$

gilt. Wir betrachten für beliebig gewähltes $f \in \mathfrak{H}$ die auf $\mathfrak{G}'$ definierte komplexwertige Funktion

$$\varphi(x') = (f, x'p') = (xf, p') = M_t\{(xtf, g')\,\overline{(th, g')}\}.$$

Dieser Ausdruck ist nach Satz IV.2.2 fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$; daraus folgt, daß $\varphi(x')$ fastperiodisch auf $\mathfrak{G}'$ ist. Wenden wir Satz IV.1.1 auf $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}'$

an, so folgt, daß $p' \in \mathfrak{P}'$ gilt. Es ist aber

$$(h, p') = M(h) = M_t\{|(th, g')|^2\} \neq 0.$$

Ganz analog beweist man die duale Aussage.

Nun führen wir den *Beweis des Aufspaltungssatzes I für Gruppen.*

1. $\mathfrak{F}$ *ist die Menge aller Vektoren* $f \in \mathfrak{H}$, *welche*

$$(f, p') = 0 \quad \textit{für jedes} \quad p' \in \mathfrak{P}' \tag{5}$$

erfüllen. — Daß alle Vektoren $f \in \mathfrak{F}$ die Bedingung erfüllen, wissen wir schon (Satz IV.2.1). Nach Satz IV.2.3 kann ein Vektor $h \notin \mathfrak{F}$ die Bedingung (5) nicht erfüllen. Ein (5) erfüllender Vektor liegt also stets in $\mathfrak{F}$.

2. $\mathfrak{F}'$ *ist die Menge aller Vektoren* $f' \in \mathfrak{H}'$, *welche*

$$(p, f') = 0 \quad \text{für jedes} \quad p \in \mathfrak{P} \tag{6}$$

erfüllen. — Beweis analog wie Nr. 1.

3. Wir haben nunmehr: $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{F}$ *sind invariante Teilräume von* $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{P}'$ *und* $\mathfrak{F}'$ *sind invariante Teilräume von* $\mathfrak{H}'$. — Für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ wissen wir dies bereits (Satz IV.2.1). Hieraus folgt mit Hilfe von Nr. 1 und 2 dieselbe Aussage für $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}$ (vgl. den Beweis von Satz III.4.2).

4. $\mathfrak{P}$ *ist die Menge aller Vektoren* $p \in \mathfrak{H}$, *welche*

$$(p, f') = 0 \quad \textit{für jedes} \quad f' \in \mathfrak{F}'$$

erfüllen. — Hierzu zeigt man zunächst mit Hilfe von Satz I.1 (MAZUR): Ist $h \in \mathfrak{H}$, $h \notin \mathfrak{P}$, so gibt es einen Vektor $f' \in \mathfrak{H}'$ derart, daß

$$(p, f') = 0 \quad \text{für alle} \quad p \in \mathfrak{P}, \tag{7}$$

aber

$$(h, f') \neq 0$$

gilt (vgl. BANACH [4], S. 57). Aus (7) folgt nach Nr. 2, daß $f' \in \mathfrak{F}'$ ist. Wenn

$$(p, f') = 0 \quad \text{für alle} \quad f' \in \mathfrak{F}'$$

gilt, so muß $p \in \mathfrak{P}$ sein. Dies ergibt mit Satz IV.2.1 zusammen die Behauptung.

5. $\mathfrak{P}'$ *ist die Menge aller Vektoren* $p' \in \mathfrak{H}'$, *welche*

$$(f, p') = 0 \quad \textit{für jedes} \quad f \in \mathfrak{F}$$

erfüllen. — Beweis analog wie Nr. 4.

6. $\mathfrak{H}$ *ist die lineare stark-abgeschlossene Hülle der Teilräume* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{F}$. — Denn es sei $\mathfrak{H}_0$ die lineare stark-abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$. Angenommen, $\mathfrak{H}_0$ ist ein echter Teilraum von $\mathfrak{H}$. Aus Satz I.1 (MAZUR) folgert man dann leicht: Es gibt einen von $0' \in \mathfrak{H}'$ verschiedenen Vektor $h' \in \mathfrak{H}'$, welcher

$$(g, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad g \in \mathfrak{H}_0$$

erfüllt. Insbesondere gilt

$$(p, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad p \in \mathfrak{P},$$

also ist $h' \in \mathfrak{F}'$ nach Nr. 2. Es gilt ebenso

$$(f, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad f \in \mathfrak{F},$$

also ist $h' \in \mathfrak{P}'$ nach Nr. 5. Es ist somit $h' \in \mathfrak{P}' \cap \mathfrak{F}' = \{0'\}$ (Satz IV.2.1), also $h' = 0'$. Widerspruch. Somit ist $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$.

7. *Ist* $h = p + f$, $p \in \mathfrak{P}$, $f \in \mathfrak{F}$, *so gilt* $|f| \leq (1 + \Gamma^2)|h|$. — Zunächst folgt aus der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$, daß

$$|xg| \geq \frac{1}{\Gamma}|g| \tag{8}$$

für beliebiges $g \in \mathfrak{H}$ und beliebiges $x \in \mathfrak{G}$ gilt (man setze $g = x^{-1}h$ mit passendem $h \in \mathfrak{H}$). Nun sei x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine Folge aus $\mathfrak{G}$, für welche

$$x_\nu f \to 0 \quad \text{(schwach)}$$

gilt; wegen $f \in \mathfrak{F}$ kann man nach dem Abzählbarkeitssatz I.5 stets eine solche Folge finden. Wegen der Totalbeschränktheit der Bahn $\mathfrak{G}p$ können wir gleich annehmen (Teilfolge!), daß die Folge $x_\nu p$ stark konvergiert; es sei etwa

$$x_\nu p \to p_0 \quad \text{(stark)}.$$

Dann ist $x_\nu h \to p_0$ (schwach), also gewiß $|p_0| \leq \Gamma|h|$. Aus (8) folgt

$$|p_0| \geq \frac{1}{\Gamma}|p|.$$

Wir haben nun

$$|p| \leq \Gamma|p_0| \leq \Gamma^2|h|.$$

Daraus folgt

$$|f| \leq |h| + |p| \leq (1 + \Gamma^2)|h|.$$

8. *Jeder Vektor* $h \in \mathfrak{H}$ *besitzt eine Darstellung*

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}. \tag{9}$$

Denn es sei $h \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt. Nach Nr. 6 gibt es in $\mathfrak{P} + \mathfrak{F}$ eine Folge h_ν $(\nu = 1, \ldots)$ mit

$$h_\nu \to h \quad \text{(stark)}. \tag{10}$$

Die Folge h_ν ist jedenfalls beschränkt. Sei etwa

$$|h_\nu| \leq A \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Ferner sei

$$h_\nu = p_\nu + f_\nu, \quad p_\nu \in \mathfrak{P}, \quad f_\nu \in \mathfrak{F} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Dann gilt nach Nr. 7 und (11)

$$|f_\nu| \leq (1 + \Gamma^2) A.$$

Nach Satz I.7 können wir annehmen (Teilfolge!), daß die Folge f_ν schwach konvergiert. Sei etwa

$$f_\nu \to f \quad \text{(schwach)}. \tag{12}$$

Nach Nr. 1 und Satz I.1 ist dann $f \in \mathfrak{F}$. Aus (10) und (12) folgt, daß auch die Folge p_ν schwach konvergiert. Sei etwa

$$p_\nu \to p \quad \text{(schwach)}. \tag{13}$$

Nach Satz IV.2.1 und Satz I.1 ist dann $p \in \mathfrak{P}$. Aus (12) und (13) folgt (9).

9. Aus Nr. 3 und aus $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$ folgt, *daß die Zerlegung* (9) *stets eindeutig durch h bestimmt ist* (vgl. Nr. 1 des Beweises für den Aufspaltungssatz II in Kap. III § 4), ferner, *daß die Komponenten p, f linear und invariant von h abhängen*. Aus Nr. 7 folgt, *daß die Komponenten p, f stetig von h abhängen*.

Damit ist der Aufspaltungssatz I vollständig bewiesen.

Anmerkung. Der in Nr. 6 verwendete Beweisgedanke ist von LORCH zum Beweis des Fixpunktsatzes verwendet worden (LORCH [35]; RIESZ-NAGY [54], S. 400).

Anmerkung. Man zeigt leicht: $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält eine Projektion $\bar{t}$ des Raumes $\mathfrak{H}$ auf den Teilraum $\mathfrak{P}$, derart, daß $\bar{t}h$ für jedes $h \in \mathfrak{H}$ gleich der fastperiodischen Komponente (im Sinne des Aufspaltungssatzes I) von h ist. Es gilt also $\bar{t}^2 = \bar{t}$. Die duale Transformation $\bar{t}'$ leistet dieselben Dienste in bezug auf $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}'$. Ferner existiert eine mit allen Transformationen aus $\mathfrak{G}$ vertauschbare Projektion F des Raumes $\mathfrak{H}$ auf den Teilraum $\mathfrak{F}$: Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist Fh die Fluchtkomponente von h (im Sinne des Aufspaltungssatzes I); $F^2 = F$. F besitzt die Schranke $\Gamma + 1$. Die duale Transformation F' leistet dieselben Dienste in bezug auf $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}'$.

Anmerkung. Nach Nr. 8 und nach den Sätzen IV.1.1 und IV.1.2 ist für beliebige $h \in \mathfrak{H}$, $g' \in \mathfrak{H}'$ die Funktion $\varphi(x) = (xh, g')$ ω-fastperiodisch im Sinne von MAAK [39].

Anhang I. Verallgemeinerung auf reflexive lokalkonvexe topologische Vektorräume

Die in Kap. I–IV entwickelten Methoden lassen sich verallgemeinern. Man kann den Aufspaltungssatz I auch für *gleichmäßig-stetige abelsche Halbgruppen in reflexiven lokalkonvexen topologischen Vektorräumen* $\mathfrak{H}$ beweisen. Die hierzu nötigen Überlegungen sollen kurz skizziert werden.

Es sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum (HYERS [26]; BOURBAKI [10], S. 57). Die in $\mathfrak{H}$ vorgegebene Topologie heiße die starke Topologie in $\mathfrak{H}$. Wir setzen $\mathfrak{H}$ stets als separiert voraus (BOURBAKI [10], S. 3).

Eine Menge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ heißt *beschränkt* in $\mathfrak{H}$, wenn es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von $0 \in \mathfrak{H}$ eine reelle Zahl $\alpha > 0$ gibt, für welche

$$\alpha \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}$$

gilt.

Der duale Raum $\mathfrak{H}' = \{h', g', f', \ldots\}$ von $\mathfrak{H}$ besteht aus allen stetigen Linearformen auf $\mathfrak{H}$. Wir benützen wieder die im Kap. I eingeführten Bezeichnungen. Eine *Basis der „starken" Topologie in* $\mathfrak{H}'$ an der Stelle $0' \in \mathfrak{H}'$ wird durch die sämtlichen Mengen der Gestalt

$$\mathfrak{U}' = \{h' \mid |(g, h')| \leq 1, \quad g \in \mathfrak{B}\}$$

gebildet, wobei $\mathfrak{B}$ eine beliebige beschränkte Menge in $\mathfrak{H}$ ist. Man bildet analog wie vorhin den Begriff „beschränkte Menge in $\mathfrak{H}'$".

Der Raum $\mathfrak{H}'$ ist nun ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum geworden. Wir können zum Raum $\mathfrak{H}'$ wieder den dualen Raum $\mathfrak{H}''$ bilden. Der Raum $\mathfrak{H}$ kann stets auf eindeutige Weise in den Raum $\mathfrak{H}''$ eingebettet, d. h. jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ kann als stetige Linearform auf dem Raum $\mathfrak{H}'$ aufgefaßt werden. Die von $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ nach der obigen Vorschrift induzierte „starke" Topologie ist jedoch im allgemeinen von der in $\mathfrak{H}$ ursprünglich gegebenen starken Topologie verschieden.

Der Raum $\mathfrak{H}$ heißt *semi-reflexiv*, wenn bei der obigen Einbettung $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}''$ gilt, d. h. wenn jede stetige Linearform auf $\mathfrak{H}'$ durch einen Vektor $h \in \mathfrak{H}$ repräsentiert werden kann. Ist außerdem die von $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ induzierte „starke" Topologie gleich der ursprünglichen in $\mathfrak{H}$ vorgegebenen starken Topologie, so heißt $\mathfrak{H}$ *reflexiv*. Mit $\mathfrak{H}$ ist auch $\mathfrak{H}'$ reflexiv.

Besonders angenehme Dualitätseigenschaften haben die $(\mathfrak{F})$- und $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$-Räume (vgl. DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [*16*]) und ihre dualen Räume. Beispielsweise ist der Raum der SCHWARTZschen Distributionen der duale Raum eines reflexiven $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$-Raumes (SCHWARTZ [*55*], S. 24; DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [*16*], S. 75). Die gestuften Räume von KÖTHE [*33*] sind spezielle $(\mathfrak{F})$-Räume (DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [*16*], S. 65 f.).

Nun machen wir die

Annahme $\mathfrak{A}^*$. *$\mathfrak{H}$ ist ein reflexiver lokalkonvexer topologischer Vektorraum.*

Wir betrachten in $\mathfrak{H}$ die von $\mathfrak{H}'$ induzierte schwache Topologie, und in $\mathfrak{H}'$ die von $\mathfrak{H}$ induzierte schwache Topologie. Es gilt sowohl in $\mathfrak{H}$ wie in $\mathfrak{H}'$ der Satz I.1 (vgl. BOURBAKI [*10*], S. 73).

Ferner gilt: Jede beschränkte schwach-abgeschlossene Menge in $\mathfrak{H}$ ist schwach-kompakt (im Sinne von BOURBAKI [*9*], S. 45); eine Menge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn für jede beschränkte Menge $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{H}'$ die Zahlenmenge $\{(g, g') \mid g \in \mathfrak{B}, g' \in \mathfrak{B}'\}$ beschränkt ist. Dasselbe gilt für den ebenfalls reflexiven Raum $\mathfrak{H}'$. Man kann nun die Sätze I.3 und I.4 für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ beweisen. In $(\mathfrak{F})$- bzw. $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$-Räumen gilt überdies der Abzählbarkeitssatz I.5 ([*16*], S. 88).

In $\mathfrak{H}$ wirke eine abelsche Halbgruppe $\mathfrak{G}$ von stetigen linearen Transformationen $x, y, \ldots$. An die Stelle der Annahme $\mathfrak{B}$ tritt nun die

Annahme $\mathfrak{B}^*$. *Ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ eine beschränkte Menge, so ist auch $\mathfrak{G}\mathfrak{B}$ eine beschränkte Menge in $\mathfrak{H}$.*

Diese Annahme ist dann und nur dann erfüllt, wenn $\mathfrak{G}$ *gleichmäßig-stetig* ist, d. h. wenn es zu jeder 0-Umgebung $\mathfrak{U}$ eine 0-Umgebung $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{G}\,\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}$ gibt.

Gilt die Annahme $\mathfrak{B}^*$ für $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$, so gilt sie von selbst auch für die duale Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{H}'$.

Man kann nun die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ bilden und zeigen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ eine abelsche Halbgruppe ist, für welche wieder die Annahme $\mathfrak{B}^*$ gilt. Genau so bildet man $\overline{\mathfrak{G}}'$ in $\mathfrak{H}'$. $\overline{\mathfrak{G}}'$ ist die zu $\overline{\mathfrak{G}}$ duale Halbgruppe.

Die Definitionen III.2 bzw. II.2 der reversiblen bzw. der Fluchtvektoren können wörtlich auf unseren Fall übertragen werden. Der Aufspaltungssatz II läßt sich nun ohne Schwierigkeit beweisen (der in Kap. III § 3 angegebene Beweis des Fixpunktsatzes läßt sich ebenfalls übertragen; man beschreibt zu diesem Zweck die starke Topologie in $\mathfrak{H}$ zweckmäßig durch ein System von Seminormen und nützt aus, daß $\mathfrak{G}$ in bezug auf jede dieser Seminormen eine Schranke besitzt (vgl. z. B. HYERS [26]). Wir arbeiten nun weiterhin unter der *Annahme, daß* $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ *ist, daß also* $\mathfrak{H}$ *keine Fluchtvektoren unter* $\mathfrak{G}$ *enthält.* $\overline{\mathfrak{G}}$ *ist dann eine Gruppe.* Wir können annehmen, daß $\mathfrak{G}$ eine Gruppe sei.

Zur Definition der fastperiodischen Vektoren verwendet man jetzt zweckmäßig die Aussage des Satzes IV.1.1: Ein Vektor $p \in \mathfrak{H}$ heißt fastperiodisch unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $g' \in \mathfrak{H}'$ die auf $\mathfrak{G}$ erklärte komplexwertige Funktion

$$\varphi(x) = (xp, g')$$

fastperiodisch ist. — Man kann dann genau so, wie dies im Beweis des Satzes IV.1.1 geschehen ist, zeigen, daß der Raum $\mathfrak{P}$ der unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren in eindimensionale invariante Teilräume zerfällt (vgl. MAAK [37]). Ferner sieht man, daß die Funktionen der Gestalt

$$\psi(x) = (xh, g')$$

(mit fest gewählten $h \in \mathfrak{H}$, $g' \in \mathfrak{H}'$) schwach-fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ (im Sinne von EBERLEIN [22], S. 232) sind.

Der Beweis für die Tatsache, daß jeder reversible Vektor fastperiodisch ist, bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr. Man braucht zu diesem Zweck den in Kap. IV § 2 angegebenen Beweis des Aufspaltungssatzes I für Gruppen lediglich bis zur Nr. 6 zu verfolgen.

Anhang II. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen

Die Sätze aus Kap. II § 1 gelten für beliebige beschränkte Halbgruppen $\mathfrak{G}$ in beliebigen komplexen Banachräumen $\mathfrak{H}$. Durch Spezialisierung kann man daraus die Hauptergebnisse der von MAAK entwickelten Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen (MAAK [38]) neu gewinnen.

Es sei $\mathfrak{G}_0 = \{\xi, \eta, \ldots\}$ eine beliebige *abstrakte* Halbgruppe; sie enthalte ein Einselement ε. Es sei $\mathfrak{H}$ die Menge aller komplexwertigen, im Sinne von MAAK [38] fastperiodischen Funktionen $f(\xi)$ auf $\mathfrak{G}_0$. $\mathfrak{H}$ ist ein komplexer linearer Raum. Die Funktionen $f \in \mathfrak{H}$ sind beschränkt auf $\mathfrak{G}_0$; führt man in $\mathfrak{H}$ die Norm

$$|f| = \sup_{\xi} |f(\xi)|$$

ein, so ist $\mathfrak{H}$ ein komplexer Banachraum (MAAK [38], S. 37).

Jedem Element $\xi \in \mathfrak{G}_0$ ordnen wir eine lineare Transformation $x = T_\xi$ in $\mathfrak{H}$ zu durch die Vorschrift: Für jedes $f \in \mathfrak{H}$ sei

$$(xf)(\eta) = (T_\xi f)(\eta) = f(\eta\xi) \quad \text{für alle} \quad \eta \in \mathfrak{G}_0.$$

Durchläuft ξ die Halbgruppe $\mathfrak{G}_0$, so durchläuft $T_\xi = x$ eine zu $\mathfrak{G}_0$ homomorphe Halbgruppe $\mathfrak{G}$ von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$. Dem Einselement $\varepsilon \in \mathfrak{G}_0$ entspricht dabei die Identität e in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{G}$ besitzt die Schranke 1 in $\mathfrak{H}$. Man sieht leicht ein: Jeder Vektor $f \in \mathfrak{H}$ ist fastperiodisch unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ (im Sinne der Definition II.1).

Ein spezielles Element des dualen Raumes $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ ist das *„Dirac-Funktional" d'*, welches durch die Vorschrift

$$(f, d') = f(\varepsilon) \quad \text{für jedes} \quad f \in \mathfrak{H}$$

gekennzeichnet ist. Offensichtlich gilt für jedes $f \in \mathfrak{H}$

$$(T_\xi f, d') = f(\xi).$$

Die komplexwertigen Funktionen der Gestalt

$$f(x) = (xf, d') \tag{1}$$

sind fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$. Nach dem Einbettungssatz II.1.6 gibt es eine $\mathfrak{G}$ enthaltende *Gruppe* $\overline{\mathfrak{G}} = \{\bar{x}, \ldots\}$ von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$, derart, daß jeder Vektor $f \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist. Die Funktionen der Gestalt

$$f(\bar{x}) = (\bar{x}f, d')$$

sind komplexwertige fastperiodische Funktionen auf $\overline{\mathfrak{G}}$ (im Sinne von v. NEUMANN-MAAK, vgl. MAAK [*36*], S. 26, 152), welche die auf $\mathfrak{G}$ definierten Funktionen (1) auf $\overline{\mathfrak{G}}$ fortsetzen. Aus dem Approximationssatz für fastperiodische Funktionen auf Gruppen (vgl. MAAK [*36*], S. 126) folgt dann der Approximationssatz für fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen (MAAK [*38*], S. 56).

Anhang III. Kontraktionen im Hilbertschen Raum

Wir betrachten den Spezialfall, daß $\mathfrak{H}$ ein *Hilbertraum* ist, und daß die Halbgruppe $\mathfrak{G}$ die Schranke 1 besitzt, d. h. nur aus *„Kontraktionen"* besteht. Es ist lediglich eine geringfügige Modifikation unserer bisherigen Bezeichnungen nötig, um zu erreichen, daß der Ausdruck (h, g') alle üblichen Eigenschaften des Skalarprodukts im Hilbertraum besitzt. Hier können wir den dualen Raum $\mathfrak{H}'$ bekanntlich mit $\mathfrak{H}$ identifizieren (SZ.-NAGY [*41*], S. 9; HALMOS [*24*], S. 32), so daß die Halbgruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ beide im Raum $\mathfrak{H}$ wirken und die Räume $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{F}'$ sämtlich Teilräume von $\mathfrak{H}$ sind.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß $\mathfrak{G}$ eine zyklische Halbgruppe $\{e, x, x^2, x^3, \ldots\}$ ist, hat SZ.-NAGY einen Satz bewiesen, der sich in diesem Falle zum Beweis des Aufspaltungssatzes verwenden läßt:

Es sei x' die zu x adjungierte (= duale) Transformation in $\mathfrak{H}$. Man kann den Hilbertraum $\mathfrak{H}$ in einen anderen Hilbertraum $\mathfrak{H}_0$ einbetten und in $\mathfrak{H}_0$ eine

unitäre Transformation X_0 finden, derart, daß folgendes gilt: Ist P die orthogonale Projektion von $\mathfrak{H}_0$ auf den Teilraum $\mathfrak{H}$, so gilt

$$x^n = PX_0^n, \quad x'^n = PX_0^{-n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(SZ.-NAGY [42], [43]).

Um den Aufspaltungssatz I für die zyklische Halbgruppe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ zu beweisen, kann man nun folgendermaßen vorgehen:

Es sei $\mathfrak{G}_0 = \{X_0^n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ die von X_0 erzeugte *unitäre Gruppe* in $\mathfrak{H}_0$. Sei $\mathfrak{G}_0^+ = \{X_0^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathfrak{G}_0^- = \{X_0^n \mid n = 0, -1, -2, \ldots\}$. Es ist also $P\mathfrak{G}_0^+ = \mathfrak{G}$, $P\mathfrak{G}_0^- = \mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{H}$. Für unitäre Gruppen im Hilbertraum kann man den Aufspaltungssatz I sehr einfach beweisen (MAAK [40], JACOBS [28]). Sei $\mathfrak{P}_0$ der Raum der unter $\mathfrak{G}_0$ fastperiodischen Vektoren in $\mathfrak{H}_0$, sei $\mathfrak{F}_0$ der Raum der Fluchtvektoren bezüglich $\mathfrak{G}_0$ in $\mathfrak{H}_0$. Aus der Unitarität von $\mathfrak{G}_0$ ergibt sich

1. $\mathfrak{G}_0' = \mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{P}_0' = \mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{F}_0' = \mathfrak{F}_0$.

$\mathfrak{P}_0$ ist das orthogonale Komplement von $\mathfrak{F}_0$ in $\mathfrak{H}_0$ und umgekehrt (MAAK [40], JACOBS [28]).

2. $\mathfrak{P}_0$ ist der Raum aller unter $\mathfrak{G}_0^+$ fastperiodischen Vektoren in $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{F}_0$ ist der Raum aller Fluchtvektoren bezüglich $\mathfrak{G}_0^+$ in $\mathfrak{H}_0$. $\mathfrak{P}_0$ ist zugleich der Raum aller unter $\mathfrak{G}_0^-$ fastperiodischen Vektoren, $\mathfrak{F}_0$ der Raum aller Fluchtvektoren bezüglich $\mathfrak{G}_0^-$ in $\mathfrak{H}_0$.

3. $\mathfrak{P} = P\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}'$, $\mathfrak{F} = P\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}'$.

$\mathfrak{P}$ ist das orthogonale Komplement von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{H}$ und umgekehrt. Damit ist der Aufspaltungssatz I für $\mathfrak{G}$ (und zugleich für $\mathfrak{G}'$) in $\mathfrak{H}$ in verschärfter Form bewiesen.

Man kann umgekehrt mit Hilfe des Aufspaltungssatzes I, und ohne den Satz von SZ.-NAGY zu benützen, für *beliebige kontrahierende abelsche Halbgruppen im Hilbertraum* zu denselben Verschärfungen gelangen und zusätzlich eine *Unitaritätsaussage* gewinnen, die allerdings von anderer Art als der Satz von SZ.-NAGY ist. Zuvor sei bemerkt, daß in unserem Falle der Aufspaltungssatz I sehr einfach mittels Satz II.5.2 aus dem Aufspaltungssatz II gewinnen läßt. Es gilt nun der

Satz. *Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum und $\mathfrak{G}$ eine abelsche Halbgruppe in $\mathfrak{H}$ mit der Schranke 1. Dann gilt die Aufspaltungsaussage, und es gilt ferner:*

1. $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$.

2. *$\mathfrak{F}$ ist das orthogonale Komplement von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ ist das orthogonale Komplement von $\mathfrak{F}$.*

3. *$\mathfrak{G}$ induziert in $\mathfrak{P}$ eine unitäre Halbgruppe.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Aussage Nr. 3. Die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ induziert in $\mathfrak{P}$ eine abelsche Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_0$ mit der Schranke 1 (Satz III.5.1). Aus der Gruppeneigenschaft von $\overline{\mathfrak{G}}_0$ folgt ohne weiteres: $\overline{\mathfrak{G}}_0$ transformiert $\mathfrak{P}$ isometrisch, d. h. es gilt

$$|\bar{x}p| = |p| \quad \text{für jedes} \quad \bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}} \quad \text{und jedes} \quad p \in \mathfrak{P}.$$

Daraus folgt: $\overline{\mathfrak{G}}$ wirkt in $\mathfrak{P}$ unitär (HALMOS [24], S. 43), also induziert auch $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$ eine unitäre Halbgruppe.

Nun beweisen wir die Aussage Nr. 1. Zunächst zeigen wir, daß der Teilraum $\mathfrak{P}$ unter $\overline{\mathfrak{G}}'$ invariant ist. Sei $p \in \mathfrak{P}$ und $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ beliebig. Wir können $|p| = 1$ annehmen. Jedenfalls ist $|\bar{x}'p| \leq 1$. Es gibt wegen der Unitarität von $\bar{x}$ in $\mathfrak{P}$ ein $g_0 \in \mathfrak{P}$ mit $p = \bar{x} q_0$. Dabei ist $|q_0| = 1$ und es gilt

$$(\bar{x}'p, q_0) = (p, \bar{x} q_0) = (p, p) = 1 .$$

Wäre $\bar{x}'p \notin \mathfrak{P}$, so würde aus $|\bar{x}'p| \leq 1$ folgen, daß $|(\bar{x}'p, q)| < 1$ für jedes $q \in \mathfrak{P}$ mit $|q| \leq 1$ gilt. Somit ist $\bar{x}'p \in \mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}$ ist also invariant unter $\overline{\mathfrak{G}}'$. Es folgt sofort: $\overline{\mathfrak{G}}'$ induziert in $\mathfrak{P}$ eine unitäre Gruppe, und zwar dieselbe wie $\overline{\mathfrak{G}}$: $\bar{x}' \in \overline{\mathfrak{G}}'$ wirkt in $\mathfrak{P}$ invers zu $\bar{x} \in \mathfrak{G}$. Somit sind alle Vektoren $p \in \mathfrak{P}$ auch unter $\mathfrak{G}'$ fastperiodisch: $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$. Aus Symmetriegründen folgt: $\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P}$, also ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$. Hieraus folgt $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ (vgl. Nr. 1 und Nr. 2 des Beweises für den Aufspaltungssatz I in Kap. IV § 2) und die Aussage Nr. 2 unseres Satzes. q. e. d.

Literatur

[1] ALAOGLU and G. BIRKHOFF: General ergodic theorems. Ann. of Math. **41**, 293—309 (1940). — [2] ALEXANDROFF-HOPF: Topologie I. Berlin 1935. — [3] ARENS, R.: Duality in linear spaces. Duke Math. J. **14**, 787—794 (1947). — [4] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [5] BIRKHOFF, G.: The mean ergodic theorem. Duke Math. J. **5**, 19—20 (1939). — [6] BIRKHOFF, G.: An ergodic theorem for general semigroups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **25**, 625—627 (1939). — [7] BIRKHOFF, G.: Lattice theory, 2. Aufl. New York 1948. — [8] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles (fascicule des résultats). Paris 1939. — [9] BOURBAKI, N.: Topologie generale (fascicule des résultats). Paris 1953. — [10] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Paris 1953. — [11] CLARKSON, J. A.: Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 393—414 (1936). — [12] DAY, M. M.: Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 313—317 (1941). — [13] DAY, M. M.: Ergodic theorems for abelian semi-groups, Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 399—412 (1942). — [14] DAY, M. M.: Uniform convexity in factor and conjugate spaces. Ann. of Math. **45**, 375—385 (1944). — [15] DAY, M. M.: Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semi-groups. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 276—291 (1950). — [16] DIEUDONNÉ, J., et L. SCHWARTZ: La dualité dans les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$. Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101 (1949). — [17] DOOB: Stochastic processes. New York 1953. — [18] DUNFORD, N.: A mean ergodic theorem. Duke Math. J. **5**, 635—646 (1939). — [19] DUNFORD, N.: Spectral theory I. Convergence to projections. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 185—217 (1943). — [20] DUNFORD, N., and S. MILLER: On the ergodic theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **60**, 538—549 (1946). — [21] EBERLEIN, W. F.: Weak compactness in Banach spaces I. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **33**, 51—53 (1947). — [22] EBERLEIN, W. F.: Abstract ergodic theorems and weakly almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 217—240 (1949). — [23] GODEMENT, R.: Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 1—84 (1948). — [24] HALMOS, P. R.: Introduction to Hilbert space. New York 1951. — [25] HOPF, E.: Ergodentheorie. Berlin 1937. — [26] HYERS, D. H.: Linear topological spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 1—21 (1945). — [27] JACOBS, K.: Ein Ergodensatz für beschränkte Gruppen im HILBERTschen Raum. Math. Ann. **128**, 340—349 (1954). — [28] JACOBS, K.: Periodizitätseigenschaften beschränkter Gruppen im HILBERTschen Raum. Math. Z. **61**, 408—428 (1955). — [29] KAKUTANI, S.: Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets. Proc. Imp. Acad. Jap. Tokyo **1938**, 242—245. — [30] KAKUTANI, S.: Mean ergodic

theorem in abstract L-spaces. Proc. Imp. Acad. Jap. Tokyo **1939**, 121—123. — [*31*] KAKUTANI, S.: Ergodic theory. Proc. Internat. Congr. of Math. 1950, vol. II, S. 128—142. Providence 1952. — [*32*] KAWADA, Y.: Two remarks on H. WEYLS theorems. Kodai Math. Sem. Report **3**, 3—6 (1949). — [*33*] KÖTHE, G.: Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume. Math. Z. **51**, 317—345 (1949). — [*34*] LORCH, E. R.: Means of iterated transformations in reflexive vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 945—947 (1939). — [*35*] LORCH, E. R.: An integral representation of weakly almost periodic transformations in reflexive vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 18—40 (1941). — [*36*] MAAK, W.: Fastperiodische Funktionen. Berlin 1950. — [*37*] MAAK, W.: Fastperiodische invariante Vektormoduln in einem metrischen Vektorraum. Math. Ann. **122**, 157—166 (1950). — [*38*] MAAK, W.: Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Acta Math. **87**, 33—57 (1952). — [*39*] MAAK, W.: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. reine u. angew. Math. **190**, 34—48 (1952). — [*40*] MAAK, W.: Periodizitätseigenschaften unitärer Gruppen. Math. Scand. **2**, 334—344 (1954). — [*41*] SZ.-NAGY, B.: Spektraldarstellungen linearer Transformationen des HILBERTschen Raumes. Berlin 1942. — [*42*] SZ.-NAGY, B.: Sur les contractions de l'espace de HILBERT. Acta Sci. Math. Szeged **15**, 87—92 (1953). — [*43*] SZ.-NAGY, B.: Transformations de l'espace de HILBERT, fonctions de type positif sur un groupe. Acta Sci. Math. Szeged **15**, 104—114 (1954). — [*44*] NAKANO, H.: Modulared linear spaces. J. Fac. Sci. Tokyo **6**, 85—131 (1951). — [*45*] NEUMANN, J. v.: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. Math. Ann. **102**, 370—427 (1929). — [*46*] NEUMANN, J. v.: Proof of the quasi-ergodic hypothesis. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **18**, 70—82 (1932). — [*47*] NEUMANN, J. v.: Almost periodic functions in a group I. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 445—492 (1934). — [*48*] NIKAIDÔ, H.: On a minimax theorem and its applications to functional analysis. J. Math. Soc. Jap. **5**, 86—94 (1953). — [*49*] PETTIS, B. J.: A proof that every uniformly convex space is reflexive. Duke Math. J. **5**, 249—253 (1939). — [*50*] RIESZ, F.: Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. **41**, 71—98 (1918). — [*51*] RIESZ, F.: Some mean ergodic theorems. J. London Math. Soc. **13**, 274—278 (1938). — [*52*] RIESZ, F.: Sur la théorie ergodique des espaces abstraits. Acta Sci. Math. Szeged **10**, 1—20 (1941). — [*53*] RIESZ, F.: Another proof of the mean ergodic theorem. Acta Sci. Math. Szeged **10**, 75—76 (1941). — [*54*] RIESZ, F., u. B. SZ.-NAGY: Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest 1952. — [*55*] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions I/II. Paris 1950/51. — [*56*] WEYL, H.: Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space. Amer. J. Math. **71**, 178—205 (1949). — [*57*] WIENER, N.: The ergodic theorem. Duke Math. J. **5**, 1—18 (1939). — [*58*] YOSIDA, K., und S. KAKUTANI: Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem. Ann. of Math. **42**, 188—228 (1941). — [*59*] DIXMIER, J.: Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications. Acta Sci. Math. Szeged **12**, 213—227 (1950).

Oberwolfach, Mathematisches Forschungsinstitut

(Eingegangen am 5. Juni 1955)

GUNDLACH, K.-B.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 339—352 (1956)

Poincarésche und Eisensteinsche Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe

Von

KARL-BERNHARD GUNDLACH

Einleitung

Bei der Behandlung der Hilbertschen Modulgruppe hat man sich bisher im allgemeinen auf den Bereich beschränkt, in dem die Imaginärteile der Variablen positiv sind. Die Hilbertsche Modulgruppe eines total-reellen algebraischen Zahlkörpers K ist bekanntlich die Gruppe der linear gebrochenen Substitutionen mit Determinante 1 und ganzen Koeffizienten aus diesem Körper. Ordnet man jedem der n zu K konjugierten Körper eine komplexe Variable zu und versteht unter der Anwendung einer Substitution der Gruppe die gleichzeitige Anwendung der n zu den n konjugierten Körpern gehörigen Substitutionen mit konjugierten Koeffizienten jeweils auf die dem betreffenden Körper zugeordnete Variable, so erhält man eine Substitutionsgruppe, die die Vorzeichen der Imaginärteile der Variablen ungeändert läßt. Diese Gruppe stellt in jedem der 2^n Gebiete mit verschiedenen Vorzeichenkombinationen der Imaginärteile der Variablen eine hyperabelsche Transformationsgruppe dar.

Im Falle einer Variablen, also bei der gewöhnlichen Modulgruppe, sind die beiden Gebiete, die obere und die untere Halbebene, vollkommen gleichberechtigt, und man kommt durchweg mit einer Halbebene aus. Für $n > 1$ haben nun aber die Untersuchungen von O. HERRMANN [2][1]) ergeben, daß es in der Tat nicht nur nötig ist, alle 2^n Gebiete gleichzeitig zu betrachten, sondern daß man außer der Hilbertschen Modulgruppe noch eine Reihe von weiteren Gruppen gleichen Typs zu demselben Körper untersuchen muß, die den Idealklassen des Körpers zugeordnet sind. Überdies hat sich herausgestellt, daß die 2^n Gebiete zur Hilbertschen Modulgruppe keineswegs gleichberechtigt sind.

Betrachten wir als Beispiel den Fall eines quadratischen Zahlkörpers mit total-positiver Grundeinheit und Klassenzahl 1. In den beiden Gebieten, in denen die Imaginärteile der beiden Variablen gleiches Vorzeichen haben, kann keine ganze Nichtspitzenform der Dimension -1 existieren, denn Gleichsetzen der beiden Variablen würde eine ganze, nicht verschwindende Form der Dimension -2 zur gewöhnlichen Modulgruppe liefern. In den beiden Gebieten, in denen die Imaginärteile der Variablen verschiedenes Vorzeichen haben, erhält man jedoch mit Hilfe einer Eisensteinreihe explizit eine ganze Nichtspitzenform (§ 5).

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Bei einigen der frühen Untersuchungen zur Hilbertschen Modulgruppe von HECKE (Hamburger Abhandlungen **3**, S. 213) und GÖTZKI (Math. Ann. **100**, S. 411) sowie später in einigen Fällen von MAASS wurden quadratische Zahlkörper bzw. ein spezieller quadratischer Zahlkörper und einer der beiden Bereiche zugrunde gelegt, in denen die Imaginärteile der beiden Variablen verschiedenes Vorzeichen haben. Bei den beiden letzteren trat jedoch die oben erwähnte Auszeichnung dieses Bereiches infolge der Eigenart des speziellen gewählten Körpers nicht in Erscheinung, ganz abgesehen von dem anderen Ziel der betreffenden Untersuchungen. Bei HECKE werden zwar schon Eisensteinreihen der Dimension -1 aufgestellt, jedoch wird durch einen Vorzeichenfehler auf S. 224 unten ein falsches Ergebnis erzielt; überdies werden die anderen Gebiete auch nicht zum Vergleich herangezogen. In den Untersuchungen von KLOOSTERMAN [3] werden zwar Eisensteinreihen der Dimension -1 aufgestellt, jedoch nicht auf lineare Unabhängigkeit untersucht.

Diese Verhältnisse legen es nahe, die Poincaréschen Reihen und Eisensteinreihen zu diesen Gruppen in jedem der 2^n Gebiete zu untersuchen. Die Untersuchung verläuft in vieler Hinsicht ähnlich wie in [1]. Ich verwende hier die gleichen Bezeichnungen wie dort und verweise gelegentlich auf dort durchgeführte Beweise, die ich hier nicht wiederholen will. Es ergibt sich, daß für die Dimensionen $-r \leq -2$ die Verhältnisse bei allen Gruppen und in allen Gebieten die gleichen sind wie bei der Hilbertschen Modulgruppe im Gebiet positiver Imaginärteile der Variablen:

Für die Poincaréschen Reihen gilt der Vollständigkeitssatz, für die Fourierkoeffizienten der ganzen Spitzenformen gelten die in [1] bewiesenen Abschätzungen, und die Eisensteinreihen bilden eine Basis der Normalschar zur Schar der ganzen Spitzenformen in der Schar der ganzen Formen; der Rang dieser Schar ist gleich der Klassenzahl des Körpers[2]). Die Fourierkoeffizienten dieser Reihen werden angegeben.

Für $r = 1$ hat man bisher in keinem Falle auch nur die Hoffnung, Poincarésche Reihen aufstellen zu können; bei den Eisensteinreihen lassen sich nur die Reihen ohne Teilerfremdheitsbedingung aufstellen; Satz 5 § 5 sagt aus, welche dieser Reihen linear unabhängig sind. Die Reihen sind orthogonal zu den ganzen Spitzenformen und stellen zumindest in einigen Fällen eine Basis der Normalschar dar. Es ist bisher nicht zu ersehen, wie man entscheiden soll, ob das immer der Fall ist; jedenfalls ist kein anderes Konstruktionsverfahren für derartige Funktionen bekannt.

§1. Die Gruppen $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ und ihre Bestimmungsstücke

K sei ein total-reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n über dem Körper der rationalen Zahlen. Die n Konjugierten von K werden wie üblich mit $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$ bezeichnet. Jedem Körper $K^{(j)}$ ordnet man nun eine kom-

[2]) Falls die ganzen Nichtspitzenformen nicht trivialerweise verschwinden.

plexe Variable $\tau^{(j)}$ zu, die man der Einfachheit halber als die j-te Konjugierte von τ bezeichnet. Z sei ein Bereich idealer Zahlen zu K wie in [2].

$\mathfrak{c}$ sei ein Ideal aus K, ω eine ideale Zahl aus Z mit $(\omega)=\mathfrak{c}$; $K_{\mathfrak{c}}$ sei die durch ω bestimmte Klasse idealer Zahlen aus Z. Die Gruppen $\Gamma_1(K_{\mathfrak{c}})$ sind dann wie folgt definiert (s. [2] Kap. I):

$$\Gamma_1(K_{\mathfrak{c}})=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \text{ mit } \begin{matrix}\alpha,\delta \text{ aus } K,\ \beta \text{ aus } K_{\mathfrak{c}^{-1}},\ \gamma \text{ aus } K_{\mathfrak{c}}\\ \alpha\delta-\beta\gamma=1.\end{matrix}\right\}$$

Man bildet jetzt

$$\Gamma(1,\mathfrak{c})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix}\Gamma_1(K_{\mathfrak{c}})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \text{ mit } \begin{matrix}a,d \text{ ganz aus } K,\ b\equiv 0 \bmod \mathfrak{c},\ c\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\\ ad-bc=1.\end{matrix}\right\}$$

$\Gamma(1,\mathfrak{c})$ ist also eine Gruppe linear gebrochener Substitutionen mit Koeffizienten aus K und definiert in der üblichen Weise in jedem der 2^n Bereiche $Im(\tau^{(j)})\,(-1)^{l_j}>0$ eine hyperabelsche Substitutionsgruppe vom Typus der Hilbertschen Modulgruppe mit h Spitzen; h ist die Klassenzahl von K.

Wesentlich für die Behandlung dieser Gruppen sind die beiden folgenden Sätze:

Satz 1. *ξ sei eine Zahl aus K und $(\mathfrak{c},\xi)$ gehöre zu der Idealklasse des Ideals $\mathfrak{a}$. Dann gibt es zwei Zahlen γ,δ so, daß $\gamma\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}$, $\delta\equiv 0 \bmod (1)$ ist und $\xi=-\frac{\delta}{\gamma}$ mit $(\gamma\mathfrak{c},\delta)=\mathfrak{a}$ ist. Weiter gilt:*

1. *Es gibt zwei Zahlen α,β mit $(\alpha,\mathfrak{c}^{-1}\beta)=\mathfrak{a}^{-1}$ so, daß*

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

ist.

2. *Ist*

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

so sind in der Spitze $\xi=A^{-1}\infty$ die Multiplikatoren von $\Gamma(1,\mathfrak{c})$ alle Einheiten aus K und die Translationen die Zahlen b aus K mit

$$b\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-2}.$$

Satz 2. *ξ sei eine Zahl aus K, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathfrak{a}$, A seien wie in Satz 1 bestimmt. ξ_1 sei eine weitere, eventuell die gleiche, Zahl aus K. $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1,\mathfrak{b}$ mit $(\mathfrak{c}\gamma_1,\delta_1)=\mathfrak{b}$, $B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}$ seien nach der Vorschrift von Satz 1 bestimmt. Die Matrizen M aus $A\Gamma(1,\mathfrak{c})B^{-1}$ seien mit*

$$M=\begin{pmatrix}h_1 & k\\ m_1 & m_2\end{pmatrix} \tag{1}$$

bezeichnet. Dann gilt:

1. *In* (1) *durchläuft* m_1 *alle Zahlen* $m_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}$.

2. m_2 *durchläuft die Zahlen* $m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, *für die*

$$(m_1 \mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-1}, m_2 \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$$

ist.

3. *Bei festem* m_1 *gibt es ein* χ *aus* K *mit* $(\chi, m_1\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ *so, daß* m_2 *in* (1) *die Restklassen* $\chi j \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2}$ *durchläuft, wobei* j *ein volles Restsystem* $\bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ *unter der Nebenbedingung*

$$(j, m_1 \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}) = 1$$

genau einmal durchläuft. Weiter ist

$$h_1 \equiv \bar{j}\,\varphi \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-2}$$

mit

$$(\varphi\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}, m_1 \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}) = 1.$$

φ *hängt von* m_1, *aber nicht von* m_2 *ab.* $\bar{j}$ *ist durch*

$$j\bar{j} \equiv 1 \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$$

bestimmt.

Beweise. Die Existenz von γ, δ aus Satz 1 ist trivial. Nun ist

$$(\omega\gamma, \delta) = \mathfrak{a}, \quad \delta \text{ aus } K, \quad \omega\gamma \text{ aus } K_{\mathfrak{c}}.$$

Nach Hilfssatz 4 [2] gibt es Zahlen λ, μ mit

$\lambda\delta + \mu\omega\gamma = 1$, λ aus K, μ aus $K_{\mathfrak{c}^{-1}}$, $\lambda \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}^{-1}$, $\mu \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}^{-1}$,

also

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (\alpha, \mathfrak{c}^{-1}\beta) = \mathfrak{a}^{-1}, \quad \alpha, \beta \text{ aus } K,$$

wenn man $\alpha = \lambda$, $\mu\omega = -\beta$ setzt, q.e.d.

Zur Bestimmung der Translationen in $A^{-1}\infty = \xi$ sei

$$T(A, \Gamma(1, \mathfrak{c})) = \left\{\pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

die Gruppe der Translationen von $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ in $A^{-1}\infty = \xi$. Dann ist

$$A^{-1}T(A, \Gamma(1, \mathfrak{c}))\,A = \left\{\pm \begin{pmatrix} 1 + \gamma\delta b & \delta^2 b \\ -\gamma^2 b & 1 - \gamma\delta b \end{pmatrix}\right\}.$$

Notwendig dafür, daß diese Matrizen in $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ liegen, ist

$$\mathfrak{c} \mid \delta^2 b \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}^{-1} \mid \gamma^2 b,$$

also

$$\mathfrak{c} \mid (\delta^2, \mathfrak{c}^2\gamma^2)\, b, \quad \text{d.h.} \quad b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-2}.$$

Diese Bedingung ist aber offenbar auch hinreichend.

Zur Bestimmung der Multiplikatoren berechnet man zunächst die Matrizen

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ m_1^* & m_2^* \end{pmatrix} \quad \text{aus} \quad A\Gamma(1, \mathfrak{c}).$$

Nun ist

$$(\gamma, \delta)\, L = (m_1^*, m_2^*) \quad \text{mit} \quad L \text{ aus } \Gamma(1, \mathfrak{c})$$

gleichbedeutend mit

$$\begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \end{pmatrix} = L' \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L' \text{ aus } \Gamma(1, \mathfrak{c}^{-1})$$

oder

$$\begin{pmatrix} m_1^* \\ \omega^{-1} m_2^* \end{pmatrix} = L^* \begin{pmatrix} \gamma \\ \omega^{-1} \delta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L^* \text{ aus } \Gamma_1(K_{\mathfrak{c}^{-1}}).$$

Das ist aber nach Hilfssatz 14 [2] gleichbedeutend mit

$$(m_1^*, m_2^* \omega^{-1}) = (\gamma, \omega^{-1} \delta),$$

d.h.

$$(m_1^* \omega, m_2^*) = (\omega \gamma, \delta) = \mathfrak{a}.$$

Die zweiten Zeilen aus $A\Gamma(1, \mathfrak{c})$ sind somit genau die Zahlenpaare m_1^*, m_2^* mit

$$(\mathfrak{c} m_1^*, m_2^*) = \mathfrak{a}.$$

Diese zweiten Zeilen können sich um jede Einheit aus K unterscheiden, womit die Multiplikatoren bestimmt sind. Für die ersten Zeilen gilt

$$(k_1, k_2) = (\alpha, \beta)\, L \qquad \text{mit} \quad L \text{ aus } \Gamma(1, \mathfrak{c}),$$

also

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \omega^{-1} k_2 \end{pmatrix} = L^* \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega^{-1} \beta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L^* \text{ aus } \Gamma(K_{\mathfrak{c}^{-1}}),$$

also

$$(k_1, \mathfrak{c}^{-1} k_2) = \mathfrak{a}^{-1}.$$

Zum Beweis von Satz 2 muß man nun $A\Gamma(1, \mathfrak{c})\, B^{-1}$ ausrechnen. Nun ist

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & -\gamma_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ \omega^{-1} m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & -\omega \gamma_1 \\ -\omega^{-1} \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \omega^{-1} \end{pmatrix}.$$

Sei jetzt $(\zeta) = \mathfrak{b}$, dann ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{pmatrix} \zeta^{-1} m_1 \\ \zeta m_2 \omega^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} \delta_1 & -\omega \zeta^{-1} \gamma_1 \\ -\zeta \omega^{-1} \beta_1 & \zeta \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \omega^{-1} \end{pmatrix},$$

Die rechtsstehende Matrix ist jetzt eine ganzzahlige Matrix mit der Determinante 1. Man sieht: m_1, m_2 durchlaufen genau die Zahlenpaare, für die

$$(m_1 \mathfrak{b}^{-1}, m_2 \mathfrak{b} \mathfrak{c}^{-1}) = (m_1^*, m_2^* \mathfrak{c}^{-1}),$$

also

$$(m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{b}^{-1}, m_2 \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$$

ist. Für die ersten Zeilen gilt entsprechend

$$\begin{pmatrix} \zeta^{-1} h_1 \\ \zeta \omega^{-1} k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} \delta_1 & -\omega \zeta^{-1} \gamma_1 \\ -\zeta \omega^{-1} \beta_1 & \zeta \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \omega^{-1} k_2 \end{pmatrix}$$

und daher

$$(h_1 \mathfrak{b}^{-1}, k \mathfrak{b} \mathfrak{c}^{-1}) = \mathfrak{a}^{-1}.$$

Man wählt nun zwei Zahlen η, χ so aus, daß

$$\eta \equiv 0 \bmod (m_1)\mathfrak{c}, \quad (\chi) = \mathfrak{a} \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{g}, \quad (\eta, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{g}) = 1$$

ist. Dann ist

$$(\eta, \chi) = \mathfrak{a} \mathfrak{b}^{-1}.$$

Nun ist also

$$m_2 = j \chi + j_1 \eta \equiv j \chi \bmod (m_1)\mathfrak{c}$$

mit ganzen j, j_1.

Aus

$$(m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{b}^{-1}, m_2 \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$$

schließen wir

$$(j, m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}^{-1}) = 1$$

und umgekehrt.

m_2 liege in einer festen Restklasse $\bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2}$. Da

$$m_2 \equiv j \chi \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2}$$

ist, liegt j in einer festen Restklasse $\bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ und umgekehrt. Durchläuft m_2 also ein volles Restsystem $\bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2}$ unter der Nebenbedingung

$$(m_2 \mathfrak{b}, m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{b}^{-1}) = \mathfrak{a},$$

so durchläuft j ein volles Restsystem $\bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ unter der Nebenbedingung

$$(j, m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}^{-1}) = 1.$$

Um $h_1 \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-2}$ festzulegen, wählt man zwei Zahlen $\varkappa$ und ψ so aus, daß

$$\varkappa \equiv 0 \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, \quad (\psi) = \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b} \mathfrak{g}_1$$

$$(\varkappa, \mathfrak{g}_1) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_1) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{g}_1) = 1$$

ist. Dann ist

$$h_1 = h \psi + h_2 \varkappa \equiv h \psi \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$$

mit ganzen h, h_2. Nun ist

$$m_2 h_1 = 1 + m_1 k \equiv 1 \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1},$$

also

$$1 \equiv (j \chi + j_1 \eta)(h \psi + h_2 \varkappa) \equiv j h \chi \psi \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}.$$

Weiter ist

$$(\chi\psi) = g_1 g, \quad \text{d.h.} \quad (\chi\psi, m_1 c a^{-1} b^{-1}) = 1,$$

also

$$j h \equiv \overline{(\chi\psi)} \bmod (m_1)\, c a^{-1} b^{-1}$$

$$h \equiv \overline{(\chi\psi)}\, j \bmod (m_1)\, c a^{-1} b^{-1},$$

wenn

$$(\chi\psi)\,\overline{(\chi\psi)} \equiv j\bar{j} \equiv 1 \bmod (m_1)\, c a^{-1} b^{-1}$$

ist. Damit ist

$$h_1 \equiv \overline{j(\chi\psi)} \bmod (m_1)\, c a^{-2}.$$

§2. Integrale und Integralabschätzungen

Wir benötigen Abschätzungen bzw. explizite Werte für die folgenden Integrale:

1. $$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x + \frac{\lambda^2 \mu}{m_1^2 x}\right\}}}{x^r |x|^s}\, dx \qquad \mu y > 0.$$

Man setze hierzu in [1] § 5 $|y|$ statt y und $\nu \cdot \operatorname{sign}(\mu)$ statt ν. Dann gelten die dort angegebenen Abschätzungen ohne weitere Veränderung.

2. Analog wie in [1] S. 326 erhält man für $\mu \cdot \operatorname{sign}(y) > 0$

$$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x + \frac{\lambda^2 \mu}{m^2 x}\right\}}}{x^r}\, dx$$

$$= \begin{cases} 2\pi \operatorname{sign}(y)^r e^{-\frac{1}{2}\pi i r} \left\{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{m_1}{\lambda}\right|\right\}^{r-1} J_{r-1}\left(4\pi(\nu\mu)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\lambda}{m_1}\right|\right) & \text{für } \nu \cdot \operatorname{sign}(y) > 0 \\ 0 & \text{für } \nu \cdot \operatorname{sign}(y) < 0. \end{cases}$$

J_{r-1} ist wieder die $(r-1)$-te Besselfunktion.

3. $$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu x}}{x^r |x|^s}\, dx = \operatorname{sign}(y)^r \int_{i|y|-\infty}^{i|y|+\infty} \frac{e^{-2\pi i [\nu \cdot \operatorname{sign}(y)] x}}{x^{r+\frac{1}{2}s} (x - 2i|y|)^{\frac{1}{2}s}}\, dx.$$

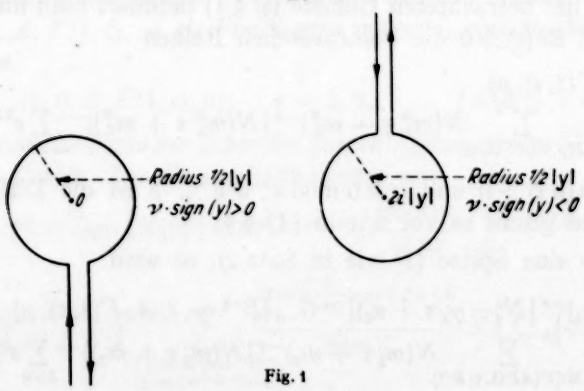


Fig. 1

Bei der in der Skizze angegebenen Wahl des Integrationsweges erhält man folgende Abschätzungen:

$$\left|\int\right| < \begin{cases} C\, e^{\pi \nu y}\, |y|^{1-r-Re(s)} & \text{für} \quad \nu \cdot \operatorname{sign}(y) > 0 \\ C\, e^{-3\pi|\nu y|}\, |y|^{1-r-Re(s)} & \text{für} \quad \nu \cdot \operatorname{sign}(y) < 0. \end{cases}$$

4. Durch Umbiegen des Integrationsweges erhält man auf dem üblichen Wege

$$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu x}}{x^r}\, dx = \begin{cases} \operatorname{sign}(y)\, \dfrac{(-2\pi i)^r}{(r-1)!}\, \nu^{r-1} & \text{für} \quad \nu \cdot \operatorname{sign}(y) > 0 \\ 0 & \text{für} \quad \nu \cdot \operatorname{sign}(y) < 0. \end{cases}$$

5. Durch Umbiegen des Integrationsweges und nachfolgende Drehung um $\pi/2$ (Substitution) erhält man

$$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{dx}{x^r |x|^s} = (2|y|)^{1-r-s}\, (i)^{r+s-1} \operatorname{sign}(y)^r \int_W \frac{dt}{t^{r+\frac{1}{2}s} (t+1)^{\frac{1}{2}s}}.$$

Der Weg W führt von $+\infty$ im negativen Sinne um den Nullpunkt und zurück nach $+\infty$. Er schneidet die reelle Achse zwischen -1 und 0. Hieraus ergibt sich

$$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{dx}{x^r |x|^s} = (-2i|y|)^{1-r-s} \operatorname{sign}(y)^r\, (1 - e^{\pi i s})\, \frac{\Gamma(1-r-\frac{1}{2}s)\,\Gamma(r+s-1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s)}.$$

6. Man erhält hieraus

$$\lim_{s \to 0} \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{dx}{x^r |x|^s} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r > 1 \\ \pi i \cdot \operatorname{sign}(y) & \text{für} \quad r = 1. \end{cases}$$

Die behandelten Integrale sind jeweils in ihrem Existenzbereich zu betrachten. Verbiegung des Integrationsweges oder explizite Auswertung liefern gegebenenfalls die analytische Fortsetzung als Funktionen von s.

§3. Die Poincaréschen Reihen

In jedem der betrachteten Gebiete (s. § 1) definiert man nun für positives ganzes r und $Re(s) > 0$ die Poincaréschen Reihen

$$G_{-r}(\tau, s, A, \Gamma(1, \mathfrak{c}), \mu) = \sum_{M_1 < V(A\Gamma(1,\mathfrak{c}))} N(m_1^* \tau + m_2^*)^{-r}\, |N(m_1^* \tau + m_2^*)|^{-s} \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S \mu (\lambda^2 M_1(\tau) + b^*)}.$$

Dabei ist $Im(\mu\tau) > 0$ und $\mu \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^{-1}$. $\mathfrak{b}$ ist die Differente von K. Man geht nun genau so vor wie in [1] § 3.

Ist $B^{-1}\infty$ eine Spitze (B wie in Satz 2), so wird

$$N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)^{-r}\, |N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)|^{-s}\, G_{-r}(B^{-1}\infty, s, A, \Gamma(1, \mathfrak{c}), \mu) = \sum_{M < V(A\Gamma(1,\mathfrak{c})B^{-1})} N(m_1\tau + m_2)^{-r}\, |N(m_1\tau + m_2)|^{-s} \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S \mu (\lambda^2 M(\tau) + b^*)}.$$

Die Reihe rechts zerfällt in zwei Teile. Der eine Teil ist

$$\sum_{m_1=0} = \sum_{\substack{(m_2)=\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\\(m_2)}} N(m_1)^{-r}\,|N(m_1)|^{-s} \sum_{\lambda>0} e^{2\pi i S\mu\left(\lambda^2\frac{h_1\tau+k}{m_2}+b^*\right)}.$$

Dieser Teil ist bereits eine normale Fourierreihe in τ. Der andere Teil ist

$$\sum_{\lambda>0} e^{2\pi i S\mu b^*} \sum_{\substack{m_1\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\\(m_1)\\m_1\neq 0}} N(m_1)^{-r}\,|N(m_1)|^{-s}\times$$

$$\times \sum_{\substack{j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\\(j,\,m_1\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1})=1}} e^{2\pi i S\mu\lambda^2\frac{\varphi\bar{j}}{m_1}} \sum_{b\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-1}} \frac{e^{-2\pi i S\frac{\mu\lambda^2}{m_1^2\left(\tau+\frac{1}{m_1}\chi j+b\right)}}}{N\left(\tau+\frac{\chi j}{m_1}+b\right)^r\left|N\left(\tau+\frac{\chi j}{m_1}+b\right)\right|^s},$$

wenn man Satz 2 berücksichtigt. Diesen Teil entwickelt man in der üblichen Weise in eine Fourierreihe (s. [*1*] § 3) und erhält als Fourierkoeffizienten

$$a(\nu, s, y) = \sum_{\lambda>0} \frac{e^{2\pi i S\mu b^*}}{\sqrt{|D|\,N(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2})}} \sum_{\substack{m_1\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\\(m_1)\\m_1\neq 0}} \frac{W(m_1, A, B, \Gamma(1,\mathfrak{c}))}{N(m_1)^r\,|N(m_1)|^s}\times$$

$$\times N\left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x+\frac{\lambda^2\mu}{m_1^2 x}\right\}}}{x^r\,|x|^s}\,dx\right]$$

mit

$$W(m_1, A, B, \Gamma(1,\mathfrak{c})) = \sum_{\substack{j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\\(j,\,m_1\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1})=1}} e^{2\pi i S\left(\frac{\nu\chi}{m_1}j+\frac{\lambda^2\mu\varphi}{m_1}\bar{j}\right)}.$$

D ist die Diskriminante von K.

Die Gestalt dieser Koeffizienten zeigt in Verbindung mit den Integralabschätzungen des vorigen Paragraphen unmittelbar, daß das gesamte Verfahren der §§ 2 und 3 in [*1*] auch hier durchführbar ist, also insbesondere die analytische Fortsetzung und die Metrisierung im Falle $r=2$. Man erhält somit folgendes Ergebnis:

Satz 3. *Die oben aufgestellten Fourierreihen setzen im Falle $r=2$ die Funktionen $G_{-2}(\tau, s, A, \Gamma(1,\mathfrak{c}), \mu)$ als Funktionen von s bis einschließlich $s=0$ fort. Die Funktionen*

$$G_{-r}(\tau, 0, A, \Gamma(1,\mathfrak{c}), \mu), \quad r=2, 3, \ldots, \quad Im(\mu\tau)>0$$

enthalten eine endliche Basis der Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma(1,\mathfrak{c}), -r, 1\}$ im betrachteten Gebiet. Die Fourierkoeffizienten sind

$$a(\nu, 0, *) = \operatorname{sign}\left(N(y)^r\right)(2\pi)^r\, e^{-\frac{1}{2}\pi i n r}\,\frac{N(\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2)}{\sqrt{|D|}} \sum_{\lambda>0} e^{2\pi i S\mu b^*}\times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\\(m_1)\\m_1\neq 0}} N\left\{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{m_1}{\lambda}\right|\right\}^{r-1} \sum_{\substack{j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\\(j,\,m_1\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1})=1}} \frac{e^{\frac{2\pi i S}{m_1}(\nu\chi j+\lambda^2\mu\varphi\bar{j})}}{N(m_1)^r}\, N\left\{J_{r-1}\left(4\pi(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\lambda}{m_1}\right|\right)\right\}$$

für $\nu \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2\mathfrak{d}^{-1}$, $\operatorname{Im}(\nu\tau) > 0$, *wozu für* $(\nu) = (\mu)\mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{b}^2$ *noch der Anteil des ersten Reihenteils kommt.*

Für die ganzen Spitzenformen aus $\{\Gamma(1, \mathfrak{c}), -r, 1\}$ *gilt Satz 3 aus* [1] *S. 324.*

§4. Die Eisensteinreihen

Genau wie bei den Poincaréschen Reihen geht man auch bei den Eisensteinreihen vor. Man setzt an:

$$G^*_{-r}(\tau, s, A, \Gamma(1, \mathfrak{c})) = \sum_{\substack{m_1^* \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{c}^{-1} \\ m_2^* \equiv 0 \bmod \mathfrak{a} \quad (m_1^*)}} N(m_1^*\tau + m_2^*)^{-r} |N(m_1^*\tau + m_2^*)|^{-s}, \quad r + Re(s) > 2.$$

Die Invarianz gegen $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ ist evident. Zur Ermittlung der Fourierentwicklung in $B^{-1}\infty$ bildet man

$$N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)^{-r} |N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)|^{-s} G_{-r}(B^{-1}\infty, s, A, \Gamma(1, \mathfrak{c}))$$

$$= \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \\ m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-r} |N(m_2)|^{-s} + \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1} \\ m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \quad (m_1) \\ m_1 \neq 0}} N(m_1)^{-r} |N(m_1)|^{-s} N\left(\tau + \frac{m_2}{m_1}\right)^{-r} \left|N\left(\tau + \frac{m_2}{m_1}\right)\right|^{-s}$$

$$= \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \\ m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-r} |N(m_2)|^{-s} + \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1} \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} N(m_1)^{-r} |N(m_1)|^{-s} \times$$

$$\times \sum_{\substack{j \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1} \\ \mathfrak{b} \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2}}} N\left(\tau + \frac{\chi j}{m_1} + b\right)^{-r} \left|N\left(\tau + \frac{\chi j}{m_1} + b\right)\right|^{-s}.$$

Den zweiten Teil entwickelt man in eine Fourierreihe und erhält

$$a_{-r}(\nu, s, y, A, B)$$

$$= \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1} \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \frac{N(m_1)^{-r} |N(m_1)|^{-s}}{\sqrt{|D|}\, N(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2})} \sum_{j \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}} e^{2\pi i S \frac{\nu\chi}{m_1} j} N\left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu x}}{x^r |x|^s} dx\right].$$

Nun ist

$$\sum_{j \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}} e^{2\pi i S \frac{\nu\chi}{m_1} j} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \frac{\nu\chi}{m_1} \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ N\left((m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach der Wahl von χ ist

$$\left(\frac{\chi}{m_1}\right) = \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}(m_1)^{-1} = \mathfrak{g}\left((m_1)\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\right)^{-1},$$

also

$$\frac{\nu\chi}{m_1} \equiv 0 \bmod \mathfrak{d}^{-1} \quad \text{äq} \quad \mathfrak{d}^{-1} \mid (\nu)\,\mathfrak{g}(m_1)^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \quad \text{äq} \quad (m_1) \mid (\nu)\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{d},$$

da $\mathfrak{g}$ zu m_1 teilerfremd ist. Das liefert

$$a_{-r}(\nu, s, y, A, B) = \frac{N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})}{\sqrt{|D|}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1} \mid m_1 \mid \nu\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{d} \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \frac{\operatorname{sign}(N(m_1)^r)}{|N(m_1)|^{r+s-1}} N\left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu x}}{x^r |x|^s} dx\right].$$

Die Integralabschätzungen garantieren für jedes positive ganze r die analytische Fortsetzung der Eisensteinreihen als Funktionen von s bis einschließlich $s=0$, da auch die konstanten Koeffizienten der Fourierreihen fortsetzbar sind, wie wir unten sehen werden. Genau wie in [1] § 3 läßt sich auch die Metrisierung fortsetzen, so daß die $G_{-r}(\tau, 0, A, \Gamma(1, \mathfrak{c}))$ sich als Orthogonalfunktionen zur Schar der ganzen Spitzenformen herausstellen.

Die Fourierkoeffizienten der G_{-r} für $\nu \neq 0$ sind offenbar

$$a^*_{-r}(\nu, 0, *, A, B) = \operatorname{sign}(N(\nu)) \frac{(-2\pi i)^{nr} N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})}{(r-1)!\sqrt{|D|}} \times \\ \times (N(\nu))^{r-1} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1} | m_1 | \nu \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{b} \\ (m_1)}} \frac{\operatorname{sign}(N(m_1))^r}{|N(m_1)|^{r-1}}$$

mit $\operatorname{Im}(\nu\tau) > 0$. Für $\nu = 0$ müssen wir noch den von τ unabhängigen ersten Teil unserer Reihenaufspaltung hinzufügen und dabei die Fälle $r=1$ und $r \geq 2$ unterscheiden. Für $r \geq 2$ ergibt sich

$$a^*_{-r}(0, 0, *, A, B) = \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \quad m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-r},$$

da $a_{-r}(0, 0, *, A, B) = 0$ ist.

Für $r=1$ ist dagegen

$$a^*_{-1}(0, s, y, A, B)\Big|_{s=0} = \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \quad m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-1} |N(m_2)|^{-s}\Big|_{s=0} + \\ + (\pi i)^n \operatorname{sign}(N(y)) \frac{N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})}{\sqrt{|D|}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1} | m_1 \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \operatorname{sign}(N(m_1)) |N(m_1)|^{-s}\Big|_{s=0}$$

Diesen Ausdruck formen wir mit Hilfe der in [4] behandelten ζ-Funktionen mit Vorzeichencharakteren um. Da ganze Nichtspitzenformen für $r=1$ bekanntlich nicht existieren können, wenn es eine Einheit mit negativer Norm in K gibt, setzen wir o.B.d.A. voraus, daß alle Einheiten positive Norm haben. $\chi(\mathfrak{g})$ sei nun ein durch $\chi(\xi) = \operatorname{sign}(N(\xi))$ für Hauptideale definierter Vorzeichencharakter (s. [4]). Dann ist [ich schreibe hier der Einfachheit halber $\zeta(s, \mathfrak{a}, \chi)$ statt $\zeta(s, K_{\mathfrak{a}}, \chi)$]

$$\sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \quad m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-1} |N(m_2)|^{-s} = \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \quad m_2 \neq 0}} \chi(m_2) |N(m_2)|^{-1-s} \\ = \bar{\chi}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}) N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})^{1+s} \sum_{\mathfrak{g} \sim \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}} \chi(\mathfrak{g}) N(\mathfrak{g})^{-1-s} \\ = \bar{\chi}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}) N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})^{1+s} \zeta(1+s, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, \chi)$$

und

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1} | m_1 \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \operatorname{sign}(N(m_1)) |N(m_1)|^{-s} = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1} | m_1 \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \bar{\chi}(m_1) |N(m_1)|^{-s} \\ = \chi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}) N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c})^s \sum_{\mathfrak{g} \sim \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}} \bar{\chi}(\mathfrak{g}) N(\mathfrak{g})^{-s} \\ = \chi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}) N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c})^s \zeta(s, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}, \bar{\chi}).$$

Weiter ist nun

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^n \zeta(0, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}, \bar{\chi}) = (-i)^n \bar{\chi}(\mathfrak{b})\, \pi^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|D|}\, \zeta(1, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}, \chi),$$

also

$$\zeta(0, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}, \bar{\chi}) = (-i)^n \bar{\chi}(\mathfrak{b})\, \pi^{-n} \sqrt{|D|}\, \zeta(1, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}, \chi).$$

Damit ergibt sich

$$a^*_{-1}(0, 0, y, A, B)$$
$$= \bar{\chi}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})\, N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}) \{\zeta(1, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, \chi) + \operatorname{sign}(N(y))\, \chi(\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{c})\, \zeta(1, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}, \chi)\}.$$

Die lineare Unabhängigkeit der Eisensteinreihen für $r \geq 2$ läßt sich genau wie in [3] nachweisen. Man sieht ohne Schwierigkeiten, daß sich auch die einer einzelnen Klasse äquivalenter Spitzen zugeordneten Eisensteinreihen, deren konstantes Glied also genau in diesen Spitzen von Null verschieden ist, ohne weiteres aufstellen lassen. Man erhält diese Reihen durch Einführung einer Teilerfremdheitsbedingung in unseren obigen Ansatz. Es folgt also:

Satz 4. *Im Falle $r \geq 2$ bilden die Eisensteinreihen eine Basis der Orthogonalschar zur Schar der ganzen Spitzenformen in der Schar der ganzen Formen aus $\{\Gamma(1, \mathfrak{c}), -r, 1\}$. Der Rang dieser Schar ist gleich der Klassenzahl von K, falls nicht r ungerade ist und es eine Einheit mit negativer Norm in K gibt. In letzterem Falle ist der Rang Null.*

§5. Die lineare Unabhängigkeit der Eisensteinreihen für $r = 1$

Uns interessiert hier nur der Fall, daß es in K keine Einheit mit negativer Norm gibt. Die Idealklassen von K repräsentieren wir durch die Primideale (für die Hauptklasse nehmen wir natürlich das 1-Ideal)

$$\mathfrak{r}_1 = (1), \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_h.$$

Die zugehörigen Matrizen A seien

$$A_{\mathfrak{r}_1}, \ldots, A_{\mathfrak{r}_h}.$$

(Diese Matrizen sind natürlich an und für sich nicht eindeutig bestimmt, sondern hängen von der speziellen Spitze ab, im folgenden tritt aber nur die Abhängigkeit von der Idealklasse in Erscheinung.) $\mathfrak{x}$ sei nun eines der $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_h$, A das zugehörige $A_{\mathfrak{x}}$. Dann ist

$$a^*_{-1}(0, 0, y, A, B)$$
$$= \bar{\chi}(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b})\, N(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b}) \{\zeta(1, \mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b}, \chi) + \operatorname{sign}(N(y))\, \chi(\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c})\, \zeta(1, \mathfrak{x}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}, \chi)\}.$$

Es sei $\mathfrak{y} \sim \mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$. Da die ζ-Funktion nur von der Idealklasse abhängt, ist

$$\zeta(1, \mathfrak{y}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}, \chi) = \zeta(1, \mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b}, \chi).$$

$\mathfrak{y}$ sei eines der $\mathfrak{r}_j$. Dann erhält man

$$a^*_{-1}(0, 0, y, A_{\mathfrak{y}}, B)$$
$$= \bar{\chi}(\mathfrak{y}^{-1}\mathfrak{b})\, N(\mathfrak{y}^{-1}\mathfrak{b}) \{\zeta(1, \mathfrak{x}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}\mathfrak{b}, \chi) + \operatorname{sign}(N(y))\, \chi(\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{y}^{-2}\mathfrak{c})\, \zeta(1, \mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b}, \chi)\},$$

also

$$\chi(\mathfrak{y}^{-1})\,\bar{\chi}(\mathfrak{x}^{-1})\,N(\mathfrak{y}\mathfrak{x}^{-1})\,\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c})\,a^{*}_{-1}(0,0,y,A_{\mathfrak{y}},B)=\bar{\chi}(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b})\times$$

$$\times\{\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c})\,\zeta(1,\mathfrak{x}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{b},\chi)+\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{y}^{-2}\mathfrak{c})\,\zeta(1,\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b},\chi)\}.$$

Nun ist

$$\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{y}^{-2}\mathfrak{c})=\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{y}^{-1})^{2}=\chi(\text{Hauptideal})^{2}=+1,$$

also

$$\chi(\mathfrak{y}^{-1})\,\bar{\chi}(\mathfrak{x}^{-1})\,N(\mathfrak{y}\mathfrak{x}^{-1})\,\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c})\,a^{*}_{-1}(0,0,y,A_{\mathfrak{y}},B)$$

$$=a^{*}_{-1}(0,0,y,A,B).$$

Da der Faktor nicht von der Spitze abhängt, hat die Eisensteinreihe zur Spitze $\mathfrak{x}$ bis auf einen konstanten Faktor in allen Spitzen die gleichen konstanten Glieder wie die Eisensteinreihe zur Spitze $\mathfrak{y}\sim\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$. Da beides Orthogonalfunktionen zu den ganzen Spitzenformen sind, sind sie linear abhängig. Also gilt:

Ist $\mathfrak{x}\not\sim\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{x}^{2}\not\sim\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, so gehören zu den Spitzen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}\sim\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ bis auf einen konstanten Faktor die gleichen Eisensteinreihen.

Ist $\mathfrak{x}\sim\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{x}^{2}\sim\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, so handelt es sich bei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ um die gleiche Spitze. Dann ist

$$a^{*}_{-1}(0,0,y,A,B)$$

$$=\bar{\chi}(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b})\,\{\zeta(1,\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b},\chi)+\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{-1})\,\zeta(1,\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b},\chi)\}$$

$$=0\quad\text{falls}\quad\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{-1})=-1\quad\text{ist.}$$

Das Vorzeichen von $\chi(\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1})$ ist offenbar nur durch $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ und die Klasse von $\mathfrak{x}^{2}\sim\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, d.h. nur durch $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ bestimmt.

Satz 5. *Im Falle $r=1$ sind die Eisensteinreihen zu den Idealklassen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ bis auf eine Konstante gleich. Ist $\mathfrak{x}^{2}\sim\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, so verschwindet die Eisensteinreihe zur Klasse $\mathfrak{x}$ identisch, wenn das Hauptideal $\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ eine Erzeugende $\varkappa$ mit*

$$\mathrm{sign}\,(N(y\varkappa))=-1$$

hat.

Die verbleibenden Eisensteinreihen sind linear unabhängig.

Beweis der linearen Unabhängigkeit:

$\mathfrak{x}_j$ sei eines der $\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_h$. In den zu $\mathfrak{x}_j$ gehörigen Spitzen sind die Exponenten der Fourierreihe die ν mit

$$\nu\equiv 0\bmod\mathfrak{x}_j^{2}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}^{-1},\qquad\nu\cdot\mathrm{Im}\,(\tau)>0.$$

In der Klasse von $\mathfrak{x}_j^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ wählt man ein Primideal $\mathfrak{y}$ so, daß das Hauptideal $\mathfrak{y}\mathfrak{x}_j^{2}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ eine Erzeugende ν_j mit

$$\nu_j\,\mathrm{Im}\,(\tau)>0$$

hat, was immer möglich ist (s. z.B. [4]). Dann ist ν_j die Nummer eines Fourierkoeffizienten. Der zugehörige Koeffizient der Eisensteinreihe zu $\mathfrak{x}$ ist

$$C \sum_{m_1} \operatorname{sign}\left(N(m_1)\right), \qquad C \neq 0.$$

Die Summationsvorschrift lautet

$$\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j \mid m_1 \mid \mathfrak{y}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j, \quad (m_1),$$

also ist

$$(m_1) = \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j \sim (1) \quad \text{oder} \quad (m_1) = \mathfrak{y}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j \sim (1).$$

Das bedeutet: Ist der Koeffizient von Null verschieden, so ist entweder $\mathfrak{x} \sim \mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1}$ oder $\mathfrak{x} \sim (\mathfrak{x}_j^{-1}\mathfrak{c})^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ oder beides. Ist $\mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1} \nsim (\mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1})^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, so ist der Koeffizient mit der Nummer ν_j genau dann von Null verschieden, wenn

$$\mathfrak{x} \sim \mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{x} \sim (\mathfrak{c}_j^{-1}\mathfrak{x})^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1} \quad \text{ist.}$$

In beiden Fällen handelt es sich jedoch faktisch um die gleiche Reihe. Die Reihen zu diesen $\mathfrak{x}$ sind also von allen anderen und unter sich linear unabhängig. Es fehlen jetzt noch die $\mathfrak{x}$, für die

$$\mathfrak{x} \sim \mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1} \sim (\mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1})^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1} \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{x}^2 \sim \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$$

ist. In diesem Falle treten in der Summe für den Koeffizienten ν_j zwei wesentlich verschiedene Werte von m_1 auf, nämlich

$m_1 = \varrho$, $(\varrho) = \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j$

$m_1 = \varrho\mu$, $(\mu) = \mathfrak{y}$, $\operatorname{sign}\left(N(\mu\varkappa y)\right) > 0$, d.h. $\operatorname{sign}\left(N(\mu)\right) = \operatorname{sign}\left(N(\varkappa y)\right)$.

Also ist

$$\sum \operatorname{sign}\left(N(m_1)\right) = 1 + \operatorname{sign}\left(N(\mu)\right) = 1 + \operatorname{sign}\left(N(y\varkappa)\right).$$

Der Koeffizient ist ersichtlich von Null verschieden, wenn die Eisensteinreihe nach den obigen Betrachtungen nicht schon sowieso verschwindet.

Literatur

[1] GUNDLACH, K.-B.: Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourierkoeffizienten. Acta math. **92**, 309—345 (1954). — [2] HERRMANN, O.: Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Math. Ann. **127**, 357—400 (1954). — [3] KLOOSTERMAN: Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen. Abhandl. math. Sem. Hamburg. Univ. **6**, 163—188 (1928). — [4] LANDAU, E.: Über Ideale und Primideale in Idealklassen. Math. Z. **2**, 52—154 (1918).

Münster, II. Math. Institut der Universität

(Eingegangen am 2. August 1955)

BAUMANN, V.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 353—384 (1956)

Eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung der Wärmeübertragung bei Wärmeleitung und -strahlung

Von
VOLKER BAUMANN

Einleitung

Die in dieser Arbeit behandelte Gleichung geht aus einem Problem der stationären Wärmeübertragung hervor. Ein planparallel verteiltes homogenes isotropes Medium der Dicke h mit dem Brechungsindex n, dem Wärmeleitungskoeffizienten $\varkappa$ und dem Absorptionskoeffizienten $k(\lambda)$ werde von zwei ebenen schwarzen Strahlern mit der konstanten Temperatur T_0 bzw. T_h begrenzt. Dann bestehen nach L. GENZEL [2][1]) zwischen dem durch Wärmeleitung und -strahlung bestimmten Temperaturverlauf $T(x)$ im Inneren des Mediums und dem Energiefluß E_g der durch die Integrodifferentialgleichung

$$(1)\quad \begin{cases} E_g \frac{1}{2\pi n^2} = \int_0^\infty \int_0^h k(\lambda)\,\mathrm{sign}(x-t)\cdot K_1\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda, T(t)\big)\,dt\,d\lambda - \\ -\int_0^\infty \big\{K_2\big(k(\lambda)\,x\big)\,E(\lambda, T_0) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)\,E(\lambda, T_h)\big\}\,d\lambda - \frac{\varkappa}{2\pi n^2}\,T'(x) \end{cases}$$

beschriebene Zusammenhang, wobei $T(x)$ und E_g die unbekannten Größen, die sonst eingehenden Größen aber alle gegeben sind (s. S. 355).

In der Stellarphysik werden ähnliche Gleichungen seit geraumer Zeit untersucht. Es seien hier etwa die die Entwicklung einleitenden Arbeiten von K. SCHWARZSCHILD [11], E. A. MILNE [8], E. HOPF [4] und die neuere Monographie von V. KOURGANOFF und I. W. BUSBRIDGE [6] erwähnt. Aber es liegt in der Natur dieser Probleme, die Wärmeleitung zu vernachlässigen ($\varkappa = 0$) und das Medium als nur einseitig begrenzt und bestrahlt aufzufassen, was die dort auftretenden Gleichungen von der hier behandelten prinzipiell unterscheidet.

Mathematisch ist diese Gleichung der Klasse der nichtlinearen Integrodifferentialgleichungen unterzuordnen. Sie kann durch Integration nach x auf die Gestalt einer nichtlinearen Integralgleichung gebracht werden:

$$(2)\qquad \varkappa\,T(x) = F(x) + C\int_0^\infty \int_0^h K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda, T(t)\big)\,dt\,d\lambda,$$

wobei $F(x)$ nur bis auf eine lineare Funktion bestimmt ist, dafür aber der gesuchten nichtnegativen Lösungsfunktion Randwerte R_0, R_h vorgeschrieben sind.

[1]) Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

Die von E. SCHMIDT [10] und L. LICHTENSTEIN [7] verfolgte Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen im Kleinen läßt sich — ganz abgesehen davon, daß sie nur für absolut kleine Werte C das Problem lösen könnte — nicht auf (2) anwenden, weil $F(x)$ nicht eindeutig vorgegeben und der zweidimensionale Integrationsbereich nicht beschränkt ist.

Derselbe Grund macht eine Anwendung der Untersuchungen von A. HAMMERSTEIN [3] und R. IGLISCH [5] über nichtlineare Integralgleichungen im Großen unmöglich. Aber auch in dem speziellen Fall $k(\lambda) = \text{const}$ („Grauer Fall"), in dem die Gl. (2) die Form

$$\varkappa T(x) = F(x) + C_1 \int_0^h K_2(k|x-t|)\, T^4(t)\, dt \tag{3}$$

annimmt, können die Sätze von Hammerstein und Iglisch nicht benutzt werden, da die Nichtlinearität der vierten Potenz die Voraussetzung dieser Sätze nicht erfüllt.

Unter diesen Umständen bleibt kein anderer Weg, als den Eindeutigkeits- und Existenzbeweis unter Ausnutzung spezieller Eigenschaften der in die Gleichung eingehenden Funktionen anzugehen.

(a) Für den Eindeutigkeitsbeweis wird im wesentlichen die differenzierte Form

$$\left\{\begin{aligned} \varkappa T''(x) &= F''(x) + 2C \int_0^\infty k(\lambda)\, E\big(\lambda, T(x)\big)\, d\lambda + \\ &\quad + C \int_0^\infty \int_0^h k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, T(t)\big)\, dt\, d\lambda \end{aligned}\right. \tag{4}$$

der Gl. (1) benutzt, da in ihr der inhomogene Bestandteil im Gegensatz zu (2) eindeutig bestimmt ist. Zwei verschiedene stetige nichtnegative Funktionen $T_0(x)$ und $T_1(x)$ mögen Gl. (4) erfüllen. Subtrahiert man die entsprechenden Gleichungen und integriert über die x-Bereiche, in denen $T_0(x) > T_1(x)$ bzw. $T_0(x) < T_1(x)$ ist, so ergibt sich für $\varkappa = 0$ unmittelbar ein Widerspruch, im Falle $\varkappa > 0$ für die Randdifferenzen $T_0(0) - T_1(0)$ und $T_0(h) - T_1(h)$ eine Aussage, die der Forderung $T_0(0) = T_1(0)$, $T_0(h) = T_1(h)$ widerspricht.

(b) Der Existenzbeweis für den Fall $\varkappa = 0$ (reine Strahlung) benutzt ebenfalls die Form (4) des Problems, da es nur so durch eine Integralgleichung zweiter Art dargestellt wird. In diesem Fall ist die Lösung schon durch die in die Gleichung selbst eingehenden Parameter eindeutig bestimmt, weshalb die Vorgabe von Randwerten unzulässig ist. Die Lösung erfolgt mittels eines Iterationsverfahrens, das mit der Funktion $f_0(x) = \text{Max}(T_0, T_h)$ beginnt; die Konvergenz folgt daraus, daß die Iteriertenfolge monoton abnimmt und durch $\text{Min}(T_0, T_h)$ beschränkt wird.

(c) Zum Existenzbeweis im allgemeinen Falle $\varkappa > 0$ wird der Operator

$$\begin{aligned} U[f] = G(x) + C_2 \int_0^\infty \int_0^h \Big\{ & K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) - K_2\big(k(\lambda)\, t\big) + \\ & + \frac{x}{h}\,\big[K_2\big(k(\lambda)\, t\big) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-t)\big)\big]\Big\}\, E\big(\lambda, f(t)\big)\, dt\, d\lambda \end{aligned}$$

über dem Raum $\mathfrak{C}^+$ der über $[0, h]$ stetigen nichtnegativen Funktionen $f(x)$ untersucht; er ist so beschaffen, daß eine Fixfunktion dieses Operators die Gl. (1) löst und vorgeschriebene Randwerte R_0, R_h annimmt. Zum Nachweis der Existenz einer solchen Fixfunktion wird ein bekannter Fixpunktsatz für Funktionalräume von J. SCHAUDER [9] angewandt. Da sich aber keine Teilmenge des Raumes $\mathfrak{C}^+$ angeben ließ, die durch U in sich selbst abgebildet wird, und deren U-Bild kompakt ist, wie es für die Anwendung des Schauderschen Satzes erforderlich wäre, wird der Operator U zu einem Operator V abgeändert: Der Definitionsbereich von U wird auf die Menge $\mathfrak{F}$ der Funktionen aus $\mathfrak{C}^+$ eingeschränkt, die durch $\mathrm{Min}(T_0, T_h, R_0, R_h) = b$ und $\mathrm{Max}(T_0, T_h, R_0, R_h) = B$ beschränkt sind. Die Abbildung V geht aus U hervor, indem die Funktionswerte der U-Bilder, die größer als B bzw. kleiner als b sind, durch B bzw. b ersetzt werden. Diese Abänderung ist sinnvoll; denn es kann bewiesen werden, daß eine Fixfunktion des Operators V auch Fixfunktion des Operators U ist, und daß der Operator V die Voraussetzungen des Schauderschen Satzes erfüllt. Dieser Existenzbeweis ist nicht konstruktiv.

Es bleibt weiteren Untersuchungen vorbehalten, die hier benutzten Voraussetzungen möglicherweise einzuschränken, um die Tragfähigkeit der angewandten Methoden auf eine noch größere Klasse von nichtlinearen Integrodifferentialgleichungen auszudehnen. Wie die Bibliographie von J. LERAY [13] zeigt, erwies sich die Anwendung topologischer Fixpunktsätze auf analytische Probleme, vor allem Differentialgleichungen, als fruchtbar.

Eine numerische Behandlung des Problems für den Fall einer konstanten Absorptionsfunktion $k(\lambda)$ wurde vom Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt unter Leitung von A. WALTHER [12] in Angriff genommen.

Die Anregung zur vorliegenden Untersuchung ging von Frau Prof. R. MOUFANG aus, wofür ich ihr zu großem Dank verpflichtet bin.

§1. Problemstellung, Hilfsätze und Umformungen

1.1. Die zu lösende Integrodifferentialgleichung. Sie lautet:

$$(1.1)\quad \begin{cases} E_g \dfrac{1}{2\pi n^2} = \displaystyle\int_0^\infty \int_0^h k(\lambda)\,\mathrm{sign}(x-t)\,K_1\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda, T(t)\big)\,dt\,d\lambda - \\ - \displaystyle\int_0^\infty \Big\{K_2\big(k(\lambda)\,x\big)\,E(\lambda, T_0) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)\,E(\lambda, T_h)\Big\}\,d\lambda - \dfrac{\varkappa}{2\pi n^2}\,T'(x). \end{cases}$$

Dabei sind gegeben:

a) die nichtnegative, bis auf höchstens endlich viele Stellen stetige (stückweis stetige) beschränkte reelle Funktion $k(\lambda)$ für $0 \leq \lambda < +\infty$,

b) die nichtnegativen reellen Konstanten $T_0, T_h, \varkappa, n > 0, h > 0$ sowie die nichtnegativen Randwerte R_0, R_h [2]),

[2]) Den Physiker interessieren natürlich besonders die Randwerte $R_0 = T_0$, $R_h = T_h$.

c) die Integro-Exponentialfunktionen $K_i(t)$ durch folgende Induktion nach i:

$$(1.2)\quad \begin{cases} K_0(t) = Ei(-t) = -\int_t^\infty \frac{e^{-s}}{s}\,ds & \text{für } t>0, \\ K_i(t) = -\int_t^\infty K_{i-1}(s)\,ds & \text{für } i=1,2,3,\ldots \text{ und } t\geq 0, \end{cases}$$

d) die Plancksche Strahlungsfunktion

$$(1.3)\quad E(\lambda,T) = \begin{cases} 2c_1\lambda^{-5}\left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}}-1\right)^{-1} & \text{für } T\neq 0 \text{ und } \lambda\neq 0, \\ 0 & \text{für } T=0 \text{ oder } \lambda=0, \end{cases}$$

wobei c_1 und c_2 positive reelle Konstanten darstellen.

Gesucht wird

1. eine über dem Intervall $0\leq x\leq h$ stetige, im Falle $x>0$ differenzierbare Funktion $T(x)$[3]), die nichtnegativ ist, für eine geeignete Konstante E_g die Gl. (1.1) erfüllt und die gegebenen Randwerte annimmt: $T(0)=R_0$, $T(h)=R_h$,

2. die zur Lösung gehörige Konstante E_g.

Die Voraussetzungen a) bis d) sollen für alle folgenden Betrachtungen erfüllt sein, auch wenn dies im Einzelfall nicht mehr besonders erwähnt wird.

1.2. Die Integro-Exponentialfunktionen $K_i(t)$.

$K_0(t)$ ist hinlänglich bekannt und tabuliert[4]); es sei nur noch erwähnt, daß zwar

$$\lim_{t\to+0} K_0(t) = -\infty,$$

aber nach der Regel von de l'Hospital für beliebiges positives α

$$(1.4)\quad \lim_{t\to+0} t^\alpha K_0(t) = \lim_{t\to+\infty} t^\alpha K_0(t) = 0$$

wird[5]).

Aus (1.2) geht hervor, daß

$$(1.5)\quad K_i'(t) = K_{i-1}(t) \quad \text{für} \quad \begin{cases} i=1 \text{ und } t>0, \\ i=2,3,\ldots \text{ und } t\geq 0. \end{cases}$$

Die Funktionen $K_i(t)$ lassen sich rekursiv ausdrücken:

$$(1.2')\quad K_i(t) = \frac{1}{i}\left\{t\,K_{i-1}(t) + (-1)^{i+1}e^{-t}\right\}, \qquad i=1,2,\ldots \text{ und } t\geq 0;$$

denn nach (1.2), (1.5) und Induktion stimmen die Ableitungen beider Seiten von (1.2') überein, und beide Seiten streben wegen (1.4) für $t\to+\infty$ gegen

[3]) Wir vereinbaren: Für $x=0$ soll das Produkt $x\,T'(x)=0$ sein, unabhängig davon, ob T' existiert oder nicht.

[4]) Man vergleiche etwa die Funktionentafeln von JAHNKE-EMDE (Berlin 1931) oder die Monographie von KOURGANOFF-BUSBRIDGE [6], die in ihrem Anhang eine umfassendere Untersuchung der Integro-Exponentialfunktionen enthält.

[5]) Durch diesen Grenzwert wollen wir die Funktion $t^\alpha K_0(t)$ an der Stelle $t=0$ definieren.

Null. Wir ersehen aus dieser Darstellung, daß die Integrale (1.2) an der Stelle $t=0$ existieren für $i=1, 2, \ldots$.

Uns interessieren weiterhin hauptsächlich nachstehende Folgerungen aus (1.2), (1.2′) und (1.5):

$$(1.6)\qquad \begin{cases} -\infty = \lim\limits_{t\to+0} K_0(t) < K_0(t) < 0, \\ -\frac{1}{i} = K_i(0) \leqq K_i(t) < 0 \quad \text{für gerade } i>0, \\ \frac{1}{i} = K_i(0) \geqq K_i(t) > 0 \quad \text{für ungerade } i, \end{cases}$$

sowie

$$(1.7)\qquad K_i'(t) \begin{cases} >0 & \text{für } i=0, 2, 4, \ldots, \\ <0 & \text{für } i=1, 3, 5, \ldots, \end{cases}$$

d.h. die Funktionen $K_i(t)$ verlaufen i.e.S.[6]) monoton, und die Integrationsformeln ($k\geqq 0$):

$$(1.8)\qquad \int_0^a k\,K_0\big(k|x-t|\big)\,dt = -2 + K_1(kx) + K_1\big(k(a-x)\big) \quad \text{für } 0\leqq x\leqq a,$$

$$(1.8')\qquad \int_0^a k\,K_0\big(k|x-t|\big)\,dt = K_1(kx) - K_1\big(k(x-a)\big) \quad \text{für } 0\leqq a\leqq x.$$

1.3. Die Plancksche Strahlungsfunktion $E(\lambda, T)$

(a) Für alle $\lambda>0$, $T>0$ wird

$$(1.9)\qquad E(\lambda,T)>0, \quad E_T(\lambda,T)>0 \quad \text{und} \quad E_{TT}(\lambda,T)>0,$$

d.h. insbesondere: bei festem positivem λ nehmen die Funktionen $E(\lambda, T)$ und $E_T(\lambda, T)$ mit T i.e.S. monoton zu.

Beweis. Für $E(\lambda, T)$ und

$$E_T(\lambda,T) = \begin{cases} 2c_1c_2\dfrac{\lambda^{-6}\,e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}{T^2\left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}}-1\right)^2} & \text{für } \lambda\neq 0 \text{ und } T\neq 0 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

ist die Behauptung (1.9) evident. Für $\lambda>0$ und $T>0$ wird

$$E_{TT}(\lambda,T) = -2c_1\lambda^{-5}T^{-2}\varphi\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)\psi\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)$$

mit

$$\varphi(x) = x\,e^x(e^x-1)^{-3} \quad \text{und} \quad \psi(x) = (2+x)(e^x-1) - 2x\,e^x.$$

Für positive x ist $\varphi(x)>0$, und wegen $\psi(0)=\psi'(0)=0$ wird $\operatorname{sign}\psi(x) = \operatorname{sign}\psi''(x) = \operatorname{sign}(-x\,e^x) = -1$.

[6]) i.e.S. bedeute „im engeren Sinne", i.w.S. „im weiteren Sinne".

(b) Für jede reelle Zahl $T \geq 0$ wird

$$\int_0^\infty E(\lambda, T)\, d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \tag{1.10}$$

und

$$\int_0^\infty E_T(\lambda, T)\, d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} \frac{d}{dT} T^4 = \frac{4\sigma}{\pi} T^3 \tag{1.10'}$$

mit $\sigma = \frac{2}{15} \pi^5 \frac{c_1}{c_2^4}$.

Die Integrale konvergieren absolut[7]) und für eine beliebige positive Zahl T_0 gleichmäßig über $0 \leq T \leq T_0$.

Beweis. Gl. (1.10) ist hinlänglich bekannt. Die Gl. (1.10') ist für $T = 0$ trivial, und für $T > 0$ wird

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{E_T(\lambda, T)}{E(\lambda, T)} = c_2 T^{-1} \lim_{\lambda T \to +\infty} \frac{(\lambda T)^{-1}}{1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}} = c_2 T^{-1} \lim_{\lambda T \to +\infty} \frac{c_2^{-1}}{e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}} = T^{-1},$$

weshalb das in (1.10') auftretende Integral konvergiert. Nach (a) konvergieren beide Integrale absolut und gleichmäßig, woraus insbesondere die Gl. (1.10') folgt.

1.4. Hilfsätze

Um die Existenz der in (1.1) auftretenden Integrale nachzuweisen, sowie um diese Gleichung durch Differentiation und Integration umzuformen, stellen wir zum Teil auch noch anderweitig benötigte Hilfsmittel zusammen.

• **Hilfsatz 1.** Es sei $k(\lambda) \not\equiv 0$[8]). Für $x \geq 0$ konvergiert das Integral

$$\Phi(x) = \int_0^\infty k(\lambda)\, E(\lambda, x)\, d\lambda \tag{1.11}$$

absolut und über jedem beschränkten x-Intervall gleichmäßig. Die Funktion $z = \Phi(x)$ nimmt über $x \geq 0$ jeden Wert $z \geq 0$ genau einmal an, nimmt i.e.S. monoton zu und ist stetig; dasselbe gilt über $z \geq 0$ für die Umkehrfunktion $x = \Phi^{-1}(z)$.

Beweis. 1. Da $k(\lambda)$ stückweise stetig und beschränkt vorausgesetzt wird, ist nach § 1.3 die Konvergenzaussage evident.

2. Nach (1.3), (1.9) und (1.10') gilt

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = +\infty, \quad \Phi'(x) = \int_0^\infty k(\lambda)\, E_x(\lambda, x)\, d\lambda > 0 \quad (x > 0),$$

woraus die restliche Behauptung folgt.

---

[7]) Die Eigenschaft der absoluten Konvergenz erwähnen wir für dieses und die folgenden Integrale, um sie als L-Integrale auffassen zu können.

[8]) Hier wie im folgenden bedeute $k(\lambda) \equiv 0$, daß $k(\lambda)$ L-fast überall, d.h. nach den Voraussetzungen von S. 355 bis auf endlich viele Stellen verschwindet. $k(\lambda) \not\equiv 0$ impliziert also, daß $k(\lambda)$ in einem Intervall nicht verschwindet.

Hilfsatz 2. Für $0 \leq x \leq h$ konvergieren die Integrale

$$f_0(x) = \int_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)} \left\{ \left[K_3(k(\lambda)\, x) - \frac{1}{3} \right] E(\lambda, T_0) + \left[K_3(k(\lambda)\,(h-x)) - \frac{1}{3} \right] E(\lambda, T_h) \right\} d\lambda,$$

$$f_1(x) = \int_0^\infty \{ K_2(k(\lambda)\, x)\, E(\lambda, T_0) - K_2(k(\lambda)\,(h-x))\, E(\lambda, T_h) \}\, d\lambda,$$

$$f_2(x) = \int_0^\infty k(\lambda) \{ K_1(k(\lambda)\, x)\, E(\lambda, T_0) + K_1(k(\lambda)\,(h-x))\, E(\lambda, T_h) \}\, d\lambda$$

absolut und gleichmäßig und es gilt $f_0''(x) = f_1'(x) = f_2(x)$; $f_2(x)$ ist überdies stetig.

Beweis. Aus den Ungleichungen (1.6), der Beschränktheit von $k(\lambda) \geq 0$, aus

$$\lim_{k \to +0} \frac{1}{k} \left(K_3(kh) - \frac{1}{3} \right) = \lim_{k \to +0} h\, K_2(kh) = -\frac{h}{2}$$

und

$$0 \geq K_3(kt) - \tfrac{1}{3} \geq K_3(kh) - \tfrac{1}{3} \qquad (0 \leq t \leq h)$$

folgt, daß die Faktoren von $E(\lambda, T_0)$ und $E(\lambda, T_h)$ in den drei Integranden beschränkt sind und ihr Vorzeichen nicht wechseln, weshalb die Integrale nach § 1.3 b) absolut und gleichmäßig konvergieren. Da die Integranden von f_1 bzw. f_2 durch ein- bzw. zweimalige partielle Differentiation nach x aus dem von f_0 hervorgehen, vgl. (1.5), und bis auf endlich viele Stellen λ stetig sind, trifft auch die restliche Behauptung zu.

Hilfsatz 3. Ist $f(x)$ eine über $0 \leq x \leq h$ nichtnegative, L-integrable, beschränkte Funktion, so existiert das L-Integral

$$g(x) = \int_0^\infty \int_0^h k^2(\lambda) \cdot K_0(k(\lambda)\,|x-t|) \cdot E(\lambda, f(t))\, dt\, d\lambda \tag{1.12}$$

und stellt eine für $0 \leq x \leq h$ stetige Funktion von x dar.

Beweis. 1. Der Integrand ist über $(0 \leq t \leq h;\ \lambda \geq 0)$ L-meßbar. Nach § 1.3 a) ist außerdem wegen $0 \leq f(x) \leq C$ auch $E(\lambda, C) \geq E(\lambda, f(t)) \geq 0$, also mit (1.6) für $x \neq t$

$$k^2(\lambda) \cdot K_0(k(\lambda)\,|x-t|) \cdot E(\lambda, C) \leq k^2(\lambda) \cdot K_0(k(\lambda)\,|x-t|) \cdot E(\lambda, f(t)) \leq 0.$$

Das Doppelintegral über die linke Seite dieser Ungleichung existiert aber gemäß § 1.3 b), da nach (1.8)

$$\int_0^h k^2(\lambda) \cdot K_0(k(\lambda)\,|x-t|)\, dt$$

gleichmäßig in (x, λ) beschränkt ist; daher existiert auch das Integral (1.12).

2. Da $K_0(t)$ i.e.S. monoton zunimmt, wird nach (1.8) und (1.8') für $0 \leq x \leq x+\delta \leq h$ und alle $\lambda \geq 0$

$$D_\delta(x,\lambda) = \int_0^h k(\lambda) \cdot \left| K_0\big(k(\lambda)\,|x+\delta-t|\big) - K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) \right| dt$$

$$= \int_0^{x+\frac{\delta}{2}} k(\lambda) \cdot \left[K_0\big(k(\lambda)\,(x+\delta-t)\big) - K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\right] dt +$$

$$+ \int_{x+\frac{\delta}{2}}^h k(\lambda) \cdot \left[K_0\big(k(\lambda)\,(t-x)\big) - K_0\big(k(\lambda)\,|x+\delta-t|\big)\right] dt$$

$$= 4 \cdot \left[1 - K_1\Big(k(\lambda)\,\frac{\delta}{2}\Big)\right] + K_1\big(k(\lambda)\,(x+\delta)\big) - K_1\big(k(\lambda)\,x\big) +$$

$$+ K_1\big(k(\lambda)\,(h-x)\big) - K_1\big(k(\lambda)\,(h-x-\delta)\big).$$

Weil $K_1(t)$ stetig und $k(\lambda)$ beschränkt ist, gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 > 0$, so daß für alle (x,λ) aus $(0 \leq x \leq h;\ \lambda \geq 0)$ und δ mit $0 \leq \delta < \delta_0$

$$0 \leq D_\delta(x,\lambda) < \varepsilon$$

und damit

$$|g(x+\delta) - g(x)| \leq \int_0^\infty k(\lambda)\, E(\lambda, C)\, D_\delta(x,\lambda)\, d\lambda < \varepsilon \int_0^\infty k(\lambda)\, E(\lambda, C)\, d\lambda$$

wird, womit auch die behauptete Stetigkeit bewiesen ist.

Hilfsatz 4. Für eine beliebige, über dem Intervall $0 \leq x \leq h$ stetige und nichtnegative Funktion $f(x)$ konvergieren die Integrale

$$g_0(x) = \int_0^\infty \int_0^h K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, f(t)\big)\, dt\, d\lambda,$$

$$g_1(x) = \int_0^\infty \int_0^h k(\lambda)\, \mathrm{sign}\,(x-t)\, K_1\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, f(t)\big)\, dt\, d\lambda$$

und

$$g_2(x) = 2\int_0^\infty k(\lambda)\, E\big(\lambda, f(x)\big)\, d\lambda + \int_0^\infty \int_0^h k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, f(t)\big)\, dt\, d\lambda$$

absolut und gleichmäßig und stehen in der Relation

$$g_0''(x) = g_1'(x) = g_2(x), \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Beweis. Die Konvergenzbehauptung folgt für g_0 und g_1 mit § 1.3b) aus der Beschränktheit der bei $E\big(\lambda, f(t)\big)$ stehenden Faktoren, für g_2 aus den Hilfsätzen 1 und 3. Da außerdem nach diesen Hilfsätzen $g_2(x)$ stetig ist, wird

$$h(x) = \int_0^x g_2(z)\, dz$$

eine Stammfunktion von $g_2(x)$ sein. Weil sämtliche betrachteten Integrale als L-Integrale existieren, können wir den Satz von Fubini anwenden[9]):

$$h(x)=\int_0^\infty k(\lambda)\left\{2\int_0^x E(\lambda,f(z))\,dz+\int_0^h\int_0^x k(\lambda)\,K_0(k(\lambda)|z-t|)\,E(\lambda,f(t))\,dz\,dt\right\}d\lambda.$$

Nach (1.8) und (1.8′) wird

$$\int_0^h\int_0^x k(\lambda)\,K_0(k(\lambda)|z-t|)\,E(\lambda,f(t))\,dz\,dt$$
$$=\int_0^x\left[K_1(k(\lambda)\,t)+K_1k(\lambda)\,(x-t))-2\right]E(\lambda,f(t))\,dt+$$
$$+\int_x^h\left[K_1(k(\lambda)\,t)-K_1(k(\lambda)\,(t-x))\right]E(\lambda,f(t))\,dt,$$

also

$$h(x)=\int_0^\infty\int_0^h k(\lambda)\,\mathrm{sign}\,(x-t)\,K_1(k(\lambda)|x-t|)\,E(\lambda,f(t))\,dt\,d\lambda+$$
$$+\int_0^\infty\int_0^h k(\lambda)\,K_1(k(\lambda)\,t)\,E(\lambda,f(t))\,dt\,d\lambda,$$

d.h. $h(x)$ unterscheidet sich von $g_1(x)$ nur um eine additive Konstante. Analog wird die Gleichung $g_0'(x)=g_1(x)$ bewiesen.

1.5. Umformungen der Ausgangsgleichung (1.1)

Die oben bewiesenen Hilfsätze erlauben Integration und Differentiation der Gl. (1.1) nach x.

A. Integration. Jede stetige[10]) nichtnegative Lösungsfunktion der Gl. (1.1) löst auch die Gleichung

$$(1.13)\quad\begin{cases}E_g\dfrac{x}{2\pi n^2}+D_0\dfrac{1}{2\pi n^2}=\displaystyle\int_0^\infty\int_0^h K_2(k(\lambda)|x-t|)\,E(\lambda,T(t))\,dt\,d\lambda-\int_0^\infty\frac{1}{k(\lambda)}\times\\ \times\left\{\left[K_3(k(\lambda)\,x)-\frac{1}{3}\right]E(\lambda,T_0)+\left[K_3(k(\lambda)\,(h-x))-\frac{1}{3}\right]E(\lambda,T_h)\right\}d\lambda-\dfrac{\varkappa}{2\pi n^2}T(x)\end{cases}$$

mit einer geeigneten Konstanten D_0. Umgekehrt ist jede stetige nichtnegative Lösungsfunktion von (1.13) Lösung von (1.1) (unabhängig von der Konstanten D_0).

Beweis. Sämtliche Summanden der Gl. (1.13) bis auf den letzten sind nach Hilfsatz 2 und 4 differenzierbar, also auch $T(x)$, und die Differentiation ergibt (1.1).

---

[9]) Es wird die auf nicht-beschränkte Ordinatenmengen verallgemeinerte Form dieses Satzes benutzt, wie sie etwa bei Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung III (Berlin 1938), S. 95—96, bewiesen wurde.

[10]) Für $\varkappa>0$ ist diese Forderung trivial erfüllt.

B. Differentiation. Jede stetige[10]) nichtnegative Lösungsfunktion der Gl. (1.1) löst auch die Gleichung

$$(1.14)\quad \begin{cases} 0 = 2\int_0^\infty k(\lambda)\,E(\lambda, T(x))\,d\lambda + \int_0^\infty \int_0^h k^2(\lambda)\,K_0(k(\lambda)\,|x-t|)\,E(\lambda, T(t))\,dt\,d\lambda - \\ -\int_0^\infty k(\lambda)\{K_1(k(\lambda)\,x)\,E(\lambda, T_0) + K_1(k(\lambda)\,(h-x))E(\lambda, T_h)\}\,d\lambda - \frac{\varkappa}{2\pi n^2}\,T''(x), \end{cases}$$

und umgekehrt ist jede stetige[10]) nichtnegative Lösungsfunktion von (1.14) auch Lösung von (1.1) mit einer geeigneten Konstanten E_g.

Beweis. Wie in A. geht (1.1) durch Differentiation in (1.14) über.

Aus den Hilfsätzen 1 und 3 und aus der Gl. (1.14) folgt noch das

Korollar: a) Für $\varkappa > 0$ ist jede nichtnegative Lösung $T(x)$ von (1.1) zweimal stetig differenzierbar;

b) für $\varkappa = 0$ und $k(\lambda) \not\equiv 0$[11]) ist jede beschränkte, nichtnegative und L-integrable Lösungsfunktion der Gl. (1.14) stetig.

§ 2. Der Eindeutigkeitsbeweis

Bevor wir uns mit der Existenz von Lösungen beschäftigen, soll nachgewiesen werden, daß die Lösungen durch die in das Problem eingehenden Parameter eindeutig bestimmt sind. Den trivialen Fall $k(\lambda) \equiv 0$[11]) wollen wir dabei von der Betrachtung ausschließen, da er in § 3 und § 4 vollständig behandelt werden wird.

Die als Daten in die Gl. (1.1) eingehenden Parameter T_0, T_h, $\varkappa$, n, h und die Funktion $k(\lambda) \not\equiv 0$[11]) seien beliebig im Rahmen der ihnen in § 1 auferlegten Voraussetzungen gewählt und für das Folgende festgehalten.

2.1. Ein Lemma.

Das Kernstück der Eindeutigkeitsbeweise unter **2.2** bildet folgendes

Lemma: $T_0(x)$ und $T_1(x)$ seien zwei stetige nichtnegative Lösungen der Gl. (1.1) mit zwei beliebigen zugehörigen Konstanten E_{g_0} und E_{g_1}. Dann gilt für die Differenz

$$(2.1)\qquad u(x) = T_0(x) - T_1(x)$$

eine der fünf Behauptungen (a) bis (c):

(a) $u(0) > 0$, $u'(0) < 0$, $u(h) < 0$ und $u'(h) < 0$
und $u(x)$ nimmt im Intervall $[0, h]$ sowohl positive als auch negative Werte an;

(a') $u(0) < 0$, $u'(0) > 0$, $u(h) > 0$ und $u'(h) > 0$
und $u(x)$ nimmt im Intervall $[0, h]$ sowohl positive als auch negative Werte an;

[11]) Vgl. Fußnote [8]).

(b) $u(x) \geqq 0$ für $0 \leqq x \leqq h$ und
$u(0) > 0,\ u'(0) < 0$, oder [12])
$u(h) > 0,\ u'(h) > 0$;

(b') $u(x) \leqq 0$ für $0 \leqq x \leqq h$ und
$u(0) < 0,\ u'(0) > 0$, oder
$u(h) < 0,\ u'(h) < 0$;

(c) $u(x) = 0$ für $0 \leqq x \leqq h$.

Im Falle $x = 0$ gilt die Behauptung (c).

Beweis. Wir bezeichnen mit $U(\lambda, x)$ die Differenz

$$U(\lambda, x) = E\left(\lambda, T_0(x)\right) - E\left(\lambda, T_1(x)\right). \tag{2.2}$$

Da $E(\lambda, T)$ für positives λ als Funktion von T i.e.S. monoton zunimmt, vgl. § 1.3a), ist

$$\operatorname{sign} u(x) = \operatorname{sign} U(\lambda, x) \quad \text{für alle } \lambda > 0,\ 0 \leqq x \leqq h. \tag{2.3}$$

Mit P und Q bezeichnen wir die beiden Mengen

$$P = \{x \mid x \in (0, h) = J, \text{ und } u(x) > 0\},$$
$$Q = \{x \mid x \in J \text{ und } u(x) < 0\}$$

und machen folgende Fallunterscheidung.

I. Fall: $P \neq \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von $u(x)$ ist P offen, also eindimensional L-meßbar und als Summe höchstens abzählbar vieler punktfremder offener Intervalle darstellbar:

$$P = \sum_1^N {}_\nu (x_{\nu 0}, x_{\nu 1}),$$

wobei N eine natürliche Zahl oder das Symbol ∞ bedeutet.

Als stetige nichtnegative Lösung der Gl. (1.1) befriedigt $T_0(x)$ bzw. $T_1(x)$ auch die Gl. (1.14), weshalb mit (2.1) und (2.2) für $0 \leqq x \leqq h$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_0^h k^2(\lambda) K_0\left(k(\lambda)|x-t|\right) U(\lambda, t)\, dt\, d\lambda + 2 \int_0^\infty k(\lambda)\, U(\lambda, x)\, d\lambda = \frac{x}{2\pi n^2} u''(x). \tag{2.4}$$

Nach Hilfsatz 1 und 3 sind die Summanden der Gl. (2.4) stetige Funktionen von x, also über P L-integrabel. Da die Integrale der Gl. (2.4) als L-Integrale existieren, können wir den Satz von Fubini anwenden [13]):

$$\left\{ \int_0^\infty \int_0^h \int_P k^2(\lambda)\, K_0\left(k(\lambda)|x-t|\right) \cdot U(\lambda, t)\, dx\, dt\, d\lambda + \right. \tag{2.5}$$
$$\left. + 2 \int_0^\infty \int_P k(\lambda)\, U(\lambda, x)\, dx\, d\lambda = \frac{x}{2\pi n^2} \cdot \int_P u''(x)\, dx. \right.$$

[12]) „oder" ist hier und im folgenden nicht im ausschließenden Sinne zu verstehen.

[13]) Vgl. Fußnote [9]) auf S. 361; die dort vorausgesetzte Eigenschaft des Integranden, sein Vorzeichen nicht zu wechseln, erfüllen wir hier durch die in (2.2) gegebene additive Aufspaltung von $U(\lambda, t)$.

Mit der Bezeichnung

$$F(\lambda, t) = \int_P k(\lambda) \cdot K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,dx \tag{2.6}$$

können wir (2.5) wegen

$$\int_0^h F(\lambda,t)\,U(\lambda,t)\,dt + 2\int_P U(\lambda,x)\,dx = \int_P \big(2+F(\lambda,x)\big)\,U(\lambda,x)\,dx + \int_{J-P} F(\lambda,x)\,U(\lambda,x)\,dx$$

auch in der Form wiedergeben:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty k(\lambda)\cdot\Big\{\int_P \big(2+F(\lambda,x)\big)\,U(\lambda,x)\,dx + \int_{J-P} F(\lambda,x)\,U(\lambda,x)\,dx\Big\}\,d\lambda \\ \qquad = \dfrac{\varkappa}{2\pi n^2}\displaystyle\int_P u''(x)\,dx. \end{cases} \tag{2.7}$$

A. Die Eigenschaft der Volladditivität des L-Integrals wenden wir auf (2.6) an:

$$F(\lambda,t) = \sum_1^N{}_\nu \int_{x_{\nu 0}}^{x_{\nu 1}} k(\lambda)\cdot K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,dx = \sum_1^N{}_\nu f_\nu(\lambda,t),$$

wobei nach (1.8) und (1.8′)

$$f_\nu(\lambda,t) = \begin{cases} K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 1}-t)\big) - K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 0}-t)\big), & \text{falls } 0\le t\le x_{\nu 0}, \\ K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\nu 0})\big) + K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 1}-t)\big) - 2, & \text{falls } x_{\nu 0}\le t\le x_{\nu 1}, \\ K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\nu 0})\big) - K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\nu 1})\big), & \text{falls } x_{\nu 1}\le t\le h. \end{cases} \tag{2.8}$$

Die Reihe $\sum_1^N{}_\nu f_\nu(\lambda,t)$ konvergiert absolut, da für alle ν $f_\nu(\lambda,t)\le 0$ ist; sie kann also umgeordnet werden:

$$F(\lambda,t) = \begin{cases} \sum_{t\le x_{\nu 0}}{}_\nu f_\nu(\lambda,t) + \sum_{x_{\varrho 1}\le t}{}_\varrho f_\varrho(\lambda,t), & \text{falls } t\notin P, \\ \sum_{x_{\varrho 1}\le t}{}_\varrho f_\varrho(\lambda,t) + \sum_{t\le x_{\nu 0}}{}_\nu f_\nu(\lambda,t) + f_\tau(\lambda,t), & \text{falls } x_{\tau 0}<t<x_{\tau 1}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Da bei festem $\lambda\ge 0$ und $t\in[0,h]$ $K_1\big(k(\lambda)\,(x-t)\big)$ eine für $t\le x\le h$ monoton abnehmende, $K_1\big(k(\lambda)\,(t-x)\big)$ eine für $0\le x\le t$ monoton zunehmende Funktion von x ist, vgl. (1.7), wird für $x_{\tau 0}<t<x_{\tau 1}$

$$\begin{cases} K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\tau 1}-t)\big) + \sum_{t\le x_{\nu 0}}{}_\nu \big\{K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 1}-t)\big) - K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 0}-t)\big)\big\} \\ \qquad \ge K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\tau 1}-t)\big) + K_1\big(k(\lambda)\,(h-t)\big) - K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\tau 1}-t)\big) \\ \qquad = K_1\big(k(\lambda)\,(h-t)\big) > 0 \qquad \text{und} \\ K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\tau 0})\big) + \sum_{x_{\varrho 1}\le t}{}_\varrho \big\{-K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\varrho 1})\big) + K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\varrho 0})\big)\big\} \\ \qquad \ge K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\tau 0})\big) + K_1\big(k(\lambda)\,t\big) - K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\tau 0})\big) \\ \qquad = K_1\big(k(\lambda)\,t\big) > 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Für beliebiges nichtnegatives λ folgt aus (2.6)

$$F(\lambda, x) \leq 0, \quad \text{falls} \quad x \in J, \tag{2.11}$$

aus (2.8), (2.9) und (2.10)

$$2 + F(\lambda, x) > 0, \quad \text{falls} \quad x \in P. \tag{2.12}$$

Nach Definition von P war

$$u(x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x \in P, \\ \leq 0 & \text{für} \quad x \in J - P, \end{cases}$$

also ist nach (2.3) für alle positiven λ

$$U(\lambda, x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x \in P, \\ \leq 0 & \text{für} \quad x \in J - P. \end{cases} \tag{2.13}$$

Mit (2.11), (2.12) und (2.13) erhalten wir wegen der Voraussetzungen über $k(\lambda)$:

$$\int_0^\infty k(\lambda) \left\{ \int_P \left(2 + F(\lambda, x)\right) U(\lambda, x)\, dx + \int_{J-P} F(\lambda, x)\, U(\lambda, x)\, dx \right\} d\lambda > 0. \tag{2.14}$$

Falls $\varkappa = 0$ ist, widerspricht (2.14) der Gl. (2.7), weshalb für $\varkappa = 0$ der Fall $P \neq \emptyset$ nicht eintreten kann. Betrachten wir also weiter den Fall $\varkappa > 0$.

B. Für alle ν, für die $x_{\nu 0} > 0$ und $x_{\nu 1} < h$ ist, wird

$$\int_{x_{\nu 0}}^{x_{\nu 1}} u''(x)\, dx = u'(x_{\nu 1}) - u'(x_{\nu 0}) \leq 0,$$

da $u''(x)$ stetig ist und nach Definition der $x_{\nu i}$

$$u(x_{\nu 0}) = u(x_{\nu 1}) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < x_{\nu 0},\ x_{\nu 1} < h$$

und

$$u(x) > 0 \quad \text{für} \quad x_{\nu 0} < x < x_{\nu 1}.$$

Nach (2.7) und (2.14) wird aber

$$\int_P u''(x)\, dx = \sum_1^N{}_\nu \int_{x_{\nu 0}}^{x_{\nu 1}} u''(x)\, dx > 0;$$

deshalb muß für eines der ν, etwa $\nu = p$,

$$x_{p0} = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{x_{p1}} u''(x)\, dx = u'(x_{p1}) - u'(0) > 0 \tag{2.15}$$

oder, etwa für $\nu = q$,

$$x_{q1} = h \quad \text{und} \quad \int_{x_{q0}}^{h} u''(x)\, dx = u'(h) - u'(x_{q0}) > 0 \tag{2.16}$$

sein. Nach Definition von P wird dann außerdem

$$u(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < x_{p1} \quad \text{bzw.} \quad x_{q0} < x < h \tag{2.17}$$

und $u(x_{p1})=0$ bzw. $u(x_{q0})=0$, also $u'(x_{p1})\leq 0$ bzw. $u'(x_{q0})\geq 0$. Daraus folgt aber mit (2.15) und (2.16)

$$u'(0)<0 \quad \text{bzw.} \quad u'(h)>0. \tag{2.18}$$

Die Ungleichungen (2.17) und (2.18) sind nur dann verträglich, wenn

$$u(0)>0 \quad \text{bzw.} \quad u(h)>0$$

ist. Es ergibt sich also für $u(x)$ die Bedingung:

$$\begin{cases} u(0)>0 \quad \text{und} \quad u'(0)<0 \quad \text{oder} \\ u(h)>0 \quad \text{und} \quad u'(h)>0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Falls nun die Menge Q leer ist, beschreibt (2.19) den Fall (b) der Behauptung. Ist Q nicht leer, so stellen wir die obige Betrachtung auch für $\bar{u}(x)=-u(x)$ an und erhalten

$$u(0)<0 \quad \text{und} \quad u'(0)>0$$

oder

$$u(h)<0 \quad \text{und} \quad u'(h)<0,$$

was zusammen mit (2.19) die Fälle (a) und (a') der Behauptung beschreibt.

II. Fall: $P=\emptyset$ und $Q\neq\emptyset$. Diesen Fall führen wir durch Betrachtung der Funktion $\bar{u}(x)=-u(x)$ auf den Fall I zurück und erhalten: Für $\varkappa=0$ ist auch dieser Fall unmöglich, für $\varkappa>0$ gilt die Behauptung (b').

III. Fall: $P=Q=\emptyset$. Dieser Fall entspricht der Behauptung (c), da wegen der Stetigkeit von $u(x)$ dann auch $u(0)=u(h)=0$ ist.

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

2.2. Die Eindeutigkeitssätze

Satz 1 (*Eindeutigkeitssatz für den Fall $\varkappa=0$*): *Falls $\varkappa=0$ ist, gibt es höchstens eine stetige und nichtnegative Lösungsfunktion der Gl.* (1.1)[14].

Beweis. Die Aussage ist bereits im Lemma enthalten.

Anmerkung. Beim Beweis des Lemmas hatten wir uns nicht der Gl. (1.1), sondern der Gl. (1.14) bedient. Unter Berücksichtigung des Korollars von S. 362 können wir somit für die Gl. (1.14) die schärfere Aussage folgern: Falls $\varkappa=0$ ist, gibt es höchstens eine L-integrable, beschränkte, nichtnegative Lösungsfunktion der Gl. (1.14).

Satz 2 (*Eindeutigkeitssatz für den Fall $\varkappa>0$*): *Falls $\varkappa>0$ ist, wird eine nichtnegative Lösungsfunktion der Gl.* (1.1) *eindeutig durch jedes der vier Parameterpaare bestimmt:*

(1) *Die beiden Randwerte $T(0)$ und $T(h)$,*

(2) *einen der Randwerte $T(0)$ oder $T(h)$ und die Konstante E_g,*

[14]) Man beachte, daß unserer Problemstellung entsprechend die Konstante E_g nicht vorgegeben, sondern erst durch die Lösung bestimmt wird.

(3) *einen der Randwerte* $T(0)$ *oder* $T(h)$ *und einen der Ableitungsrandwerte* $T'(0)$ *oder* $T'(h)$,

(4) *die beiden Ableitungsrandwerte* $T'(0)$ *und* $T'(h)$.

Wir bemerken, daß wohl die Behauptung bezüglich der Paare (1) bis (3), nicht aber bezüglich des Paares (4) den Eindeutigkeitsaussagen über eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung entspricht.

Beweis. Es seien $T_0(x)$ und $T_1(x)$ zwei nichtnegative Lösungsfunktionen von (1.1). Die Voraussetzungen des Lemmas sind erfüllt, also muß $u(x) = T_0(x) - T_1(x)$ einer der fünf Behauptungen (a) bis (c) des Lemmas genügen. Der Reihe nach wird nun vorausgesetzt, daß die Lösungsfunktionen $T_0(x)$ und $T_1(x)$ in den Parameterpaaren (1) bis (4) übereinstimmen:

(1) Da $u(0) = u(h) = 0$ ist, kann nur die Aussage (c) des Lemmas gelten: $T_0(x) = T_1(x)$ für $0 \leq x \leq h$.

(2) Da $u(0) = 0$ oder $u(h) = 0$ ist, können nur die Fälle (b), (b') oder (c) des Lemmas zutreffen. Aus (1.1) folgt wegen $E_{g0} = E_{g1}$:

$$\frac{\varkappa}{2\pi n^2} u'(0) = -\int_0^\infty \int_0^h k(\lambda)\, K_1\big(k(\lambda)\, t\big)\, U(\lambda, t)\, dt\, d\lambda \tag{2.20}$$

und

$$\frac{\varkappa}{2\pi n^2} u'(h) = \int_0^\infty \int_0^h k(\lambda)\, K_1\big(k(\lambda)\,(h - t)\big)\, U(\lambda, t)\, dt\, d\lambda. \tag{2.21}$$

Im Falle (b) ist nun $u(0) > 0$ oder $u(h) > 0$ und $u(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq h$; also wird wegen $K_1(t) > 0$ und (2.3) die rechte Seite der Gl. (2.20) negativ, die der Gl. (2.21) positiv:

$$u'(0) < 0 \quad \textit{und} \quad u'(h) > 0.$$

Da andrerseits $u(0) = 0$ oder $u(h) = 0$ sein soll, kann die Bedingung „$u(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq h$" und damit (b) nicht erfüllt sein. $u(x)$ kann auch (b') nicht genügen, wie man durch Umkehrung aller Ungleichheitszeichen in obiger Betrachtung einsieht. Somit bleibt nur die Möglichkeit (c).

(3) Wie im Falle (2) kann auch hier $u(x)$ höchstens die Behauptungen (b), (b') oder (c) des Lemmas erfüllen. Ist

$$u(0) = 0 \quad \text{und} \quad u'(h) = 0$$

oder

$$u(h) = 0 \quad \text{und} \quad u'(0) = 0,$$

so kann nur die Behauptung (c) des Lemmas zutreffen.

Es sei nun

$$u(0) = u'(0) = 0. \tag{2.22}$$

Würde dann (b) gelten, so wäre

$$u(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h \quad \text{und} \quad u(h) > 0, \tag{2.23}$$

also wegen (1.14), (2.3), $u(0)=0$ und $K_0(t)<0$:

$$\frac{\varkappa}{2\pi n^2}\,u''(0)=\int_0^\infty\int_0^h k^2(\lambda)\,K_0\big(k(\lambda)\,t\big)\,U(\lambda,t)\,dt\,d\lambda<0. \tag{2.24}$$

Da $u''(x)$ stetig ist, folgt daraus mit (2.22), daß $u(x)$ in einer rechtsseitigen Umgebung von $x=0$ negativ wird, im Widerspruch zu (2.23).

Würde (b') gelten, so wäre

$$u(x)\leq 0 \quad \text{für} \quad 0\leq x\leq h \quad \text{und} \quad u(h)<0, \tag{2.25}$$

andrerseits aber, (2.24) entsprechend, $u''(0)>0$, und damit wegen (2.22) $u(x)$ in einer rechtsseitigen Umgebung von $x=0$ positiv, im Widerspruch zu (2.25).

Analog oder durch Betrachtung von $v(x)=u(h-x)$ können wir die Annahme zum Widerspruch führen, daß $u(x)$ im Falle

$$u(h)=u'(h)=0$$

der Behauptung (b) oder (b') des Lemmas genügt.

Es bleibt also auch hier nur die Möglichkeit (c): $T_0(x)\equiv T_1(x)$.

(4) Wegen $u'(0)=u'(h)=0$ kann nur der Fall (c) des Lemmas eintreten.

§ 3. Der Existenzbeweis für den Fall fehlenden Differentialbestandteils ($\varkappa=0$)

Der Fall $\varkappa=0$ entspricht physikalisch dem Fall reiner Wärmestrahlung. Der Differentialbestandteil fällt aus der Gl. (1.1) heraus, so daß wir es mit einer reinen nichtlinearen Integralgleichung erster Art zu tun haben.

In dem trivialen Fall, in dem auch $k(\lambda)\equiv 0$ wird, geht die zu lösende Gl. (1.1) vermittels (1.6) und (1.10) in die Gleichung

$$E_g=2\pi n^2\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\big[E(\lambda,T_0)-E(\lambda,T_h)\big]\,d\lambda=\sigma n^2(T_0^4-T_h^4)$$

über, wird also von jeder beliebigen Funktion $T(x)$ gelöst. Physikalisch ist dieser Fall als Wärmestrahlung durch das Vakuum zu interpretieren, in dem „Temperatur" ja nicht definiert werden kann. Wir betrachten also weiterhin den nichttrivialen Fall $k(\lambda)\not\equiv 0$ [vgl. Fußnote 8 von S. 358].

3.1. Der Existenzbeweis

An Stelle der Gl. (1.1) behandeln wir die äquivalente Gl. (1.14), da diese eine Gleichung zweiter Art ist:

$$\Phi\big(T(x)\big)=F(x)-\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^h k^2(\lambda)\,K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda,T(t)\big)\,dt\,d\lambda, \tag{3.1}$$

wobei

$$F(x)=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty k(\lambda)\big\{K_1\big(k(\lambda)\,x\big)\,E(\lambda,T_0)+K_1\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)\,E(\lambda,T_h)\big\}\,d\lambda$$

und [vgl. (1.11)]

$$\Phi(x) = \int_0^\infty k(\lambda)\, E(\lambda, x)\, d\lambda$$

bedeuten. Den durch das Doppelintegral der rechten Seite von (3.1) dargestellten Funktionaloperator wollen wir durch das Symbol $J_x[T]$ abkürzen.

Unser Ziel wird es nunmehr sein, die Lösung durch ein Iterationsverfahren zu konstruieren. Auf die in § 1.1 geforderten Randbedingungen $T(0) = R_0$ und $T(h) = R_h$ müssen und können wir dabei nicht achten, da nach Satz 1 die Lösungsfunktion schon durch die in die Gl. (3.1) eingehenden Parameter eindeutig bestimmt ist.

Ist $f(x)$ eine beliebige, über $0 \leq x \leq h$ stetige und nichtnegative Funktion, so ist

$$J_x[f] \leq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h,$$

da $K_0(t)$ negativ und $E(\lambda, f)$ nichtnegativ ist, vgl. (1.6) und (1.9). Weil $K_1(t)$ außerdem positiv ist, wird

$$F(x) - \tfrac{1}{2} J_x[f] \geq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h.$$

Somit ordnet nach Hilfsatz 1 und 3 die Vorschrift

$$g(x) = \Phi^{-1}\left(F(x) - \tfrac{1}{2} J_x[f]\right) \qquad (0 \leq x \leq h) \tag{3.2}$$

der Funktion $f(x)$ eindeutig eine stetige und nichtnegative Funktion $g(x)$ zu, die mit $A_x[f]$ bezeichnet werden soll.

Über die Zuordnung A können wir folgendes aussagen:

Hilfsatz 5. Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei stetige Funktionen über $[0, h]$, die die Ungleichung

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \qquad (0 \leq x \leq h)$$

erfüllen, so gilt für ihre J- und A-Bilder

$$J_x[f_2] \leq J_x[f_1] \leq 0 \leq A_x[f_1] \leq A_x[f_2] \qquad (0 \leq x \leq h),$$

d.h. J ist ein monoton abnehmender, A ein monoton zunehmender Operator.

Beweis. Die Aussage für den Operator J folgt aus $K_0(t) < 0$, $E_x(\lambda, x) > 0$ und $J_x[0] = 0$. Damit trifft aber wegen der Monotonie von Φ^{-1} (vgl. Hilfsatz 1) auch die Behauptung über den Operator A zu.

Hilfsatz 6. Ist $f(x)$ eine über $[0, h]$ stetige Funktion, die der Ungleichung

$$0 \leq f(x) \leq \operatorname{Max}(T_0, T_h) = S \qquad (0 \leq x \leq h)$$

bzw.

$$0 \leq s = \operatorname{Min}(T_0, T_h) \leq f(x) \qquad (0 \leq x \leq h)$$

genügt, so gilt für ihr A-Bild

$$0 \leq A_x[f] \leq S \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq s \leq A_x[f] \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Beweis. Es sei etwa $0 \leq f(x) \leq S$. Durch Anwendung des Hilfsatzes 5 genügt es zu zeigen, daß $A_x[S] \leq S$ wird. Nun ist nach (1.8)

$$F(x) - \tfrac{1}{2} J_x[S] = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty k(\lambda) \Big\{ K_1(k(\lambda)\, x)\, E(\lambda, T_0) + K_1(k(\lambda)\,(h-x))\, E(\lambda, T_h) - \\ - \int_0^\infty k(\lambda)\, K_0(k(\lambda)\,|x-t|)\, E(\lambda, S)\, dt \Big\}\, d\lambda$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty k(\lambda) \big\{ 2E(\lambda, S) - K_1(k(\lambda)\, x)\, [E(\lambda, S) - E(\lambda, T_0)] - \\ - K_1(k(\lambda)\,(h-x))\, [E(\lambda, S) - E(\lambda, T_h)] \big\}\, d\lambda$$

$$\leq \int_0^\infty k(\lambda)\, E(\lambda, S)\, d\lambda = \Phi(S),$$

da $K_1(t) > 0$ ist; also ist nach Definition (3.2) von A und Hilfsatz 1

$$A_x[S] = \Phi^{-1}\big(F(x) - \tfrac{1}{2} J_x[S]\big) \leq S.$$

Der Beweis für den Fall $0 \leq s \leq f(x)$ verläuft analog.

Wir betrachten nun die durch folgende Definition gegebene Funktionenfolge:

$$(3.3) \qquad \left.\begin{array}{l} f_0(x) = \operatorname{Max}(T_0, T_h) = S, \\ f_n(x) = A_x[f_{n-1}] \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Nach Hilfsatz 6 besteht zwischen $f_0(x)$ und $f_1(x)$ die Ungleichung

$$f_1(x) \leq f_0(x) \qquad (0 \leq x \leq h),$$

also besteht sie nach Hilfsatz 5 für sämtliche Indizes n $(= 0, 1, 2, \ldots)$:

$$(3.4) \qquad f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Da außerdem für $0 \leq x \leq h$

$$\operatorname{Min}(T_0, T_h) \leq \operatorname{Max}(T_0, T_h) = f_0(x)$$

gilt, erfüllen nach Hilfsatz 6 die Funktionen $f_n(x)$ die Ungleichung

$$(3.5) \qquad 0 \leq \operatorname{Min}(T_0, T_h) \leq f_n(x) \qquad (0 \leq x \leq h;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Ungleichungen (3.4) und (3.5) besagen, daß die in (3.3) definierte Folge $\{f_n(x)\}$ eine monoton abnehmende, nach unten beschränkte Funktionenfolge ist, woraus folgt: Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ ist eine gegen eine nichtnegative Funktion $T(x)$ konvergierende Folge,

$$(3.6) \qquad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = T(x) \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Da wegen der Stetigkeit der Funktionen $f_n(t)$ (≥ 0)

$$k^2(\lambda)\, K_0(k(\lambda)\,|x-t|)\, E(\lambda, f_n(t))$$

über $(0 \leq t \leq h;\ \lambda \geq 0)$ L-integrabel ist (vgl. Hilfsatz 3), ist nach dem Satz von Lebesgue [15]) auch

$$k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, T(t)\big)$$

über dem genannten Bereich L-integrabel, und zwar ist

$$(3.7)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^h k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, f_n(t)\big)\, dt\, d\lambda \\ \qquad = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^h k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, T(t)\big)\, dt\, d\lambda. \end{cases}$$

Nach der Definitionsgleichung (3.3) erfüllen die Funktionen $f_n(t)$ die Gleichung

$$\Phi\big(f_{n+1}(x)\big) = F(x) - \tfrac{1}{2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^h k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, f_n(t)\big)\, dt\, d\lambda,$$

woraus mit (3.7) und der Stetigkeit von Φ folgt: $T(x)$ löst die Gl. (3.1).

Nach dem Satz von Lebesgue ist $T(x)$ selbst eine L-integrable, also nach dem Korollar von S. 362 eine stetige Funktion. Nun behauptet ein bekannter Satz: Eine monotone Folge von über einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktionen, die daselbst gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert gleichmäßig. Demnach haben wir, Satz 1 berücksichtigend, folgenden Satz bewiesen:

Satz 3 (*Existenzsatz für den Fall* $\varkappa = 0$): *Die durch* (3.3) *definierte Funktionenfolge konvergiert monoton abnehmend und gleichmäßig gegen die eindeutig bestimmte stetige und nichtnegative Lösungsfunktion* $T(x)$ *der Gl.* (3.1) *und damit* (1.1). *Die Funktion* $T(x)$ *wird beschränkt durch die Konstanten* $\mathrm{Min}(T_0, T_h)$ *und* $\mathrm{Max}(T_0, T_h)$.

Auf dem gleichen Wege, die Hilfsätze 5 und 6 benutzend, können wir beweisen:

Satz 4: *Ist* $u_0(x)$ *eine stetige Funktion, die für* $0 \leq x \leq h$ *folgende beiden Ungleichungen erfüllt:*

$$\mathrm{Min}(T_0, T_h) \leq u_0(x) \leq \mathrm{Max}(T_0, T_h)$$

und

$$u_0(x) \leq A_x[u_0] \quad \text{bzw.} \quad u_0(x) \geq A_x[u_0],$$

so konvergiert die Funktionenfolge

$$(3.8)\qquad u_n(x) = A_x[u_{n-1}] \qquad (0 \leq x \leq h;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gleichmäßig und monoton zunehmend bzw. abnehmend gegen die stetige und nichtnegative Lösungsfunktion $T(x)$ *der Gl.* (3.1) *und damit* (1.1).

---

[15]) Wir wenden wieder die auf nicht-beschränkte Ordinatenmengen verallgemeinerte Form dieses Satzes an, wie er etwa bei HAUPT-AUMANN[9]), S. 78, bewiesen ist („Satz von der gliedweisen Integrierbarkeit").

Insbesondere erfüllt die Funktionenfolge

$$(3.9)\qquad \left.\begin{array}{l} g_0(x) = \mathrm{Min}(T_0, T_h) = s, \\ g_n(x) = A_x[g_{n-1}] \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{array}\right\} \quad (0 \leq x \leq h)$$

die Voraussetzungen dieses Satzes, da nach Hilfsatz 6 $s \leq A_x[s]$ wird. Wir kennen also zwei Folgen, die monoton und gleichmäßig gegen die Lösung konvergieren, nämlich die Folge (3.3) von oben, die Folge (3.9) von unten.

3.2. Monotonie und Randwerte der Lösungsfunktion

Falls $T_0 = T_h$ ist, wird die Gl. (3.1) durch die Funktion $T(x) \equiv T_0$ gelöst, da dann nach Hilfsatz 6 sämtliche Funktionen der Folge (3.3) identisch T_0 sind. Wir wollen uns also dem nichttrivialen Fall $T_0 \neq T_h$ zuwenden.

Hilfsatz 7. Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion, die für $0 \leq x \leq h$ der Ungleichung

$$(3.10)\qquad s = \mathrm{Min}(T_0, T_h) \leq f(x) \leq \mathrm{Max}(T_0, T_h) = S$$

genügt.

Falls dann $T_0 > T_h$ und $f(x)$ i.w.S. monoton abnehmend ist, wird die Funktion $g(x) = A_x[f]$ i.e.S. monoton abnehmen, und falls $T_0 < T_h$ und $f(x)$ i.w.S. monoton zunehmend ist, wird die Funktion $g(x)$ i.e.S. monoton zunehmen.

Beweis. Es sei $T_0 > T_h$ und $f(x)$ i.w.S. monoton abnehmend. Dann gilt für alle $\lambda \geq 0$ und alle x, δ mit $0 \leq x < x + \delta \leq h$ die Ungleichung

$$(3.11)\quad \left\{\begin{array}{l} \int_0^h k(\lambda)\,[K_0(k(\lambda)\,|x+\delta-t|) - K_0(k(\lambda)\,|x-t|)]\,E(\lambda, f(t))\,dt \\ \geq E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right) \int_0^h k(\lambda)\,[K_0(k(\lambda)\,|x+\delta-t|) - K_0(k(\lambda)\,|x-t|)]\,dt \\ = E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right)\{K_1(k(\lambda)\,(h-x-\delta)) + K_1(k(\lambda)\,(x+\delta)) - \\ \qquad - K_1(k(\lambda)\,(h-x)) - K_1(k(\lambda)\,x)\}, \end{array}\right.$$

da der Wert der eckigen Klammer im Integranden der linken Seite dieser Ungleichung im Intervall $0 \leq t < x + \frac{\delta}{2}$ positiv, für $x + \frac{\delta}{2} < t \leq h$ negativ ist. Mit (3.11) erhalten wir

$$(3.12)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi(g(x+\delta)) - \Phi(g(x)) \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty k(\lambda) \left\{\left[E(\lambda, T_h) - E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right)\right] \times \right. \\ \qquad \times [K_1(k(\lambda)\,(h-x-\delta)) - K_1(k(\lambda)\,(h-x))] + \\ \qquad \left. + \left[E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right) - E(\lambda, T_0)\right][K_1(k(\lambda)\,x) - K_1(k(\lambda)\,(x+\delta))]\right\} d\lambda. \end{array}\right.$$

Wegen $E_T(\lambda, T) > 0$ und (3.10) ist sowohl

$$E(\lambda, T_h) - E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right) \leq 0 \quad \text{als auch} \quad E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right) - E(\lambda, T_0) \leq 0$$

und mindestens einer der beiden Ausdrücke für $\lambda > 0$ negativ, da ja $T_0 \neq T_h$. Weil $K_1(t)$ i.e.S. monoton abnimmt, folgt daraus, daß für alle positiven λ mit $k(\lambda) > 0$ der Integrand der rechten Seite von (3.12) negativ wird, also

$$\Phi\big(g(x+\delta)\big) < \Phi\big(g(x)\big),$$

d.h. wegen der Monotonie von Φ^{-1} (vgl. Hilfsatz 1): $g(x)$ nimmt i.e.S. monoton ab. Analog wird der Beweis für den Fall $T_0 < T_h$ geführt.

Satz 5 (*Monotoniesatz für den Fall* $\varkappa = 0$). *Ist* $T_0 > T_h$ *bzw.* $T_0 < T_h$, *so nimmt die Lösungsfunktion* $T(x)$ *der Gl.* (3.1) *i.e.S. monoton ab bzw. zu.*

Beweis. Wir benutzen die Konstruktion der Lösung durch die Folge (3.3). Es sei etwa $T_0 > T_h$. Die Funktion $f_0(x) \equiv T_0$ nimmt i.w.S. monoton ab, weshalb wegen Hilfsatz 7 sämtliche Funktionen $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i.e.S. abnehmen und damit die Limesfunktion $T(x)$ i.w.S.; also nimmt nach Hilfsatz 7 auch die Funktion $A_x[T] = T(x)$ i.e.S. monoton ab. Ebenso schließen wir im Falle $T_0 > T_h$.

Vom physikalischen Standpunkt interessieren die Randwerte der Lösungsfunktion, insbesondere die Frage, ob $T(0) = T_0$ und $T(h) = T_h$ ist. Abgesehen vom trivialen Fall $T_0 = T_h$ werden wir diese Frage verneinen. Es sei etwa $T_0 > T_h$. Dann wird für die nach Satz 5 i.e.S. monoton abnehmende Lösungsfunktion $T(x)$

$$(3.13)\quad \begin{cases} \Phi\big(T(0)\big) - \Phi(T_0) \\ = \frac{1}{2}\int_0^\infty k(\lambda)\Big\{K_1\big(k(\lambda)h\big)E(\lambda, T_h) - E(\lambda, T_0) - \int_0^h k(\lambda)K_0\big(k(\lambda)t\big)E\big(\lambda, T(t)\big)\,dt\Big\}\,d\lambda \\ < \frac{1}{2}\int_0^\infty k(\lambda)\Big\{K_1\big(k(\lambda)h\big)E(\lambda, T_h) - E(\lambda, T_0) - E\big(\lambda, T(0)\big)\int_0^h k(\lambda)K_0\big(k(\lambda)t\big)\,dt\Big\}\,d\lambda \\ = \frac{1}{2}\int_0^\infty k(\lambda)\cdot\big\{K_1\big(k(\lambda)h\big)\big[E(\lambda, T_h) - E\big(\lambda, T(0)\big)\big] + E\big(\lambda, T(0)\big) - E(\lambda, T_0)\big\}\,d\lambda. \end{cases}$$

Aus (3.13) folgt wegen $T_0 > T_h$ und $T_0 \geq T(0) \geq T_h$, daß

$$\Phi(T_0) > \Phi\big(T(0)\big), \quad \text{also} \quad T_0 > T(0)$$

ist.

Außerdem erhalten wir die Abschätzung

$$\int_0^\infty k(\lambda)\big[1 + K_1\big(k(\lambda)h\big)\big]E\big(\lambda, T(0)\big)\,d\lambda < \int_0^\infty k(\lambda)\big[E(\lambda, T_0) + K_1\big(k(\lambda)h\big)\cdot E(\lambda, T_h)\big]\,d\lambda.$$

Ebenso können wir zeigen, daß $T(h) > T_h$ ist und

$$\int_0^\infty k(\lambda)\big[1 + K_1\big(k(\lambda)h\big)\big]E\big(\lambda, T(h)\big)\,d\lambda > \int_0^\infty k(\lambda)\big[E(\lambda, T_h) + K_1\big(k(\lambda)h\big)E(\lambda, T_0)\big]\,d\lambda.$$

3.3. Resultate für den Spezialfall konstanter Absorptionsfunktion

Ist die Funktion $k(\lambda)$ konstant und positiv, so geht mit (1.10) die Gl. (3.1) in die für $y(z) = T^4\left(\frac{z}{k}\right)$ lineare Integralgleichung

$$2y(z) = y_0 K_1(z) + y_l K_1(l-z) - \int_0^l K_0(|z-s|)\, y(s)\, ds$$

über, wobei $l = k\,h$, $y_0 = T_0^4$ und $y_l = T_h^4$ ist. Für die iterierten Kerne

$$K^{(1)}(z,t) = \int_0^l K_0(|z-s|)\, K_0(|s-t|)\, ds, \quad K^{(n)}(z,t) = \int_0^l K_0(|z-s|)\, K^{(n-1)}(s,t)\, ds$$

$(n = 2, 3, \ldots)$ gilt:

$$|K^{(n)}(z,t)| \leq M \cdot C^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit

$$M = 2\int_0^{l/2} K_0\left(\frac{l}{2} - t\right) dt \quad \text{und} \quad C = 2\left[1 - K_1\left(\frac{l}{2}\right)\right] < 2;$$

deshalb läßt sich die Lösung durch die gleichmäßig konvergente Resolvente

$$R(z,t) = K_0(|z-t|) + \sum_1^\infty {}^n \frac{1}{2^n} |K^{(n)}(z,t)|$$

darstellen $(0 \leq z \leq l)$:

$$\text{(R)} \quad y(z) = \tfrac{1}{2}\left[y_0 K_1(z) + y_l K_1(l-z)\right] - \tfrac{1}{4}\int_0^l R(z,t)\left[y_0 K_1(t) + y_l K_1(l-t)\right] dt.$$

Aus dieser Darstellung können wir ersehen, daß $y(z)$ bezüglich $z = l/2$ antisymmetrisch ist:

$$y(z) - y\left(\frac{l}{2}\right) = y\left(\frac{l}{2}\right) - y(l-z) \qquad (0 \leq z \leq l)$$

und die Lösung auch in der Form

$$y(z) = \tfrac{1}{2}(y_0 + y_l) + \tfrac{1}{2}\left((y_0 - y(0)\right) \int_{l/2}^z \left[R(t,0) - R(t,l)\right] dt$$

dargestellt werden kann. Weiter gestattet uns (R) einen Vergleich der Lösung $y(z)$ mit der linearen Funktion $L(z) = y_0 + \frac{z}{l}(y_l - y_0)$:

$$\left|y(z) - y\left(\frac{l}{2}\right)\right| \leq \left|L(z) - \frac{1}{2}(y_0 + y_l)\right| \qquad (0 \leq z \leq l),$$

was zu einer Abschätzung der Konstanten E_g verhilft:

$$|y_0 - y_l|\left|K_2\left(\frac{l}{2}\right)\right| \leq |E_g| \frac{1}{2\sigma n^2} \leq |y_0 - y_l| \frac{2}{l}\left[K_3(0) - K_3\left(\frac{l}{2}\right)\right].$$

§ 4. Der Existenzbeweis für den allgemeinen Fall ($\varkappa > 0$)

Im Falle $k(\lambda) \equiv 0$, also bei reiner Wärmeleitung, wird das Problem bekanntlich sehr einfach; die Gl. (1.14) geht dann nämlich in die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung $T''(x) = 0$ über. Wir wollen uns also

dem nichttrivialen Fall $k(\lambda) \not\equiv 0$[16]) zuwenden, der physikalisch eine echte Überlagerung von Wärmeleitung und -strahlung beschreibt.

4.1. Der Existenzbeweis

Die zu lösende Gleichung behandeln wir in der Form (1.13), die keine Ableitung von $T(x)$ mehr enthält, dafür aber zwei freie Integrationskonstanten. Unsere Aufgabe ist es dann, zu nichtnegativen Konstanten T_0, T_h, R_0, R_h, $\varkappa > 0$, $k(\lambda) \geq 0$ und $\not\equiv 0$, $h > 0$ eine stetige nichtnegative Funktion $T(x)$ und zwei Konstanten E und D zu finden, die für $0 \leq x \leq h$ der Gleichung

$$(4.1)\quad \begin{cases} T(x) = E\,x + D - M \int\limits_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)} \Big\{ \Big[K_3\big(k(\lambda)\,(h-x)\big) - \frac{1}{3} \Big] E(\lambda, T_h) + \\ + \Big[K_3\big(k(\lambda)\,x\big) - \frac{1}{3} \Big] E(\lambda, T_0) \Big\}\, d\lambda + M \int\limits_0^\infty \int\limits_0^h K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) E\big(\lambda, T(t)\big)\, dt\, d\lambda \end{cases}$$

genügt. Dabei wurde

$$E = -\frac{E_g}{\varkappa}, \qquad D = -\frac{D_0}{\varkappa} \qquad \text{und} \qquad M = \frac{2\pi n^2}{\varkappa} > 0$$

gesetzt. Außerdem soll $T(x)$ die Randwerte

$$T(0) = R_0 \qquad \text{und} \qquad T(h) = R_h$$

annehmen.

Zum Nachweis der Existenz einer solchen Lösungsfunktion betrachten wir den Funktionenraum $\mathfrak{C}$ der über dem Intervall $0 \leq x \leq h$ definierten und stetigen Funktionen $f(x)$ mit der Metrik

$$(4.2)\qquad D(f, g) = \max_{0 \leq x \leq h} |f(x) - g(x)| \qquad (f, g \in \mathfrak{C}).$$

Dieser Raum $\mathfrak{C}$ ist bekanntlich (vgl. [1]) ein Banach-Raum. Aus diesem Banach-Raum greifen wir eine Teilmenge $\mathfrak{F}$ heraus:

Definition. $\mathfrak{F}$ ist die Teilmenge derjenigen Elemente $f(x)$ des Raumes $\mathfrak{C}$, die für $0 \leq x \leq h$ der Ungleichung

$$(4.3)\qquad b = \operatorname{Min}(T_0, T_h, R_0, R_h) \leq f(x) \leq \operatorname{Max}(T_0, T_h, R_0, R_h) = B$$

genügen.

Über dem Teilraum $\mathfrak{F}$ interessiert uns folgende Abbildung U:

Definition. Ist $f(x)$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{F}$, so bezeichnet $u(x) = U_x[f]$ die durch die Gleichung

$$(4.4)\quad \begin{cases} u(x) = G(x) + M \int\limits_0^\infty \int\limits_0^h \Big\{ K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) - K_2\big(k(\lambda)\,t\big) + \\ \qquad + \frac{x}{h} \big[K_2\big(k(\lambda)\,t\big) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-t)\big) \big] \Big\} E\big(\lambda, f(t)\big)\, dt\, d\lambda \end{cases}$$

[16]) Vgl. Fußnote [8]).

bestimmte Funktion, wobei $G(x)$ die von $f(x)$ unabhängige Funktion

$$(4.5)\quad \begin{cases} G(x) = R_0 + \frac{x}{h}(R_h - R_0) - M \int_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)} \Big\{ \Big[K_3(k(\lambda)(h-x)) - \frac{1}{3} \Big] \times \\ \qquad \times E(\lambda, T_h) + \Big[K_3(k(\lambda)x) - \frac{1}{3} \Big] E(\lambda, T_0) - \\ \qquad - \Big[K_3(k(\lambda)h) - \frac{1}{3} \Big] \cdot \Big[E(\lambda, T_h) + \frac{x}{h}(E(\lambda, T_0) - E(\lambda, T_h)) \Big] \Big\} d\lambda \end{cases}$$

darstellt.

Die Existenz der in (4.4) und (4.5) auftretenden Integrale ist durch die Erörterungen des § 1 gesichert. Darüber hinaus geht aus diesen hervor, daß $u(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist, und zwar ist (vgl. Hilfsatz 2 und 4):

$$(4.6)\quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{h}(R_h - R_0) - M \int_0^\infty \Big\{ K_2(k(\lambda)x) E(\lambda, T_0) - K_2(k(\lambda)(h-x)) \times \\ \qquad \times E(\lambda, T_h) - \frac{1}{h\,k(\lambda)} \Big[K_3(k(\lambda)h) - \frac{1}{3} \Big] \Big[E(\lambda, T_0) - E(\lambda, T_h) \Big] \Big\} d\lambda + \\ \qquad + M \int_0^\infty \int_0^h \Big\{ \operatorname{sign}(x-t)\, k(\lambda)\, K_1(k(\lambda)|x-t|) + \\ \qquad + \frac{1}{h} [K_2(k(\lambda)t) - K_2(k(\lambda)(h-t))] \Big\} E(\lambda, f(t))\, dt\, d\lambda, \end{cases}$$

und

$$(4.7)\quad \begin{cases} u''(x) = M \int_0^\infty k(\lambda) \Big\{ 2E(\lambda, f(x)) + \int_0^h k(\lambda) K_0(k(\lambda)|x-t|) E(\lambda, f(t))\, dt - \\ \qquad - K_1(k(\lambda)x) E(\lambda, T_0) - K_1(k(\lambda)(h-x)) E(\lambda, T_h) \Big\} d\lambda. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich insbesondere, daß $u(x)$ über $[0, h]$ stetig ist; also bildet die Abbildung U die Menge $\mathfrak{F}$ in die Menge $\mathfrak{C}$ ab:

$$(4.8)\quad U[\mathfrak{F}] \subseteqq \mathfrak{C}.$$

Ist $T(x)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}$, die für $0 \leq x \leq h$ der Gleichung $U_x[T] = T(x)$ genügt, die also Fixpunkt der Abbildung U ist, so erfüllt $T(x)$ auch die Gl. (4.1), und zwar mit den Konstanten

$$E = \frac{1}{h} \Big\{ R_h - R_0 + M \int_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)} \Big[K_3(k(\lambda)h) - \frac{1}{3} \Big] [E(\lambda, T_0) - E(\lambda, T_h)]\, d\lambda + \\ + M \int_0^\infty \int_0^h [K_2(k(\lambda)t) - K_2(k(\lambda)(h-t))] E(\lambda, T(t))\, dt\, d\lambda \Big\}$$

und

$$D = R_0 + M \int_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)} \Big[K_3(k(\lambda)h) - \frac{1}{3} \Big] E(\lambda, T_h)\, d\lambda - \\ - M \int_0^\infty \int_0^h K_2(k(\lambda)t) E(\lambda, T(t))\, dt\, d\lambda.$$

Die Lösung der Gl. (4.1) ist somit auf ein Fixpunktproblem zurückgeführt.

Wir beabsichtigen nun, einen von J. SCHAUDER [9] aufgestellten Fixpunktsatz für Funktionalräume auf das Problem anzuwenden. Da sich die Voraussetzungen dieses Satzes für die Abbildung U nicht beweisen ließen, ändern wir die Abbildung U zu einer Abbildung V ab:

Definition. Ist $f(x)$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{F}$, so bezeichne $v(x) = V_x[f]$ die durch folgende Vorschrift gegebene Funktion über $[0, h]$:

$$(4.9)\qquad v(x) = \begin{cases} u(x) = U_x[f] & \text{für alle } x \in [0,h] \quad \text{mit } b \leq u(x) \leq B, \\ B & \text{für alle } x \in [0,h] \quad \text{mit } u(x) > B, \\ b & \text{für alle } x \in [0,h] \quad \text{mit } b > u(x), \end{cases}$$

wobei wie in (4.3)

$$b = \operatorname{Min}(T_0, T_h, R_0, R_h) \quad \text{und} \quad B = \operatorname{Max}(T_0, T_h, R_0, R_h).$$

I. Eigenschaften der Abbildung V.

(a) V ist eine Abbildung von $\mathfrak{F}$ in sich: $\mathfrak{B} = V[\mathfrak{F}] \subseteq \mathfrak{F}$ [17]).

Denn für $f \in \mathfrak{F}$ ist nach (4.8) die Funktion $u(x) = U_x[f]$, mit ihr also auch die Funktion $v(x) = V_x[f]$ stetig; außerdem geht aus (4.9) unmittelbar hervor, daß sämtliche Werte der Funktion v im Intervall $[b, B]$ liegen.

(b) V ist eine stetige Abbildung.

Beweis. Es seien f_1 und f_2 zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{F}$,

$$u_1(x) = U_x[f_1], \quad u_2(x) = U_x[f_2], \quad v_1(x) = V_x[f_1], \quad v_2(x) = V_x[f_2].$$

Dann gilt, wie man aus der Definitionsgleichung (4.9) leicht erkennt, für den in (4.2) definierten Abstand D

$$(4.10)\qquad D(v_1, v_2) \leq D(u_1, u_2).$$

Andrerseits ist nach (4.4)

$$u_1(x) - u_2(x) = M \int_0^\infty \int_0^h \Big\{ K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) - K_2\big(k(\lambda)\,t\big) + \\ + \frac{x}{h}\big[K_2\big(k(\lambda)\,t\big) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-t)\big)\big]\Big\} \cdot \big[E\big(\lambda, f_1(t)\big) - E\big(\lambda, f_2(t)\big)\big]\,dt\,d\lambda.$$

Da nach (1.6) $|K_2(x)| \leq \frac{1}{2}$ und nach (1.9) $E(\lambda, T)$ monoton zunehmend in T ist, wird nach dem Satz von Fubini [18]) mit (1.10)

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq 2M \int_0^\infty \int_0^h |E\big(\lambda, f_1(t)\big) - E\big(\lambda, f_2(t)\big)|\,dt\,d\lambda$$

$$= 2M \int_0^h \int_0^\infty |E\big(\lambda, f_1(t)\big) - E\big(\lambda, f_2(t)\big)|\,d\lambda\,dt = 2M \int_0^h \frac{\sigma}{\pi} |f_1^4(t) - f_2^4(t)|\,dt$$

$$\leq 2M\,h \frac{\sigma}{\pi} \operatorname*{Max}_{0 \leq t \leq h} |f_1^4(t) - f_2^4(t)| \leq 2M\,h \frac{\sigma}{\pi} 4B^3 D(f_1, f_2),$$

[17]) Diese Eigenschaft, die der Schaudersche Fixpunktsatz voraussetzt, konnte für die Abbildung U nicht bewiesen werden, auch nicht über anderen Teilräumen von $\mathfrak{C}$, weshalb die Hilfsabbildung V eingeführt wurde.

[18]) Vgl. Fußnote [9]).

woraus mit (4.10)

$$D(v_1, v_2) \leq 8\frac{\sigma}{\pi} M h B^3 \cdot D(f_1, f_2) \tag{4.11}$$

und damit die behauptete Stetigkeit der Abbildung V folgt.

II. Eigenschaften der Menge $\mathfrak{F}$ und ihrer Bildmenge $\mathfrak{V} = V[\mathfrak{F}]$.

(a) $\mathfrak{F}$ ist nicht leer; z.B. gehört $f(x) \equiv B$ zu $\mathfrak{F}$.

(b) $\mathfrak{F}$ ist konvex.

(c) $\mathfrak{F}$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{C}$.

(d) Die Funktionen aus $\mathfrak{V} = V[\mathfrak{F}]$ sind gleichgradig stetig.

Beweis. Nach (1.6) ist für alle $t \geq 0$

$$0 \leq K_1(t) \leq 1, \qquad -\tfrac{1}{2} \leq K_2(t) \leq 0, \qquad 0 \leq K_3(t) \leq \tfrac{1}{3},$$

und nach (1.9) ist $E(\lambda, T)$ monoton zunehmend in T. Ist $f \in \mathfrak{F}$, so gilt also mit (4.6) für $u(x) = U_x[f]$:

$$|u'(x)| \leq \frac{1}{h} \cdot |R_h - R_0| + M \int_0^\infty \Big\{ \frac{1}{2} [E(\lambda, T_0) + E(\lambda, T_h)] +$$

$$+ \frac{1}{h\,k(\lambda)} \Big[\frac{1}{3} - K_3(k(\lambda)\,h) \Big] \cdot |E(\lambda, T_0) - E(\lambda, T_h)| + [h\,k(\lambda) + 1]\, E(\lambda, B) \Big\}\, d\lambda .$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung stellt eine von x und f unabhängige Konstante C dar:

$$|u'(x)| \leq C \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h \quad \text{und alle Funktionen} \quad u \in \mathfrak{U} = U[\mathfrak{F}]. \tag{4.12}$$

Aus (4.12) folgt für beliebiges x und δ mit $0 \leq x \leq x + \delta \leq h$:

$$|u(x + \delta) - u(x)| \leq \delta \cdot C. \tag{4.13}$$

Wie wir nun aus der Definitionsgleichung (4.9) leicht ersehen, gilt für $v(x) = V_x[f]$

$$|v(x + \delta) - v(x)| \leq |u(x + \delta) - u(x)|,$$

also mit (4.13)

$$|v(x + \delta) - v(x)| \leq \delta C$$

für beliebiges $v \in \mathfrak{V}$ und alle x, δ mit

$$0 \leq x \leq x + \delta \leq h,$$

woraus unmittelbar die Behauptung (d) folgt.

(e) Der Raum $\mathfrak{V} = V[\mathfrak{F}]$ ist kompakt in $\mathfrak{C}$.

Denn die Funktionen aus $\mathfrak{V}$ sind einerseits nach Ia) durch b und B beschränkt und andrerseits nach IId) gleichgradig stetig. Also ist wegen des Häufungsstellenprinzips für gleichgradig stetige Funktionen der Raum $\mathfrak{V}$ kompakt in $\mathfrak{C}$.

(f) Für alle Funktionen $u \in \mathfrak{U}$ und $v \in \mathfrak{V}$ gilt

$$u(0) = v(0) = R_0 \quad \text{und} \quad u(h) = v(h) = R_h. \tag{4.14}$$

Ist nämlich f beliebig aus $\mathfrak{F}$, so läßt sich die Behauptung für $u(x) = U_x[f]$ leicht verifizieren, indem man in der Gl. (4.4) $x = 0$ bzw. $x = h$ setzt. Da nun nach Definition von b und B

$$b \leq R_0 \leq B \quad \text{und} \quad b \leq R_h \leq B$$

ist, folgt die Behauptung für $v(x)$ aus der Gl. (4.9).

Aus den unter I und II zusammengefaßten Eigenschaften resultiert das Ergebnis: $\mathfrak{F}$ ist eine konvexe und abgeschlossene Menge des Banach-Raums $\mathfrak{C}$, die durch die stetige Abbildung V auf die kompakte Menge $\mathfrak{V} = V[\mathfrak{F}] \subseteq \mathfrak{F}$ abgebildet wird. Damit sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von SCHAUDER ([9], Satz II [19]) für die Abbildung V erfüllt, und wir erhalten den

Hilfsatz 8. Es existiert für die Abbildung V mindestens ein Fixpunkt $T \in \mathfrak{F}$, d.h. eine über $[0, h]$ stetige Funktion $T(x)$, die die Gleichung

$$T(x) = V_x[T] \tag{4.15}$$

und die Ungleichung

$$b \leq T(x) \leq B \tag{4.16}$$

für $0 \leq x \leq h$ erfüllt. Außerdem ist

$$T(0) = R_0 \quad \text{und} \quad T(h) = R_h. \tag{4.17}$$

Die Aussage (4.17) folgt aus (4.14), da wegen (4.15) $T \in \mathfrak{V}$.

Nun besteht aber unsere Aufgabe darin, der Abbildung U, nicht der Abbildung V einen Fixpunkt nachzuweisen. Diese Lücke wird geschlossen durch folgenden

Hilfsatz 9. Ist $T(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{F}$, die der Gl. (4.15) genügt, so gilt für ihr U-Bild $S(x) = U_x[T]$ die Ungleichung

$$b \leq S(x) \leq B \qquad (0 \leq x \leq h). \tag{4.18}$$

Beweis. In dem trivialen Fall $T_0 = T_h = R_0 = R_h$ enthält $\mathfrak{F}$ als einziges Element die Funktion $f(x) \equiv B$. Wie man leicht nachrechnet, ist dann auch $U_x[f] \equiv V_x[f] \equiv B$, was die Behauptung ergibt.

Wenden wir uns also der Betrachtung des Falles $b < B$ zu, und nehmen wir indirekt an, daß die Menge

$$X = \{x \mid 0 \leq x \leq h \text{ und } S(x) > B\}$$

nicht leer ist. Weil nach (4.14) $S(0) = R_0$ und $S(h) = R_h$ ist, gehören 0 und h nicht zu X:

$$X = \{x \mid 0 < x < h \text{ und } S(x) > B\}.$$

[19]) Der Satz lautet: „In einem B-Raume sei eine konvexe und abgeschlossene Menge H gegeben. Die stetige Funktionaloperation $F(x)$ bilde H auf sich selbst ab. Ferner sei die Menge $F(H) \subseteq H$ kompakt. Dann ist ein Fixpunkt vorhanden." Dabei entspricht die Bezeichnung „F bildet H *auf* sich ab" der heute üblichen „F bildet H *in* sich ab".

Jede absolute Maximalstelle x_0 der Funktion $S(x)$ über dem Intervall $[0, h]$ gehört sicherlich zu X, weshalb $0 < x_0 < h$ und damit wegen der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von $S(x)$

$$S''(x_0) \leq 0 \tag{4.19}$$

wird. Gemäß (4.9) erhalten wir für alle $x \in X$

$$V_x[T] = B,$$

also folgt aus (4.15)

$$T(x_0) = B. \tag{4.20}$$

Wir befassen uns nun mit dem Ausdruck

$$H(\lambda, x) = 2E(\lambda, T(x)) + \int_0^h k(\lambda) K_0(k(\lambda)|x-t|) E(\lambda, T(x))\, dt - \\ - K_1(k(\lambda) x) E(\lambda, T_0) - K_1(k(\lambda)(h-x)) E(\lambda, T_h).$$

A. Integrieren wir mittels (1.8) das t-Integral in dieser Definitionsgleichung von $H(\lambda, x)$ aus und setzen $x = x_0$, so ergibt sich

$$\begin{cases} H(\lambda, x_0) = K_1(k(\lambda) x_0)\,[E(\lambda, T(x_0)) - E(\lambda, T_0)] + \\ \qquad + K_1(k(\lambda)(h-x_0))\,[E(\lambda, T(x_0)) - E(\lambda, T_h)]. \end{cases} \tag{4.21}$$

$K_1(t)$ ist im ganzen Definitionsbereich positiv, $E(\lambda, T)$ für festes $\lambda > 0$ i.e.S. monoton zunehmend in T, $E(0, T) = 0$ [vgl. (1.6) und (1.9)]. Daher folgt aus (4.20) und (4.21)

$$H(\lambda, x_0) \begin{cases} = 0 & \text{für } \lambda = 0 \text{ oder für } T_0 = T_h = B, \\ > 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.22}$$

Wegen der Voraussetzungen über $k(\lambda)$ liefert (4.22) die Ungleichung

$$\int_0^\infty k(\lambda) H(\lambda, x_0)\, d\lambda \begin{cases} = 0 & \text{für } T_0 = T_h = B, \\ > 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.23}$$

B. $S''(x)$ genügt nach (4.7) der Gleichung

$$\begin{cases} \int_0^\infty k(\lambda) \Big\{ 2E(\lambda, T(x)) + \int_0^h k(\lambda) K_0(k(\lambda)|x-t|) E(\lambda, T(t))\, dt - \\ \quad - K_1(k(\lambda) x) E(\lambda, T_0) - K_1(k(\lambda)(h-x)) E(\lambda, T_h) \Big\}\, d\lambda = \frac{1}{M} S''(x). \end{cases} \tag{4.24}$$

Außer im Falle $R_0 = R_h = B$ folgt aus $T(0) = R_0$ und $T(h) = R_h$, daß

$$T(x) < B \qquad \text{für gewisse } x \text{ aus } [0, h].$$

Wegen der Stetigkeit von $T(x)$, wegen (4.20) und $K_0(t) < 0$ ergibt sich damit

$$\int_0^h k(\lambda) K_0(k(\lambda)|x_0 - t|) \times \\ \times [E(\lambda, T(t)) - E(\lambda, T(x_0))]\, dt \begin{cases} \geq 0 \text{ für } \lambda = 0, \text{ für } k(\lambda) = 0, \text{ oder für } R_0 = R_h = B, \\ > 0 \text{ sonst;} \end{cases}$$

also

$$(4.25)\quad \begin{cases} 2E(\lambda, T(x_0)) + \int_0^h k(\lambda) K_0(k(\lambda)|x_0 - t|) E(\lambda, T(t))\, dt - K_1(k(\lambda) x_0) E(\lambda, T_0) - \\ - K_1(k(\lambda)(h - x_0)) E(\lambda, T_h) \begin{cases} \geq H(\lambda, x_0) & \text{für } \lambda = 0,\ k(\lambda) = 0 \text{ oder } R_0 = R_h = B, \\ > H(\lambda, x_0) & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Aus den Relationen (4.19), (4.24) und (4.25) resultiert:

$$(4.26)\qquad \int_0^\infty k(\lambda) H(\lambda, x_0)\, d\lambda \begin{cases} \leq 0 & \text{für } R_0 = R_h = B, \\ < 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ungleichungen (4.23) und (4.26) widersprechen sich außer in dem schon behandelten Falle $T_0 = T_h = R_0 = R_h = B$. Die Menge X ist also leer, d.h.

$$S(x) \leq B \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h.$$

Der linke Teil der Ungleichung (4.18) wird analog bewiesen.

Aus der soeben bewiesenen Relation (4.18) und aus der Definitionsgleichung (4.9) folgt unmittelbar, daß alle die Gl. (4.15) erfüllenden Funktionen $T \in \mathfrak{F}$ der Gleichung

$$U_x[T] \equiv V_x[T]$$

genügen, also auch der Gleichung

$$U_x[T] = T(x) \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Wir fassen dieses Resultat mit Hilfsatz 8 und Satz 2 zusammen:

Satz 6 (*Existenzsatz für den Fall* $\varkappa > 0$). *Die Gl.* (4.1) *und damit* (1.1) *besitzt genau eine stetige nichtnegative Lösungsfunktion* $T(x)$, *die die Randwerte* R_0 *und* R_h *annimmt. Außerdem genügt diese Funktion für* $0 \leq x \leq h$ *der Ungleichung*

$$(4.27)\qquad \operatorname{Min}(T_0, T_h, R_0, R_h) \leq T(x) \leq \operatorname{Max}(T_0, T_h, R_0, R_h).$$

4.2. Monotonie der Lösungsfunktion

Wie im Falle $\varkappa = 0$ können wir auch hier nachweisen, daß die Lösungsfunktion für $T_0 \neq T_h$ i.e.S. monoton verläuft, allerdings nur unter der Voraussetzung $T(0) = T_0$, $T(h) = T_h$ für die Randwerte, die aber den physikalisch interessanten Fall erfaßt.

Satz 7 (*Monotoniesatz für den Fall* $\varkappa > 0$). *Es sei* $T(x)$ *die nichtnegative Lösungsfunktion der Gl.* (1.1) *mit den Randwerten* $T(0) = T_0$ *und* $T(h) = T_h$. *Falls dann* $T_0 > T_h$ *bzw.* $T_0 < T_h$ *ist, nimmt* $T(x)$ *i.e.S. monoton ab bzw. zu.*

Beweis. Für den Fall $k(\lambda) \equiv 0$ folgt die Behauptung unmittelbar, vgl. S. 374, so daß wir diesen Fall von der weiteren Betrachtung ausschließen können. Es sei etwa $T_0 > T_h$, und wir nehmen indirekt an, daß $T(x)$ nicht i.e.S. monoton abnimmt. Dann gibt es ein Teilintervall von $[0, h]$, in dem

$T'(x) \gtrless 0$ ist; x' bezeichne einen beliebigen inneren Punkt dieses Intervalls. Unter den absoluten Minimalstellen der Funktion $T(x)$ für das Intervall $[0, x']$ gibt es eine solche x_1, für die $0 < x_1 < x'$ wird, ebenso unter den absoluten Maximalstellen von $T(x)$ für das Intervall $[x_1, h]$ eine solche x_2, für die $x_1 < x_2 < h$ ist, da ja $T(x)$ nach (4.27) die Ungleichung

$$T_0 = T(0) \gtrless T(x) \gtrless T(h) = T_h \qquad (0 \leqq x \leqq h) \tag{4.28}$$

erfüllt. Somit gelten für das Argumentenpaar x_1, x_2 die Relationen

$$0 < x_1 < x_2 < h, \tag{4.29}$$

$$\begin{cases} T(0) \gtrless T(x) \gtrless T(x_1) & \text{für } 0 \leqq x \leqq x_1, \\ T(x_1) \leqq T(x) \leqq T(x_2) & \text{für } x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ T(x_2) \gtrless T(x) \gtrless T(h) & \text{für } x_2 \leqq x \leqq h, \end{cases} \tag{4.30}$$

insbesondere also auch $T''(x_1) \gtrless 0$, $T''(x_2) \leqq 0$ und deshalb

$$T''(x_1) - T''(x_2) \gtrless 0. \tag{4.31}$$

I. Für die Funktion

$$\begin{cases} G(\lambda; x_1, x_2) = J(\lambda; x_1, x_2) + 2\left[E\left(\lambda, T(x_1)\right) - E\left(\lambda, T(x_2)\right)\right] - \\ \qquad - E(\lambda, T_0)\left[K_1\left(k(\lambda)\, x_1\right) - K_1\left(k(\lambda)\, x_2\right)\right] - \\ \qquad - E(\lambda, T_h)\left[K_1\left(k(\lambda)\,(h - x_1)\right) - K_1\left(k(\lambda)\,(h - x_2)\right)\right] \end{cases} \tag{4.32}$$

mit

$$J(\lambda; x_1, x_2) = \int_0^h k(\lambda)\left[K_0\left(k(\lambda)\,|x_1 - t|\right) - K_0\left(k(\lambda)\,|x_2 - t|\right)\right] E\left(\lambda, T(t)\right) dt$$

folgt wegen (4.31) und (4.14)

$$\int_0^\infty k(\lambda)\, G(\lambda; x_1, x_2)\, d\lambda = \frac{1}{M}\left[T''(x_1) - T''(x_2)\right] \gtrless 0. \tag{4.33}$$

II. Andrerseits ist

$$J(\lambda; x_1, x_2) = \int_0^{x_1} k(\lambda)\left[K_0\left(k(\lambda)\,(x_1 - t)\right) - K_0\left(k(\lambda)\,(x_2 - t)\right)\right] E\left(\lambda, T(t)\right) dt +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} k(\lambda)\, K_0\left(k(\lambda)\,(t - x_1)\right) E\left(\lambda, T(t)\right) dt - \int_{x_1}^{x_2} k(\lambda)\, K_0\left(k(\lambda)\,(x_2 - t)\right) E\left(\lambda, T(t)\right) dt +$$

$$+ \int_{x_2}^{h} k(\lambda)\left[K_0\left(k(\lambda)\,(t - x_1)\right) - K_0\left(k(\lambda)\,(t - x_2)\right)\right] E\left(\lambda, T(t)\right) dt.$$

In dieser Darstellung von J wechselt keiner der Integranden der vier auftretenden Integrale im zugehörigen Integrationsbereich sein Vorzeichen, da $K_0(t)$ i.e.S. monoton zunimmt. Der erweiterte Mittelwertsatz der Integral-

rechnung ist anwendbar, und wir erhalten mit (1.8')

$$(4.34)\quad \begin{cases} J(\lambda; x_1, x_2) \\ = E(\lambda, T(z_1)) \cdot [-1 + K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1)) + K_1(k(\lambda) x_1) - K_1(k(\lambda) x_2)] + \\ + [E(\lambda, T(z_2)) - E(\lambda, T(z_3))] \cdot [K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1)) - 1] + \\ + E(\lambda, T(z_4))[K_1(k(\lambda)(h - x_1)) - K_1(k(\lambda)(h - x_2)) - K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1)) + 1], \end{cases}$$

wobei die Argumente z_i gewisse, noch von λ abhängige Mittelwerte sind, für die gilt

$$(4.35)\quad 0 \leq z_1 \leq x_1 \leq \begin{Bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} \leq x_2 \leq z_4 \leq h.$$

Wir setzen (4.34) in (4.32) ein und ordnen um:

$$(4.36)\quad \begin{cases} G(\lambda; x_1, x_2) = [K_1(k(\lambda) x_1) - K_1(k(\lambda) x_2)][E(\lambda, T(z_1)) - E(\lambda, T_0)] + \\ + [K_1(k(\lambda)(h - x_2)) - K_1(k(\lambda)(h - x_1))][E(\lambda, T_h) - E(\lambda, T(z_4))] + \\ + [1 - K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1))][E(\lambda, T(z_3)) + E(\lambda, T(z_4)) - 2E(\lambda, T(x_2))] + \\ + [1 - K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1))][2E(\lambda, T(x_1)) - E(\lambda, T(z_2)) - E(\lambda, T(z_1))] + \\ + 2K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1))[E(\lambda, T(x_1)) - E(\lambda, T(x_2))]. \end{cases}$$

Wenn wir beachten, daß $K_1(t)$ i.e.S. monoton abnimmt, $0 < K_1(t) < 1$ $(t > 0)$ ist, und $E(\lambda, T)$ für positives λ in T i.e.S. monoton zunimmt, erkennen wir:

1. Keiner der Summanden der rechten Seite von (4.36) ist positiv.

Denn nach (4.28), (4.30) und (4.35) wird

$$(4.37)\quad T_0 \geq T(z_1) \geq T(x_1) \leq \begin{Bmatrix} T(z_2) \\ T(z_3) \end{Bmatrix} \leq T(x_2) \geq T(z_4) \geq T_h.$$

2. Für $\lambda > 0$ und $k(\lambda) > 0$ wird mindestens einer der fünf Summanden der rechten Seite von (4.36) negativ.

Denn wegen $x_1 < x_2$ (4.29) ist jeder der fünf links stehenden Faktoren positiv; da wegen $T_0 > T_h$ in mindestens einer der Relationen (4.37) das Ungleichheitszeichen stehen muß, wird für $\lambda > 0$ mindestens einer der rechts stehenden Faktoren negativ.

Aus 1. und 2. folgt aber:

$$\int_0^\infty k(\lambda) G(\lambda; x_1, x_2)\, d\lambda < 0$$

im Widerspruch zu (4.33), weshalb die Annahme, $T(x)$ nehme nicht i.e.S. monoton ab, verworfen werden muß. Analog oder durch Betrachtung von $\overline{T}(x) = T(h - x)$ läßt sich der Beweis im Falle $T_0 < T_h$ führen.

Literatur

[1] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — [2] Genzel, L.: Der Anteil der Wärmestrahlung bei Wärmeleitungsvorgängen. Z. Physik **135**, 177—195 (1953). — [3] Hammerstein, A.: Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen.

Acta Math. **54**, 117—176 (1930). — [*4*] HOPF, E.: Über das Strahlungsgleichgewicht in den äußeren Schichten der Sterne. Z. Physik **49**, 155—161 (1928). — [*5*] IGLISCH, R.: Existenz- und Eindeutigkeitssätze bei nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann. **108**, 161—189 (1933). — [*6*] KOURGANOFF, V., and I. W. BUSBRIDGE: Basic Methods in Transfer Problems, Radiative Equilibrium and Neutron Diffusion. Oxford 1952. — [*7*] LICHTENSTEIN, L.: Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin 1931. — [*8*] MILNE, E. A.: Radiative equilibrium in the outer layers of a star. Monthly Note Roy. Astron. Soc. **81**, 361—375 (1921). — [*9*] SCHAUDER, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. **2**, 171—180 (1930). — [*10*] SCHMIDT, E.: Über die Auflösung nichtlinearer Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen. Math. Ann. **65**, 371—399 (1908). — [*11*] SCHWARZSCHILD, K.: Über Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre. Sitzgsber. Preuß. Akad. Wiss. **47**, 1183—1207 (1914). — [*12*] WALTHER, A., J. DÖRR u. E. ELLER: Mathematische Berechnung der Temperaturverteilung in der Glasschmelze mit Berücksichtigung von Wärmeleitung und Wärmestrahlung. Glastechn. Berichte **26**, 133—140 (1953). — [*13*] LERAY, J.: La théorie des points fixes et ses applications en analyse. Proc. Intern. Congr. Math. **1950**, II, 202—208 (1952).

Frankfurt a.M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 10. August 1955)

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 385—424 (1956)

Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete*)

Von
DIETER GAIER

Inhaltsverzeichnis

Seite
Einleitung 385
Teil I. Vorbereitungen
§ 1. Definitionen und Bezeichnungen 387
§ 2. Funktionentheoretische Hilfssätze 388
§ 3. Topologische Hilfssätze 391
Teil II. Verhalten der Funktionen, die $|z|<1$ auf $\mathfrak{G}_n$ abbilden
§ 4. Ein allgemeiner Konvergenzsatz 394
§ 5. Eine andere Form des Konvergenzsatzes 397
§ 6. Untersuchungen für den Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzt 401
§ 7. Der Sonderfall der JORDAN-Gebiete 403
§ 8. Lokale Abänderung von $\mathfrak{G}_0$ 405
§ 9. Benützung anderer Normen 409
Teil III. Verhalten der Funktionen, die $\mathfrak{G}_n$ auf $|w|<1$ abbilden
§ 10. Arten von stetiger Konvergenz 412
§ 11. Ein Satz für stetige Konvergenz 413
§ 12. Ein Satz für stetige Konvergenz im weiteren Sinne 417
§ 13. Die Sonderfälle $\mathfrak{G}_n < \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ 418
§ 14. Einige Folgerungen im Fall $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ 421
Literaturverzeichnis 423

Einleitung

Die Fragestellung, die dieser Arbeit zugrunde liegt, läßt sich einordnen in die allgemeine Theorie der Gebietsfunktionen. Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}_0$ in der z-Ebene. Diesem Gebiet lassen sich auf verschiedene Weise Funktionen $F(z; \mathfrak{G}_0)$ (z.B. nach Festlegung eines Aufpunkts die GREENsche Funktion von $\mathfrak{G}_0$) oder Funktionale $F(\mathfrak{G}_0)$ (z.B. der siebte Koeffizient in der Potenzreihenentwicklung für die normierte Abbildungsfunktion $g(w)$ von $\mathfrak{G}_0$ auf $|w|<1$) zuordnen. Es ist nun eine wichtige Aufgabe, mit der sich die Theorie der Gebietsfunktionen befaßt, die Abhängigkeit einer solchen Funktion $F(z; \mathfrak{G}_0)$ bzw. eines solchen Funktionals $F(\mathfrak{G}_0)$ bei einer Veränderung des Gebiets $\mathfrak{G}_0$ festzustellen. Besonders

*) Diese Arbeit ist im Juli 1955 von der Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften der Technischen Hochschule Stuttgart als Habilitationsschrift angenommen worden. Die Untersuchungen wurden zum überwiegenden Teil zu der Zeit durchgeführt, als der Verfasser mit Unterstützung der Office of Naval Research of the United States Government der Harvard-Universität (Cambridge/USA.) angehörte. Für zahlreiche Hinweise und Anregungen ist der Verfasser Herrn Professor WALSH, für verschiedene Ratschläge während der Durchführung der Arbeit Herrn Professor LÖSCH zu großem Dank verpflichtet.

wird dabei interessieren, ob bei einer stetigen Veränderung von $\mathfrak{G}_0$ (in einem gewissen Sinne) sich auch die Gebietsfunktion bzw. das Funktional stetig ändert (in einem gewissen Sinne).

In unserem Fall handelt es sich um zweierlei verwandte Gebietsfunktionen.

Erstens sei $F(z; \mathfrak{G}_0) = f_0(z)$ die Funktion, die $|z| < 1$ konform und normiert auf das Gebiet $\mathfrak{G}_0$ abbildet, das wir uns zu diesem Zweck in eine w-Ebene gelegt denken und das $w = 0$ im Innern enthalte; normiert heißt dabei $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) > 0$. Unsere Frage ist nun also die, ob sich $f_0(z)$ stetig mit $\mathfrak{G}_0$ ändert. Anders ausgedrückt: Gegeben sei eine Folge von einfach zusammenhängenden und endlichen Gebieten $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ der w-Ebene, die alle $w = 0$ enthalten und die durch $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet seien. Gesucht werden topologische Bedingungen für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — die den Begriff der „Konvergenz von $\mathfrak{G}_n$ gegen $\mathfrak{G}_0$" präzisieren sollen —, unter denen die Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ konvergieren.

Was die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z| < 1$ angeht, sind sogar schon vor der Klärung der Randabbildungsfragen bei einer festen konformen Abbildung abschließende Ergebnisse erzielt worden:

Satz A (CARATHÉODORY)[1]. *Die Folge $\{f_n(z)\}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z| < 1$, wenn die Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ gegen $\mathfrak{G}_0$ konvergiert (im Sinne von § 1).*

Uns interessiert nun in Teil II der Arbeit vor allem die Frage, unter welchen topologischen Annahmen für die $\mathfrak{G}_n$ man die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ gegen $f_0(z)$ sogar im gesamten (offenen) Einheitskreis $|z| < 1$ behaupten kann. Diesbezüglich liegen notwendige und hinreichende Bedingungen von COURANT und RADÓ vor für den Sonderfall, daß $\mathfrak{G}_0$ und die $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sämtlich JORDAN-Gebiete sind. Wir lösen die Frage für allgemeine $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ vollständig, falls $\mathfrak{G}_0$ nur erreichbare Randpunkte besitzt, und zwar sind die topologischen Bedingungen für die $\mathfrak{G}_n$ erstens $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ und zweitens eine gewisse Forderung über die Glattheit der Ränder R_n von $\mathfrak{G}_n$ (§ 4). Die beiden Bedingungen lassen sich zusammenfassen in eine einzige, die verlangt, daß der in einem gewissen Sinne genommene Abstand d_n der Ränder R_n von R_0 mit $n \to \infty$ gegen Null strebt (§ 5). Nach einigen Überlegungen bezüglich des allgemeinen Falls, bei dem $\mathfrak{G}_0$ auch nicht erreichbare Randpunkte besitzt (§ 6), wird der Sonderfall der JORDAN-Gebiete nochmals behandelt (§ 7), und gestützt auf die dort gewonnenen Ergebnisse betrachten wir in § 8 solche $\mathfrak{G}_n$, die aus einem allgemeinen $\mathfrak{G}_0$ (das nicht erreichbare Randpunkte besitzen darf) in spezieller Weise hervorgehen. Schließlich wird der Grad der Approximation von $f_0(z)$ durch $f_n(z)$ $(|z| < 1)$ vermittels Flächen- und Linienintegralen gemessen (§ 9).

Als zweite Gebietsfunktion $F(z; \mathfrak{G}_0)$ betrachten wir in Teil III die Funktion $f_0(z)$, die $\mathfrak{G}_0$ (in der z-Ebene liegend, $z = 0$ enthaltend) konform und

[1] Vgl. CARATHÉODORY [5], S. 126 und [7], S. 73ff. In [5] wird noch gleichmäßige Beschränktheit aller $\mathfrak{G}_n$ angenommen.

normiert auf $|w|<1$ abbildet. Das Problem lautet wieder: Ändert sich $f_0(z)$ stetig mit $\mathfrak{G}_0$? Oder in Analogie zur obigen Fragestellung: Welches sind die topologischen Bedingungen für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, \ldots)$, unter denen die Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ konvergieren? Eine zu Satz A parallele Auskunft gibt

Satz B (BIEBERBACH)[2]). *Die Folge $\{f_n(z)\}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{G}_0$, wenn die Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ gegen $\mathfrak{G}_0$ konvergiert (im Sinne von § 1).*

Wenn wir uns jedoch nicht auf abgeschlossene Teile von $\mathfrak{G}_0$ beschränken wollen, so tritt im Vergleich zu vorhin noch die zusätzliche Schwierigkeit auf, daß die $f_n(z)$ im allgemeinen kein gemeinsames Definitionsgebiet haben[3]). Es ist daher zweckmäßiger, statt der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ gewisse Arten von „stetiger Konvergenz" zu untersuchen (§§ 11–13); erst im Sonderfall $\mathfrak{G}_0<\mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ können wir wieder über $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(z\in\mathfrak{G}_0,\ n\to\infty)$ Aussagen machen (§ 14).

Diesen Untersuchungen in Teil II und III vorangehend sind in Teil I neben einer kurzen Zusammenstellung der verwendeten Begriffe (§ 1) zwei Paragraphen mit funktionentheoretischen und topologischen Hilfssätzen (§§ 2–3). Besonders die erstgenannten Hilfssätze sind grundlegend wichtig beim Beweis unserer Konvergenzsätze; die einheitliche Methode zu ihrer Gewinnung ist das „Prinzip des DIRICHLETschen Integrals".

Nicht behandelt werden in dieser Arbeit Fragen, die sich mit der numerischen Erfassung der Abweichung der Funktionen $f_n(z)$ von $f_0(z)$ befassen, also z. B. Fragen um die JULIAsche Variationsformel ([19] und [16]) und die Theorie der konformen Abbildung kreisnaher Gebiete, soweit numerische Gesichtspunkte vorherrschend sind (z. B. [2], [3], [14], [20], [23], [25], [26], [36]). Ebensowenig beschäftigen wir uns mit der Approximation der Ableitungen $f_0^{(p)}(z)$ durch $f_n^{(p)}(z)$ für $n\to\infty$ (z. B. [24], [29], [34], [37], [39]), und schließlich werden auch Konvergenzsätze für allgemeinere, topologische Abbildungsfunktionen nicht berücksichtigt ([21]).

Teil I

Vorbereitungen

§1. Definitionen und Bezeichnungen

Wir erläutern zunächst einige Begriffe, die in der Arbeit benützt werden[4]).

Es sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene, das den Punkt $z=0$ enthalte; es heißt *endlich* (bzw. *beschränkt*), wenn $z=\infty$ nicht innerer (bzw. äußerer) Punkt von $\mathfrak{G}$ ist.

Ein endlicher Punkt P des Randes R von $\mathfrak{G}$ ist *erreichbar*, wenn es einen von $z=0$ nach P verlaufenden JORDAN-Bogen C_1 gibt, der abgesehen vom

[2]) Dieser Satz ist enthalten in einem allgemeineren, der sich bei BIEBERBACH [4], S. 13 findet. Schwächere Formen jenes Satzes sind schon in [1], insbes. S. 557.

[3]) Bei Satz B spielt das keine Rolle; denn $\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{G}_0$ $(n\to\infty)$ hat zur Folge, daß jeder abgeschlossene Teil von $\mathfrak{G}_0$ in $\mathfrak{G}_n$ enthalten ist für $n>\bar{n}$.

[4]) Vgl. dazu CARATHÉODORY ([5], [6]) und GATTEGNO-OSTROWSKI ([17], [18]).

Punkt P ganz in $\mathfrak{G}$ liegt; die erreichbaren Randpunkte liegen dicht auf R, d.h. jeder Punkt von R ist Häufungspunkt erreichbarer Randpunkte.

Verbindet ein JORDAN-Bogen C_2 zwei verschiedene Randpunkte P_1, P_2 von $\mathfrak{G}$ und verläuft sonst völlig in $\mathfrak{G}$, so heißt C_2 ein *Querschnitt* in $\mathfrak{G}$ und dieser zerlegt $\mathfrak{G}$ in zwei Teilgebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$. Liegt der Punkt $z=0$ nicht auf C_2, so enthalte z.B. $\mathfrak{G}_1$ diesen Punkt. Wir sagen dann, $\mathfrak{G}_2$ sei der durch C_2 erzeugte *Abschnitt* von $\mathfrak{G}$ oder ein Punkt aus $\mathfrak{G}_2$ werde durch C_2 *abgeschnitten* (oder auch *abgetrennt*). $\mathfrak{G}_2$ ist ein *δ-Abschnitt*, wenn C_2 einen Durchmesser $\leq\delta$ hat; C_2 heißt in diesem Falle *δ-Querschnitt*.

Will man bei der konformen Abbildung des endlichen Gebiets $\mathfrak{G}$ auf $|w|<1$ durch $z=f(w)$ auch die Abbildung des Randes R untersuchen, so zerlegt man R zweckmäßig in eine Menge von *Primenden*. Das zu dem Punkt w_0 ($|w_0|=1$) gehörige Primende $\mathfrak{P}=f(w_0)$ von $\mathfrak{G}$ ist die Menge aller Häufungspunkte von Folgen $\{f(w_n)\}$, wenn $\{w_n\}$ beliebig gegen w_0 konvergiert ($|w_n|<1$). Jedes solche Primende ist entweder ein einziger Randpunkt von $\mathfrak{G}$ oder aber ein abgeschlossenes Kontinuum von Punkten von R; *verschiedene Primenden* (d.h. Primenden, die zu verschiedenen w-Werten gehören) können gemeinsame Punkte haben oder sogar aus denselben Punkten bestehen. Sind verschiedene Primenden eines Gebiets $\mathfrak{G}$ fremd, so sagen wir, $\mathfrak{G}$ habe nur *einfache Primenden*.

Wichtig ist, daß sich die Primenden von $\mathfrak{G}$ rein topologisch charakterisieren lassen. Ist $\{C_n\}$ eine Folge von Querschnitten in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_n$ ihre Abschnitte, $\mathfrak{A}_{n+1}\subset\mathfrak{A}_n$, und strebt der Durchmesser von C_n gegen Null, so ist die Punktmenge $\bigcap_n \overline{\mathfrak{A}}_n$ ein Primende $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$. Die Punktfolge $\{z_k\}$ strebt gegen $\mathfrak{P}$, wenn zu jedem n_0 ein k_0 existiert derart, daß $z_k\in\mathfrak{A}_{n_0}$ $(k>k_0)$. Für die C_n, die $\mathfrak{P}$ definieren, kann man konzentrische Kreisbogen wählen, deren Mittelpunkt ein gewisser Punkt auf $\mathfrak{P}$ *(Hauptpunkt)* ist ([6], S. 343).

Besitzt $\mathfrak{P}=f(w_0)$ einen erreichbaren Randpunkt z_0 (und dann nur einen), so ist z_0 Hauptpunkt von $\mathfrak{P}$. In diesem Falle ist auch die Abbildungsfunktion $z=f(w)$ bei Annäherung an w_0 „stetig im Winkelraum", d.h. es ist $\lim\limits_{w\to w_0} f(w)=z_0$ bei Annäherung im Winkelraum.

Nun sei $\{\mathfrak{G}_n\}$ eine Folge einfach zusammenhängender endlicher Gebiete der z-Ebene, die alle $z=0$ im Innern enthalten. Gibt es keine Kreisscheibe um $z=0$, die allen $\mathfrak{G}_n$ angehört, so heißt $z=0$ der *Kern* $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$ der Gebietsfolge. Andernfalls wird das größte, $z=0$ enthaltende Gebiet $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$ mit der Eigenschaft, daß jeder abgeschlossene Teil von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{G}_n$ liegt für $n>n_0$, als *Kern* der Gebietsfolge bezeichnet. Die Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ heißt *konvergent gegen* $\mathfrak{K}$, wenn jede Teilfolge von $\{\mathfrak{G}_n\}$ den Kern $\mathfrak{K}$ hat; wir schreiben dann $\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{K}$. Die ausgearteten Fälle, daß $\mathfrak{K}$ aus der ganzen Ebene besteht oder identisch ist mit $z=0$, sind im folgenden ohne Bedeutung.

§2. Funktionentheoretische Hilfssätze

Beim Beweis unserer Sätze über das Verhalten von Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ sind vor allem drei Hilfssätze über das Randverhalten einer festen konformen Abbildung von Bedeutung.

Hilfssatz 1 (WOLFF). *Der Kreis $|z|<1$ sei durch $w=f(z)$ konform auf das einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{G}$ endlicher Fläche A abgebildet. Der in $|z|<1$ liegende Teil von $|z-z_0|=r$ sei mit $k(r)$ bezeichnet ($|z_0|=1$; $0<r<1$), und $L(r)\leq\infty$ sei die Länge des Bildes von $k(r)$ bei der Abbildung durch $w=f(z)$.*

(i) *Dann ist $L(r)<\infty$ f.ü. in $0<r<1$, und es ist im* LEBESGUEschen *Sinne*

$$\int_a^b \frac{L^2(r)}{r}\,dr \leq \pi A \qquad (0\leq a<b\leq 1).$$

(ii) *Daraus folgt, daß es zu jedem r ein ϱ mit $r<\varrho<\sqrt{r}$ gibt derart, daß das Bild von $k(\varrho)$ ein Querschnitt in $\mathfrak{G}$ der Länge $L(\varrho)\leq\left(\frac{2\pi A}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}}$ ist.*

Eine entsprechende Aussage für die Umkehrfunktion liefert der folgende

Hilfssatz 2 (FERRAND). *Es sei $\mathfrak{G}$ ein beliebiges, endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet, z_0 ein endlicher Randpunkt von $\mathfrak{G}$, und $D\leq\infty$ der Durchmesser von $\mathfrak{G}$. Der Durchschnitt von $|z-z_0|=r\left(r<\frac{D}{2}\right)$ mit $\mathfrak{G}$ ist eine höchstens abzählbare Menge von Kreisbogen $k_i(r)$, deren Bilder bei der konformen Abbildung $w=f(z)$ von $\mathfrak{G}$ auf $|w|<1$ die Längen $l_i(r)\leq\infty$ haben mögen, und es sei $L(r)=\sum_i l_i(r)$ gesetzt.*

(i) *Dann ist $L(r)<\infty$ f.ü. in $0<r<\frac{D}{2}$, und es ist im* LEBESGUEschen *Sinne*

$$\int_a^b \frac{L^2(r)}{r}\,dr \leq 2\pi^2 \qquad \left(0\leq a<b\leq\frac{D}{2}\right).$$

(ii) *Daraus folgt, daß es zu jedem $r<\min\left(1,\frac{D^2}{4}\right)$ ein ϱ mit $r<\varrho<\sqrt{r}$ gibt derart, daß $L(\varrho)\leq\frac{2\pi}{(\log 1/r)^{\frac{1}{2}}}$ ist.*

Wir benötigen eine Erweiterung von Hilfssatz 1, da wir es gelegentlich mit Gebieten zu tun haben, deren Fläche $A=\infty$ ist.

Hilfssatz 3. *Der Kreis $|z|<1$ sei durch $w=f(z)$ konform auf das einfach zusammenhängende, endliche Gebiet $\mathfrak{G}$ abgebildet. Für eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $|z|<1$ sei das Bild von $\mathfrak{M}$ in der w-Ebene vom endlichen inneren Flächenmaß A. Die höchstens abzählbar vielen Teile von $k(r)$ (Hilfssatz 1), deren Punkte innere Punkte von $\mathfrak{M}$ sind, seien mit $k_i(r)$ bezeichnet, und deren Bilder bei der Abbildung durch $w=f(z)$ mögen eine Länge $l_i(r)\leq\infty$ haben; schließlich sei noch $L(r)=\sum_i l_i(r)\leq\infty$ gesetzt.*

(i) *Dann gilt* (i) *von Hilfssatz 1.*

(ii) *Daraus folgt, daß es zu jedem r ein ϱ mit $r<\varrho<\sqrt{r}$ gibt derart, daß $L(\varrho)\leq\left(\frac{2\pi A}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}}$ ist.*

Man beachte, daß die Normierung von $f(z)$ in Hilfssatz 1—3 keine Rolle spielt.

Historisch ist folgendes zu bemerken. Allen drei Hilfssätzen liegt die sog. „Methode des DIRICHLETschen Integrals" zugrunde, was in diesem Zusammenhang soviel heißt wie: Abschätzung von Kurvenlängen durch Gebietsflächen mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung. Diese Methode geht auf COURANT zurück (vgl. [*10*], insbes. S. 104—105). Hilfssatz 1 stammt im wesentlichen von WOLFF ([*41*], S. 217—218), leicht schwächere Formen finden sich aber schon in WOLFF [*40*], S. 96 und TSUJI [*31*], S. 93—95; in obiger Form steht er bei WARSCHAWSKI [*36*], S. 337—338. Hilfssatz 2 wurde von FERRAND bewiesen ([*13*], S. 150—152); in GATTEGNO-OSTROWSKI ([*17*], S. 50) wird der Satz versehentlich WOLFF [*41*] zugeschrieben.

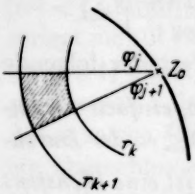


Fig. 1

Obwohl die Beweise der Hilfssätze ähnlich verlaufen, wollen wir doch in Anbetracht ihrer Wichtigkeit für unsere Entwicklungen wenigstens Hilfssatz 3 beweisen.

Beweis von Hilfssatz 3. Wir überziehen den Ring $a \leq |z - z_0| \leq b$ mit einem Polarkoordinatennetz (r, φ), dessen größte Maschenweite (Durchmesser der Maschen) ε_ν sei ($\{\varepsilon_\nu\}$ sei eine Nullfolge); das $(\nu+1)$-te Netz gehe durch Unterteilung (z. B. Halbierung) aus dem ν-ten Netz hervor. Sämtliche (endlich vielen) offenen Maschen des ν-ten Netzes, die samt Rand nur innere Punkte von $\mathfrak{M}$ enthalten, fassen wir zu einer offenen Menge $O^{(\nu)} \subset \mathfrak{M} \subset (|z| < 1)$ zusammen. Die endlich vielen Kreisbogenstücke von $|z - z_0| = r$ $(a \leq r \leq b)$, die in $\overline{O^{(\nu)}}$ liegen, seien mit $k_i(r, \varepsilon_\nu)$ bezeichnet, und es ist sofort klar, daß einerseits

$$\bigcup_i k_i(r, \varepsilon_\nu) \subset \bigcup_i k_i(r) \tag{2.1}$$

ist, andererseits aber auch

$$\lim_{\varepsilon_\nu \to 0} \bigcup_i k_i(r, \varepsilon_\nu) = \bigcup_i k_i(r).$$

Das Bild von $k_i(r, \varepsilon_\nu)$ liegt völlig in $\mathfrak{G}$ drin, sei mit $\gamma_i(r, \varepsilon_\nu)$ bezeichnet und habe eine Länge $l_i(r, \varepsilon_\nu) < \infty$, und schließlich setzen wir noch $L(r, \varepsilon_\nu) = \sum_i l_i(r, \varepsilon_\nu) < \infty$, wobei wegen der monotonen Verfeinerung unseres Netzes

(2.2) *$L(r, \varepsilon_\nu)$ bei festem r und $\varepsilon_\nu \to 0$ monoton gegen $L(r)$ wächst.*

Dann ist

$$L(r, \varepsilon_\nu) = \sum_i l_i(r, \varepsilon_\nu) = \int_{\sum_i k_i(r, \varepsilon_\nu)} |f'(z)|\,|dz| = \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|\, r\, d\varphi$$

($\int$ über endlich viele φ-Intervalle erstreckt), also vermöge der SCHWARZschen Ungleichung

$$L^2(r, \varepsilon_\nu) = \left(\int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})| \sqrt{r}\, \sqrt{r}\, d\varphi\right)^2$$
$$\leq \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|^2 r\, d\varphi \cdot \int r\, d\varphi < \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|^2 r\, d\varphi \cdot r\pi.$$

Integriert man diese Ungleichung über r im Intervall $r_k < r < r_{k+1}$, wo ja nach Konstruktion die φ-Intervalle sich nicht ändern, so erhält man

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{L^2(r, \varepsilon_\nu)}{r}\, dr < \pi \cdot \int_{r_k}^{r_{k+1}} \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|^2 r\, d\varphi\, dr,$$

und rechts steht die Fläche des Bildes des Teils von $O^{(\nu)}$, der in $r_k \leq r \leq r_{k+1}$ liegt, multipliziert mit π. Summiert man noch über die endlich vielen k-Werte auf, so kommt

$$\int_a^b \frac{L^2(r, \varepsilon_\nu)}{r}\, dr < \pi \cdot A.$$

Wegen (2.2) ist die Funktionenfolge $\left\{\frac{L^2(r, \varepsilon_\nu)}{r}\right\}$ bei festem r und $\nu \to \infty$ monoton wachsend und besitzt daher (vgl. z.B. TITCHMARSH [30], S. 346–347) f.ü. in $\langle a, b\rangle$ eine endliche Grenzfunktion $\frac{L^2(r)}{r}$ derart, daß

$$\int_a^b \frac{L^2(r)}{r}\, dr \leq \pi \cdot A$$

gilt, d.h. (i) ist bewiesen. Daraus folgt nun aber sofort (ii). Wäre nämlich $L(\varrho) > \left(\frac{2\pi A}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}}$ für alle ϱ in $\langle r, \sqrt{r}\rangle$, so wäre auch

$$\int_r^{\sqrt{r}} \frac{L^2(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho > \frac{2\pi A}{\log 1/r} \cdot \log \frac{\sqrt{r}}{r} = \pi \cdot A,$$

im Widerspruch zu (i).

§3. Topologische Hilfssätze

Um die Beweisführung in den nachfolgenden Sätzen nicht unterbrechen zu müssen, führen wir noch zwei einfache topologische Hilfssätze an.

Hilfssatz 4. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet, das $|w| < m$ enthält, und dessen Rand R von endlich vielen Kreisscheiben k_i vom Radius $\delta < \frac{m}{8}$ überdeckt sei; jede Scheibe enthalte tatsächlich einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$. In jedem k_i wähle man einen Punkt P_i und verbinde P_i mit P_j genau dann durch eine Gerade, wenn der Abstand $P_i, P_j < 4\delta$ beträgt. (Insbesondere werden P_i und P_j verbunden, wenn $k_i \cap k_j \neq 0$ ist.)*

Dann gibt es einen (sich eventuell überschlagenden) geschlossenen Polygonzug π, bestehend aus Strecken $P_i P_j$, der 0 umfaßt; d.h. es ist unmöglich, 0 mit ∞ durch eine JORDAN*-Kurve C zu verbinden, ohne π zu treffen.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M} = \bigcup_i k_i$ und $w = f(z)$ die normierte konforme Abbildung von $|z| < 1$ auf $\mathfrak{G}$. Wir zeichnen $|z| = r < 1$. Für $r > r_0$ gehört das Bild C_r von $|z| = r$ völlig zu $\mathfrak{M}$. Andernfalls gäbe es eine Folge von Punkten $p_i \in \mathfrak{G}$

mit $p_i \to R$ und $p_i \notin \mathfrak{M}$; dies geht nicht, da $\mathfrak{M}$ den Rand von $\mathfrak{G}$ ganz überdeckt und $\mathfrak{M}$ offen ist. Eine solche Kurve C_r halten wir fest; sie ist einfach geschlossen, analytisch, und enthält $w=0$ im Innern. Statt der Kreise k_i zeichnen wir nun Kreise k_i' mit Radien 5δ um dieselben Mittelpunkte und bilden $\mathfrak{M}' = \bigcup_i k_i'$. $\mathfrak{M}'$ enthält 0 nicht: Wäre $0 \in k_j'$, d.h. der Abstand des Mittelpunkts von k_j von $w=0$ kleiner als 5δ, so gäbe es einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$ mit Abstand $< 5\delta + \delta$ von $w=0$; Widerspruch. Also trennt $\mathfrak{M}'$ den Punkt $w=0$ von $w=\infty$: Jede von $w=0$ nach $w=\infty$ laufende JORDAN-Kurve trifft nämlich R und also $\mathfrak{M}'$. Wir bemerken noch: Jede Polygonseite liegt ganz in $\mathfrak{M}'$; denn sie ist höchstens 4δ lang und ist P_i der eine Endpunkt, so enthält k_i' die Seite P_iP_j.

Nun durchlaufen wir C_r in $\mathfrak{M}$ und markieren eine gewisse Kreisfolge. Von k_i komme man längs C_r in den neuen Kreis k_{i+1} (eventuell kommt man in mehrere, man greife dann einen heraus), was die Folge $k_1, k_2, \ldots, k_m, k_1$ ergebe, in der derselbe Kreis auch mehrfach auftreten kann. Da $k_i \cap k_{i+1} \neq 0$ ist, sind P_i und P_{i+1} verbunden, und $P_1, P_2, \ldots, P_m, P_1$ ist ein geschlossener Polygonzug π in $\mathfrak{M}'$. π und C_r sind in $\mathfrak{M}'$ homolog: Eine Strecke P_i, P_{i+1} läßt sich nämlich offenbar stetig auf ein Stück P_i', P_{i+1}' von C_r deformieren, ohne daß man $\mathfrak{M}'$ verläßt. Also umfaßt wie C_r auch π den Punkt $w=0$.

Wir verwenden Hilfssatz 4 beim Beweis des

Hilfssatz 5. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet mit $O \in \mathfrak{G}$, das in $|w| < M$ liege. Die (nicht notwendig beschränkten oder endlichen) Gebiete $\mathfrak{G}_n$ mit $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}$ haben Punkte in $|w| \geq 2M$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Punkt $Q_n \in \mathfrak{G}_n$ $(n \geq n_0)$ in $|w| \geq 2M$ gibt es einen in der ε-Umgebung des Randes R von $\mathfrak{G}$ verlaufenden geradlinigen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ der Länge $< \varepsilon$, der Q_n von $w=0$ abschneidet.*

Beweis. Wenn $|w| < m$ zu $\mathfrak{G}$ gehört, wählen wir ein positives δ mit $\delta < \min\left(\frac{\varepsilon}{5}, \frac{M}{4}, \frac{m}{8}\right)$ und überdecken den Rand R von $\mathfrak{G}$ durch eine endliche Zahl von Kreisen k_i mit Radien δ und Mittelpunkten auf R. Für ein n_0 liegen nun in jedem Kreis k_i Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$ $(n > n_0)$. Andernfalls gäbe es einen k_j derart, daß die Gebiete $\mathfrak{G}_{n_1}, \mathfrak{G}_{n_2}, \ldots, \mathfrak{G}_{n_k}, \ldots$ keine Randpunkte in k_j haben, d. h. der Kern der Teilfolge $\{\mathfrak{G}_{n_k}\}$ enthält entweder keinen Punkt von k_j oder ganz k_j, im Widerspruch zu $\mathfrak{G}_{n_k} \to \mathfrak{G}$. Wir fassen also ein festes $n > n_0$ ins Auge und markieren in jedem k_i einen Randpunkt P_i von $\mathfrak{G}_n$. Punkte P_i, P_j mit Abstand $< 4\delta$ verbinden wir geradlinig und greifen dann aus der Menge der gezeichneten Strecken einen (sich eventuell überschlagenden) Polygonzug π heraus, der $w=0$ umfaßt; dies ist nach Hilfssatz 4 möglich.

Da nun $\mathfrak{G}_n$ einen Punkt Q_n $(r_n e^{i\varphi_n})$ in $|w| \geq 2M$ hat, verbinden wir $w=0$ mit Q_n durch einen Polygonzug $\mathfrak{P}_n$, der völlig in $\mathfrak{G}_n$ liegt. Dieser $\mathfrak{P}_n$ trifft π sicher; andernfalls wäre nämlich $\mathfrak{P}_n$, zusammen mit dem Halbstrahl $\arg w = \varphi_n$ $(|w| \geq r_n)$, eine Verbindungskurve von $w=0$ nach $w=\infty$, die π nicht trifft, was unmöglich ist.

Wir betrachten nun $\mathfrak{P}_n$ näher. Sei A_1 der erste Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_n$ mit π, von $w=0$ aus gesehen. Aus $A_1 \in \mathfrak{P}_n$ folgt $A_1 \in \mathfrak{G}_n$, und man bezeichne mit A_1', A_1'' die beiden ersten Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$, die man erhält, wenn man von A_1 auf π nach beiden Seiten fortschreitet; spätestens sind die Endpunkte der Polygonseite, auf der A_1 liegt, Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$, da dieselben nach Konstruktion gewisse Punkte P_i, P_j sind. Sei B_1 der letzte Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_n$ mit A_1', A_1''. Verläßt $\mathfrak{P}_n$ die Strecke A_1', A_1'' auf derselben Seite, wie $\mathfrak{P}_n$ diese Strecke betreten hat, so ziehen wir eine kleine Strecke parallel A_1', A_1'' derart, daß der durch Zwischenschalten dieser Strecke abgeänderte Polygonzug $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ die Strecke A_1', A_1'' nicht mehr trifft. Sei A_2 der erste Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ mit π; er existiert, da ja $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ ebenso wie $\mathfrak{P}_n$ die Punkte $w=0$ und Q_n verbindet. Liegen die Verhältnisse wie bei A_1, so verfahren wir entsprechend. Kommen nur Fälle dieser Art vor, so haben wir nach endlich vielen Schritten ($\mathfrak{P}_n$ und π haben nur endlich viele Schnittpunkte) $\mathfrak{P}_n$ so abgeändert, daß er überhaupt keine Seite von π schneidet; dies ist unmöglich, wie wir sahen.

Also tritt an einer Stelle eine Strecke R_1, R_2 auf von der Länge $<4\delta$, die einen Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$ bildet und die überdies so beschaffen ist, daß das erste Betreten und das letzte Verlassen dieser Strecke durch $\mathfrak{P}_n^{(k)}$ (aus $\mathfrak{P}_n$ entstandener Polygonzug in $\mathfrak{G}_n$, der $w=0$ mit Q_n verbindet) auf verschiedenen Seiten geschieht.

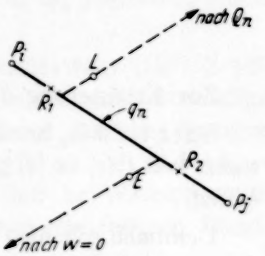


Fig. 2

Insgesamt merken wir an: R_1, R_2 ist ein geradliniger Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ der Länge $<4\delta<\varepsilon$, und da z.B. P_i in der δ-Umgebung eines Randpunkts von $\mathfrak{G}$ liegt, liegt R_1, R_2 in der $(5\delta<\varepsilon)$-Umgebung des Randes R von $\mathfrak{G}$. Außerdem trennt q_n den Punkt Q_n von $w=0$ ab: Offenbar läßt sich nämlich wohl E mit $w=0$ in $\mathfrak{G}_n$ verbinden, ohne daß man q_n trifft, nicht aber L, d.h. L liegt in dem durch q_n erzeugten Abschnitt von $\mathfrak{G}_n$; Q_n kann man aber mit L in $\mathfrak{G}_n$ verbinden ohne q_n zu treffen, also liegt Q_n auch in diesem genannten Abschnitt. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Teil II

Verhalten der Funktionen, die $|z|<1$ auf $\mathfrak{G}_n$ abbilden

Nach unseren Vorbereitungen kommen wir nunmehr zum eigentlichen Thema der Arbeit. Vorgegeben sind in der w-Ebene einfach zusammenhängende und endliche Gebiete $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, die alle $w=0$ enthalten mögen, und die durch die Funktionen $w=f_0(z)$, $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|z|<1$ abgebildet seien; dabei heißt z.B. $f_0(z)$ normiert, wenn $f_0(0)=0$, $f_0'(0)>0$ ist.

Wir stellen die Frage, unter welchen topologischen Bedingungen für die $\mathfrak{G}_n$ die Funktion $f_0(z)$ in $|z|<1$ durch $f_n(z)$ approximiert wird. Approximation

in welchem Sinne? Wann $f_n(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z|<1$ gleichmäßig gegen $f_0(z)$ strebt, ist durch den in der Einleitung genannten Satz A völlig entschieden. Hier wollen wir dagegen möglichst weitgehende Bedingungen dafür angeben, daß $f_n(z)$ gleichmäßig in $|z|<1$ gegen $f_0(z)$ strebt; wir schreiben absichtlich nicht „$|z|\leq 1$", damit auch solche Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ zugelassen sind, die in $|z|\leq 1$ nicht stetig sind.

§4. Ein allgemeiner Konvergenzsatz

Die eben aufgeworfene Frage wird in abschließender Weise erledigt, falls von $f_0(z)$ die Stetigkeit in $|z|\leq 1$ angenommen werden kann. Äquivalent hierzu wäre bekanntlich, daß $\mathfrak{G}_0$ beschränkt ist und nur erreichbare Randpunkte besitzt, wovon die erste Bedingung keine wesentliche Einschränkung bedeutet, während die zweite weiter unten noch untersucht werden wird.

Zur einfachen Formulierung unseres Ergebnisses benützen wir ein Maß für die Glattheit des Randes R_n von $\mathfrak{G}_n$, das von WARSCHAWSKI [36] eingeführt wurde. Für jedes $\delta>0$ betrachten wir sämtliche Querschnitte q in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\lambda_q\leq\delta$, die Abschnitte vom Durchmesser Λ_q erzeugen mögen. Die obere Grenze all dieser Λ_q ist unser Glattheitsmaß; in Formeln

$$\eta_n(\delta)=\left(\overline{\operatorname{fin}}_{\lambda_q\leq\delta}\,\Lambda_q\right)^{(n)}.$$

Zur Erläuterung dieser Funktion $\eta_n(\delta)$ beweisen wir folgenden einfachen

Satz 1. *Ist $\mathfrak{G}_n$ beschränkt, so strebt (bei festem n) genau dann $\eta_n(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$, wenn $w=f_n(z)$ in $|z|\leq 1$ stetig ist, d.h. wenn $\mathfrak{G}_n$ nur erreichbare Randpunkte besitzt.*

Demnach gilt also für jedes JORDAN-Gebiet die Aussage $\eta_n(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$, ebenso wie z.B. für einen längs eines Radius aufgeschlitzten Kreis.

Beweis. Ist zunächst $f_n(z)$ nicht stetig in $|z|\leq 1$, dann gibt es $z_k'\to z_0$, $z_k''\to z_0$ $(k=1,2,\ldots;\ |z_0|=1)$ so, daß $f_n(z_k')\to w_1$ und $f_n(z_k'')\to w_2$ strebt für $k\to\infty$ $(w_1\neq w_2)$. Nach Hilfssatz 1 können wir um z_0 einen Bogen $k(\varrho)$ des Kreises $|z-z_0|=\varrho$ schlagen, dessen Bild $\gamma(\varrho)$ einen beliebig kleinen Durchmesser hat, falls das r in $r<\varrho<\sqrt{r}$ hinreichend klein ist, und wegen $\eta_n(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$ ist auch der durch $\gamma(\varrho)$ erzeugte Abschnitt von beliebig kleinem Durchmesser bei genügend kleinem r. In diesem Abschnitt müssen aber wegen $z_k'\to z_0$, $z_k''\to z_0$ die Punkte $f_n(z_k')$ und $f_n(z_k'')$ liegen $(k>k_0)$, so daß $w_1\neq w_2$ nicht möglich ist.

Sei nun umgekehrt $f_n(z)$ stetig in $|z|\leq 1$, und es existiere eine Folge von Punktepaaren w_k', w_k'' aus $\mathfrak{G}_n$ mit $|w_k'-w_k''|\geq\alpha>0$, die durch Querschnitte q_k in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\delta_k\to 0$ von $w=0$ abgeschnitten seien. Die Anwendung von Hilfssatz 2 ergibt sofort, daß die Urbilder q_k' von q_k in der z-Ebene Durchmesser $\delta_k'\to 0$ aufweisen. Die Punkte $z_k'=f_n^{-1}(w_k')$ und $z_k''=f_n^{-1}(w_k'')$ liegen aber in dem zu q_k' gehörigen Abschnitt drin, so daß wegen der Stetigkeit von $f_n(z)$ in $|z|\leq 1$ sicher $f_n(z_k')-f_n(z_k'')\to 0$ streben müßte $(k\to\infty)$, im Widerspruch zur Annahme.

Wir kommen nun zu unserem angekündigten

Satz 2 *(Allgemeiner Konvergenzsatz). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_0$ *und* $\mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ *der w-Ebene mit* $O\in\mathfrak{G}_0$, $O\in\mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w=f_0(z)$, $w=f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|z|<1$ *abgebildet;* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt und besitze nur erreichbare Randpunkte.*

Dann sind die Bedingungen

$$\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0 \qquad (n\to\infty), \tag{4.1}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\eta_n(\delta)=\bar{\eta}(\delta)\to 0 \qquad (\delta\to 0) \tag{4.2}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ *gleichmäßig in* $|z|<1$ *gegen* $f_0(z)$ *strebt*[5]).

Vorbemerkungen. a) Die Bedingung (4.2) läßt sich umschreiben auf

$$\lim_{n\to\infty,\ \delta\to 0}\eta_n(\delta)=0; \tag{4.2'}$$

man hat dabei lediglich zu beachten, daß $\eta_n(\delta)$ bei festem n eine mit δ monoton fallende Funktion ist.

b) Anschaulich besagt somit (4.2) folgendes: Es ist unmöglich, daß für beliebig kleine δ und beliebig große n δ-Abschnitte von $\mathfrak{G}_n$ auftreten, deren Durchmesser $\geq\alpha>0$ bleibt.

c) Unser Satz 2 verbessert ein Resultat von WARSCHAWSKI ([*36*], S. 347 und Fußnote) einerseits dadurch, daß bei uns hinreichende und notwendige Bedingungen angegeben werden, und andererseits kann auf die dortigen Forderungen $D_i(R_n, R_0)\to 0$ $(n\to\infty)$ („innere Distanz") und $A_n\leq A$ ($A_n=$ Fläche von $\mathfrak{G}_n$) verzichtet werden. Man beachte, daß bei WARSCHAWSKI wegen $\eta_0(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$ auch nur solche $\mathfrak{G}_0$ mit lauter erreichbaren Randpunkten betrachtet werden (Satz 1).

Dem Beweis von Satz 2 schicken wir einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 6. *Gelten für die Gebiete* $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_n$ *von Satz 2 die Bedingungen* (4.1) *und* (4.2), *so gibt es keinen Häufungspunkt* P_0 *von Punkten* $P_n\in\mathfrak{G}_n$, *der außerhalb* $\overline{\mathfrak{G}}_0$ *liegt*[6]).

Beweis. (i) Liegt $\mathfrak{G}_0$ völlig in $|w|\leq M$, so zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{G}_n$ schließlich (d.h. für $n>n_0$) in $|w|\leq 2M$ gelegen ist. Andernfalls könnte man für beliebig hohe Indizes n Punkte $Q_n\in\mathfrak{G}_n$ in $|w|>2M$ finden, die vermöge Hilfssatz 5 durch Querschnitte q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\varepsilon_n\to 0$ von

[5]) An dieser Stelle wollen wir auf einen wichtigen Zusammenhang zwischen unserer Bedingung (4.2') für eine Folge von JORDAN-Gebieten und der Unbewalltheit des Randes R eines festen JORDAN-Gebiets $\mathfrak{G}$ an einer Stelle $w_0\in R$ ([*35*] und [*27*]) hinweisen. Unterwirft man nämlich ein $\mathfrak{G}$, das der letzteren Forderung genügt, einer Folge von einfachen linearen Transformationen, die w_0 festhalten und $\mathfrak{G}_n$ als Bild von $\mathfrak{G}$ erzeugen mögen, so zeigt sich, daß diese Gebiete $\mathfrak{G}_n$ gerade die Bedingungen (4.1) und (4.2') erfüllen. Dadurch ist vermöge der Theorie der variablen Gebiete die Möglichkeit gegeben, das Verhalten einer festen Abbildungsfunktion durch Betrachtung einer Funktionenfolge zu untersuchen. Vgl. auch die Einleitung zu [*33*] und die dort zitierte Literatur.

[6]) Die Umkehrung ist offensichtlich falsch (Fig. 12).

$w=0$ abgeschnitten würden, und zwar verlaufen diese q_n in der ε_n-Umgebung des Randes von $\mathfrak{G}_0$, also sicher in $|w| \leq M+\varepsilon_n$, so daß die Abschnitte einen Durchmesser $>M-\varepsilon_n$ haben müssen. Die Bedingung (4.2') und damit (4.2) kann daher nicht erfüllt sein.

(ii) Sei nun P_0 ein Häufungspunkt von Punkten $P_n \in \mathfrak{G}_n$, der außerhalb $\overline{\mathfrak{G}}_0$ liegt. Durch eine lineare Abbildung $w'=l(w)$ werfen wir unter Festhaltung von $w=0$ den P_0 nach $w'=\infty$, wobei $\mathfrak{G}_0$ in ein beschränktes (in $|w'| \leq M'$ gelegenes) Gebiet $\mathfrak{G}_0'$ übergeht, und entsprechend $\mathfrak{G}_n$ in $\mathfrak{G}_n'$. Die Voraussetzung (4.1) besagt nunmehr $\mathfrak{G}_n' \to \mathfrak{G}_0'$. Nach Annahme gibt es Punkte $P_n' \in \mathfrak{G}_n'$ mit $P_n' \to \infty$, die wieder nach Hilfssatz 5 durch Querschnitte q_n' in $\mathfrak{G}_n'$ vom Durchmesser $\varepsilon_n' \to 0$ von $w=0$ abgetrennt werden können, und zwar verlaufen die q_n' in $|w'| \leq M'+\varepsilon_n'$. In der w-Ebene bedeutet dies: Es gibt Querschnitte q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\varepsilon_n \to 0$, die in $|w-P_0| \geq a > 0$ verlaufen, und die Punkte P_n von $w=0$ abtrennen, die in beliebiger Nähe von P_0 liegen. Dies ist im Widerspruch zur Voraussetzung (4.2).

Beweis von Satz 2. (i) Die Voraussetzungen (4.1) und (4.2) seien erfüllt, weshalb die $\mathfrak{G}_n$ schließlich gleichmäßig beschränkt sind (Hilfssatz 6); ihr Flächeninhalt sei $\leq A$ $(n > n_0)$. Wir nehmen an, es existiere eine Folge n_k mit

$$|f_{n_k}(z_{n_k}) - f_0(z_{n_k})| \geq \alpha > 0 \qquad (0 < \alpha < 1),$$

wobei wegen Satz A im Falle $z_{n_k} \to z_0$ sicher $|z_0|=1$ ist. Nun wählen wir $\delta > 0$ so, daß $\eta_n(\delta) < \frac{\alpha}{2}$ ist für $n > \bar{n}$, und bestimmen danach ein r derart, daß

$$(\alpha) \quad \left(\frac{2\pi A}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}} < \delta \quad \text{und} \quad (\beta) \quad |f_0(z_1) - f_0(z_2)| < \frac{\alpha}{6}$$

ist ($|z_{1,2} - z_0| < r$, $|z_{1,2}| < 1$); für (β) verwenden wir die Stetigkeit von $f_0(z)$ in $|z| \leq 1$. Für unser r zeichnen wir unser $k(r)$ ein und wählen ein festes z^* im entsprechenden Abschnitt. Für dieses z^* merken wir an

$$|f_{n_k}(z^*) - f_0(z^*)| < \frac{\alpha}{3}$$

für genügend großen Index n_k.

Nun betrachten wir solche z_{n_k} unserer Folge, die in $|z-z_0| < r$ liegen. Für sie gilt einerseits

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z^*)| &= |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_0(z_{n_k}) + f_0(z_{n_k}) - f_0(z^*) + f_0(z^*) - f_{n_k}(z^*)| \\ &\geq \alpha - \frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Andererseits gibt es (Hilfssatz 1) ein $\varrho = \varrho_{n_k}$ mit $r < \varrho < \sqrt{r}$ so, daß das Bild von $k(\varrho_{n_k})$ ein Querschnitt in $\mathfrak{G}_{n_k}$ vom Durchmesser $< \left(\frac{2\pi A_{n_k}}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}} < \delta$ ist. Der zugehörige Abschnitt von $\mathfrak{G}_{n_k}$ enthält $f_{n_k}(z_{n_k})$ und $f_{n_k}(z^*)$, hat also sicher einen Durchmesser $\geq \frac{\alpha}{2}$, d.h. es wäre $\eta_{n_k}(\delta) \geq \alpha/2$ für beliebig große n_k, im Widerspruch zur Annahme (4.2).

(ii) Gilt $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z|<1)$, so ist zunächst (4.1) erfüllt (Satz A). Gäbe es Folgen $\delta_k \to 0$ und $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ mit $\eta_{n_k}(\delta_k) > \alpha > 0$, so wählen wir erstens $\varepsilon > 0$ so, daß $|f_0(z_1) - f_0(z_2)| < \frac{\alpha}{2}$ wird für $|z_1 - z_2| < \varepsilon$, $|z_{1,2}| < 1$, und zweitens einen Index $\bar{n}$ und eine Zahl $\varkappa > 0$ so, daß $|f_n(z) - f_0(z)| < \frac{\alpha}{4}$ $(|z|<1)$ ist $(n > \bar{n})$ und derart, daß jeder Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$ $(n > \bar{n})$ vom Durchmesser $< \varkappa$ ein Urbild in der z-Ebene vom Durchmesser $< \varepsilon$ hat (Hilfssatz 2; man beachte, daß wegen der schon erwiesenen Gültigkeit von (4.1) das D in Hilfssatz 2 oberhalb einer festen positiven Konstanten liegt). In dem zu obigem δ_k gehörigen Abschnitt von $\mathfrak{G}_{n_k}$ mögen die Punkte w_k', w_k'' liegen $(|w_k' - w_k''| \geq \alpha > 0)$, und für deren Urbilder z_k', z_k'' gilt nun, sobald $\delta_k < \varkappa$ und $n_k > \bar{n}$ ist,

$$|f_{n_k}(z_k') - f_{n_k}(z_k'')| = |f_{n_k}(z_k') - f_0(z_k') + f_0(z_k') - f_0(z_k'') + f_0(z_k'') - f_{n_k}(z_k'')|$$
$$< \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} = \alpha,$$

entgegen der Annahme $|w_k' - w_k''| \geq \alpha$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

§5. Eine andere Form des Konvergenzsatzes

Ein Blick auf (4.1) und (4.2), sowie auf den Beweis von Satz 2 zeigt, daß unsere Bedingungen, unter denen $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z|<1,\ n \to \infty)$ gilt, zerlegt sind in eine erste [nämlich (4.1)], die $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| \leq r < 1,\ n \to \infty)$ garantiert, und eine zweite [nämlich (4.2)], die das „Anhängen" von $f_n(z)$ für die übrigen Werte von z gestattet. Wir wollen in diesem Paragraphen die beiden Bedingungen zu einer einzigen kombinieren, die verlangt, daß *der in einem gewissen Sinne genommene Abstand der Ränder R_n von $\mathfrak{G}_n$ vom Rand R_0 von $\mathfrak{G}_0$ mit $n \to \infty$ gegen Null strebt.* Praktisch wird diese Bedingung weniger handlich sein als (4.1) und (4.2), jedoch lassen sich daran anschließend Überlegungen anstellen für den seither ausgeschlossenen Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzt.

a) Eine Metrik für Primenden. Das Gebiet $\mathfrak{G}$ sei beschränkt und einfach zusammenhängend und enthalte $w=0$. Wir betrachten zwei Primenden $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es Querschnitte q in $\mathfrak{G}$, die gleichzeitig $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $w=0$ trennen; ihr Durchmesser sei λ_q. Als Entfernung der beiden Primenden bezeichnen wir nun die Zahl

$$D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) = \operatorname*{fin}_q \lambda_q.$$

Insbesondere liegt $\mathfrak{P}_2$ in der ε-Umgebung von $\mathfrak{P}_1$, wenn es einen ε-Querschnitt in $\mathfrak{G}$ gibt, der $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $w=0$ trennt.

Durch die Entfernungsfunktion D ist eine *Metrik im Raume der Primenden von* $\mathfrak{G}$ erklärt. Von den drei Bedingungen

(i) $D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) \geq 0$ und $=0$ genau dann, wenn $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$,

(ii) $D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) = D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1)$,

(iii) $D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3) \leq D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3)$,

sind nämlich die beiden ersten offenbar erfüllt. Um (iii) zu prüfen, zeichnen wir Querschnitte q_1 und q_2 in $\mathfrak{G}$ vom Durchmesser $< D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + \varepsilon$ bzw. $< D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) + \varepsilon$, die $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ von $w = 0$ trennen; die entsprechenden Abschnitte seien g_1, g_2. Ist $g_1 \subset g_2$ oder $g_2 \subset g_1$, so trennt q_2 bzw. q_1 die Primenden $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_3$ von $w = 0$ ab und (iii) ist erfüllt. Andernfalls schneiden sich die Ränder von g_1 und g_2, da ja wegen $\mathfrak{P}_2 \in \bar{g}_1$, $\mathfrak{P}_2 \in \bar{g}_2$ sicher $g_1 \cap g_2 \neq 0$ ist. Das bedeutet, daß sich q_1, q_2 schneiden, und also trennt eine geeignete Zusammensetzung q von zwei Stücken von q_1 und q_2 die Primenden $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ von $w = 0$ ab; q hat aber einen Durchmesser $< D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) + 2\varepsilon$.

Ist $\mathfrak{G}$ ein JORDAN-Gebiet, so stimmt die durch die obige Metrik definierte Topologie überein mit der gewöhnlichen Topologie, in welcher der Abstand zweier Randpunkte w_1, w_2 von $\mathfrak{G}$ erklärt ist durch $|w_1 - w_2|$[7]). Ist nämlich $w = f(z)$ die in $|z| \leq 1$ stetige und umkehrbar eindeutige Abbildungsfunktion von $|z| \leq 1$ auf $\mathfrak{G}$, so folgt aus $|w_1 - w_2| < \varepsilon$ sofort $|z_1 - z_2| < \varepsilon'(\varepsilon)$, also nach dem WOLFFschen Hilfssatz 1 $D(w_1, w_2) < \varepsilon''(\varepsilon)$, mit $\varepsilon''(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$; analog ist der Schluß von $D(w_1, w_2) \to 0$ auf $|w_1 - w_2| \to 0$.

Auf ähnliche Weise zeigt man: Für ein einfach zusammenhängendes und beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}$ mit $O \in \mathfrak{G}$ ist die durch die konforme Abbildung gelieferte, sog. „natürliche" Zuordnung der Primenden von $\mathfrak{G}$ auf $|z| = 1$ umkehrbar eindeutig und stetig, d.h. topologisch, im Sinne der oben eingeführten Topologie[8]). Wir fügen noch hinzu, daß jede topologische Abbildung φ von $|z| = 1$ auf die Primenden von $\mathfrak{G}$ dadurch entsteht, daß man zuerst $|z| = 1$ einer topologischen Abbildung in sich unterwirft und dann die natürliche Abbildung N anwendet; denn es ist $\varphi = N(N^{-1}\varphi)$, wobei $N^{-1}\varphi$ den $|z| = 1$ topologisch auf sich selbst abbildet.

b) FRÉCHET-Entfernung zwischen R_n und R_0. Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ mit $O \in \mathfrak{G}_n$ und Rändern R_n seien einfach zusammenhängend und beschränkt; ferner wollen wir von $\mathfrak{G}_0$ zunächst wieder annehmen, es besitze nur erreichbare Randpunkte. Durch $\varphi_0(t)$ sei eine topologische Abbildung der Kreislinie $|t| = 1$ auf R_0 gegeben (z.B. die „natürliche" Zuordnung); sie ist beliebig, wird aber im weiteren Verlauf festgehalten. Dagegen sei mit $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine beliebige, variable, topologische Abbildung von $|t| = 1$ auf R_n bezeichnet, wobei die in **a)** eingeführte Topologie für die Primenden von $\mathfrak{G}_n$ benützt werde.

Für irgend solche Darstellungen φ_n von R_n definieren wir als Entfernung entsprechender Elemente $\varphi_0(t)$ (punktförmig wegen Erreichbarkeit aller Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$) und $\varphi_n(t)$ die Zahl

$$d\left(\varphi_0(t), \varphi_n(t)\right) = \max_{w \in \varphi_n(t)} |w - \varphi_0(t)|, \tag{5.1}$$

und als von φ_n noch abhängige Entfernung zwischen R_n und R_0

$$d_n(\varphi_n) = \max_{|t|=1} d\left(\varphi_0(t), \varphi_n(t)\right). \tag{5.2}$$

[7]) Zwei in derselben Menge $\mathfrak{M}$ erklärte Topologien heißen übereinstimmend oder auch gleichwertig, wenn es für jeden Punkt $P \in \mathfrak{M}$ zu jeder Umgebung $U^{(1)}$ von P im Sinne der ersten Topologie eine Umgebung $U^{(2)}$ von P im Sinne der zweiten Topologie gibt derart, daß $U^{(2)} \subset U^{(1)}$ ist, und umgekehrt.

[8]) Vgl. dazu auch CARATHÉODORY [6], S. 351, Fußnote *).

Daß hierin (5.1) für jedes feste n und festes t existiert, ist klar, da ja jedes Primende von $\mathfrak{G}_n$ eine abgeschlossene Punktmenge ist. Bezüglich der Existenz von $d_n(\varphi_n)$ zeigen wir zunächst:

Hilfssatz 7. *Die Funktion* $\psi(t) = d\left(\varphi_0(t), \varphi_n(t)\right)$ *ist für jedes feste* $n = 1, 2, \ldots$ *eine auf* $|t| = 1$ *nach oben halbstetige Funktion*[9]; *es ist sogar* $\psi(t_0) = \overline{\lim_{t \to t_0}} \psi(t)$ *für alle* t_0 *auf* $|t| = 1$.

Beweis. (i) Für eine beliebige Folge $t_m \to t_0$ wählen wir $w_m \in \varphi_n(t_m)$ so, daß $|w_m - \varphi_0(t_m)| = d\left(\varphi_0(t_m), \varphi_n(t_m)\right)$. Ferner sei $w'_m \in \mathfrak{G}_n$ so nahe an w_m gewählt, daß sowohl $w_m - w'_m \to 0$ als auch bei der konformen Abbildung durch f_n^{-1} sicher $z_m - z'_m \to 0$ strebt $(m \to \infty, |z_m| = 1, |z'_m| < 1)$. Mit $\varphi_n(t_m) \to \varphi_n(t_0)$ im Sinne unserer Topologie strebt auch $z_m \to f_n^{-1}\varphi_n(t_0)$ und $z'_m \to f_n^{-1}\varphi_n(t_0)$, weshalb $f_n(z'_m)$ alle Häufungspunkte auf $\varphi_n(t_0)$ hat. Also ist, weil ja auch $\varphi_0(t_m) \to \varphi_0(t_0)$,

$$\psi(t_0) = d\left(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_0)\right) \geq \overline{\lim_m} \left|\varphi_0(t_0) - f_n(z'_m)\right|$$

$$= \overline{\lim_m} \left|\varphi_0(t_0) - w_m\right| = \overline{\lim_m} \left|\varphi_0(t_m) - w_m\right|,$$

also gilt $\overline{\lim_m} \psi(t_m) \leq \psi(t_0)$.

(ii) Sei $w_0 \in \varphi_n(t_0)$ so, daß $|w_0 - \varphi_0(t_0)| = d\left(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_0)\right)$. Da das Primende $\varphi_n(t_0)$ auch als Durchschnitt von abgeschlossenen Abschnitten definiert werden kann, deren zugehörige Querschnitte Durchmesser aufweisen die gegen Null streben, stellt man leicht fest, daß w_0 auch Häufungspunkt von Punkten $w_m \in \varphi_n(t_m)$ ist für eine gewisse Folge $t_m \to t_0$ mit $t_m \neq t_0$. Daher ist

$$\psi(t_0) = d\left(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_0)\right) = \left|w_0 - \varphi_0(t_0)\right| = \lim_m \left|w_m - \varphi_0(t_0)\right|$$

$$\leq \overline{\lim_m} d\left(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_m)\right) = \overline{\lim_m} d\left(\varphi_0(t_m), \varphi_n(t_m)\right),$$

also gilt $\overline{\lim_m} \psi(t_m) \geq \psi(t_0)$.

Da hiernach sicher $\psi(t_0) \geq \overline{\lim_{t \to t_0}} \psi(t)$ ist, liegt für $\psi(t)$ Halbstetigkeit nach oben vor, was wiederum zur Folge hat, daß die Funktion $\psi(t)$ auf $|t| = 1$ ihr Maximum annimmt ([8], S. 115).

Also existiert $d_n(\varphi_n)$ für alle zugelassenen Darstellungen φ_n von R_n, und wir definieren nun als FRÉCHET-*Entfernung der Ränder* R_n, R_0 die Zahl

$$d_n \equiv d_n(R_n, R_0) = \underline{\operatorname{fin}}_{\varphi_n} d_n(\varphi_n), \tag{5.3}$$

wobei φ_n alle zugelassenen Darstellungen von R_n durchläuft. Unser Begriff erweitert damit den Begriff der FRÉCHET-Entfernung zwischen zwei JORDAN-Kurven ([15]), der schon früher in diesem Zusammenhang Verwendung gefunden hat (vgl. § 7).

[9]) Das heißt es ist $\psi(t_0) \geq \overline{\lim_{t \to t_0}} \psi(t)$; vgl. z. B. [8], S. 111. Daß $\psi(t)$ im allgemeinen keine stetige Funktion ist, sieht man an einfachen Beispielen.

c) Andere Form des Konvergenzsatzes. Unter Benutzung des in **b)** eingeführten Begriffs der FRÉCHET-Entfernung d_n zwischen R_n und R_0 können wir nun Satz 2 eine andere Form geben.

Satz 3. *Die einfach zusammenhängenden und beschränkten*[10]) *Gebiete* $\mathfrak{G}_n (n = 0, 1, \ldots)$ *(Ränder* R_n*) der w-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w = f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|z| < 1$ *abgebildet;* $\mathfrak{G}_0$ *besitze nur erreichbare Randpunkte.*

Dann ist die Bedingung

$$d_n \equiv d_n(R_n, R_0) \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{5.4}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ *gleichmäßig in* $|z| < 1$ *gegen* $f_0(z)$ *strebt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß (5.4) die Bedingungen (4.1) und (4.2) nach sich zieht. Zu diesem Zweck betrachten wir für jedes $n = 1, 2, \ldots$ eine topologische Darstellung φ_n von R_n, für die $d_n(\varphi_n) < d_n + \varepsilon_n$, also $d_n(\varphi_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ strebt.

(i) Die Bedingung (4.1) ist erfüllt. Sei $\{P_n\}$ irgendeine Folge von Punkten $P_n \in R_n$, d. h. $P_n \in \varphi_n(t_n)$, und z. B. $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$. Aus der Erklärung von $d_n(\varphi_n)$ und $d_n(\varphi_n) \to 0$ folgt sofort, daß $|P_n - \varphi_0(t_n)| \to 0$, also $|P_n - \varphi_0(t_0)| \to 0$ strebt für $n \to \infty$. Alle Häufungspunkte der Folge $\{P_n\}$ liegen somit auf dem Rand von $\mathfrak{G}_0$. Andererseits ist auch jeder Punkt von R_0 Häufungspunkt von Punkten $P_n \in R_n$, d. h. es gilt gewiß (4.1).

(ii) Die Bedingung (4.2) ist erfüllt. Andernfalls könnte man eine Teilfolge der n finden (weiter mit n bezeichnet) und Primenden $\mathfrak{P}_n^{(1)}$, $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ von $\mathfrak{G}_n$ mit $D(\mathfrak{P}_n^{(1)}, \mathfrak{P}_n^{(2)}) \to 0$ $(n \to \infty)$, auf denen aber andererseits Punkte $P_n^{(1)}$, $P_n^{(2)}$ liegen mit $|P_n^{(1)} - P_n^{(2)}| \geq \alpha > 0$. Deren Parameterwerte in der Darstellung für R_n durch unser gewähltes $\varphi_n(t)$ seien $t_n^{(1)}$, $t_n^{(2)}$.

Fall 1. $t_n^{(1)} - t_n^{(2)} \to 0$. Dann ist $\varphi_0(t_n^{(1)}) - \varphi_0(t_n^{(2)}) \to 0$ und also

$$\begin{aligned} d\left(\varphi_0(t_n^{(1)}), \varphi_n(t_n^{(1)})\right) + d\left(\varphi_0(t_n^{(2)}), \varphi_n(t_n^{(2)})\right) &\geq |[\varphi_0(t_n^{(1)}) - \varphi_0(t_n^{(2)})] - [P_n^{(1)} - P_n^{(2)}]| \\ &= |P_n^{(1)} - P_n^{(2)}| + o(1) \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \qquad (n > \bar{n}); \end{aligned}$$

dies ist im Widerspruch zur Annahme $d_n(\varphi_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Fall 2. $t_n^{(1)} - t_n^{(2)} \geq \beta > 0$ für eine gewisse Teilfolge, die wir wiederum mit n bezeichnen. Dann haben die Endpunkte $P_n^{(3)}$, $P_n^{(4)}$ der Querschnitte q_n, die die Primenden $\mathfrak{P}_n^{(1)}$, $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ abschneiden, Parameterwerte $t_n^{(3)}$, $t_n^{(4)}$, für die erst recht $|t_n^{(3)} - t_n^{(4)}| \geq \beta > 0$ gilt. Obige Abschätzung gibt daher wieder für unsere gewählten φ_n

$$\begin{aligned} &d\left(\varphi_0(t_n^{(3)}), \varphi_n(t_n^{(3)})\right) + d\left(\varphi_0(t_n^{(4)}), \varphi_n(t_n^{(4)})\right) \\ &\geq |[\varphi_0(t_n^{(3)}) - \varphi_0(t_n^{(4)})] - [P_n^{(3)} - P_n^{(4)}]| \geq |\varphi_0(t_n^{(3)}) - \varphi_0(t_n^{(4)})| + o(1), \end{aligned}$$

[10]) Die Beschränktheit der $\mathfrak{G}_n$ ist keine einschneidende Voraussetzung, da sie im Falle $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1,\ n \to \infty)$ ja ohnehin erfüllt sein muß, sofern $\mathfrak{G}_0$ beschränkt ist.

was nicht gegen Null streben kann für $n \to \infty$, da ja $t_n^{(3)} - t_n^{(4)} \not\to 0$. Auch im Fall 2 erhalten wir also einen Widerspruch zur Annahme $d_n(\varphi_n) \to 0$; also gilt (4.2).

Umgekehrt implizieren (4.1) und (4.2) zusammen die Gültigkeit von (5.4). Liegt nämlich für die Darstellung von R_0 die natürliche Abbildung N_0 von $|t| = 1$ zugrunde, so wähle man $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ebenfalls als natürliche Abbildung von $|t| = 1$ auf R_n, und man hat infolge $|f_n(z) - f_0(z)| \leq \varepsilon_n$ $(|z| < 1)$ auch sofort $d_n(\varphi_n) \leq \varepsilon_n$, also erst recht $d_n \equiv d_n(R_n, R_0) \to 0$ $(n \to \infty)$. Wenn aber von einer beliebigen topologischen Darstellung $\psi(t)$ von R_0 ausgegangen war, $\psi = N_0(N_0^{-1}\psi)$, so wähle man einfach für die Darstellung von R_n die Abbildung $\varphi_n = N_n(N_0^{-1}\psi)$, und genau so wie oben sieht man ein, daß auch in diesem Falle $d_n(\varphi_n) \to 0$ strebt für $n \to \infty$.

§6. Untersuchungen für den Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzt

Wir wollen nun einige Überlegungen anstellen, deren Ziel es ist, auch in dem seither ausgeschlossenen Fall der Existenz nicht erreichbarer Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$ gewisse Aussagen zu machen; zu abschließenden Ergebnissen werden wir allerdings hier nicht gelangen.

Man wird zunächst versuchen, auch in diesem allgemeineren Falle eine FRÉCHET-Entfernung $d_n(R_n, R_0)$ zu erklären, wozu man lediglich (5.1) abändern wird zu

$$d\big(\varphi_0(t), \varphi_n(t)\big) = \max_{w_1 \in \varphi_0(t);\, w_2 \in \varphi_n(t)} |w_1 - w_2|; \tag{5.1'}$$

$d_n(\varphi_n)$ und $d_n(R_n, R_0)$ können wie oben erklärt werden. Indessen kann beim Vorliegen nicht punktförmiger Primenden von $\mathfrak{G}_0$ der Ausdruck (5.1') und daher $d_n(R_n, R_0)$ nie beliebig klein werden, obwohl $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1, n \to \infty)$ wohl möglich ist.

Auch dann, wenn (5.1) nicht durch (5.1'), sondern durch

$$d\big(\varphi_0(t), \varphi_n(t)\big) = \min_{w_1 \in \varphi_0(t);\, w_2 \in \varphi_n(t)} |w_1 - w_2| \tag{5.1''}$$

ersetzt wird [also durch den Abstand der Punktmengen $\varphi_0(t)$, $\varphi_n(t)$], ergibt sich keine zweckmäßige FRÉCHET-Distanz. Diese kann nämlich, sogar für ein JORDAN-Gebiet $\mathfrak{G}_0$, gegen Null streben, ohne $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ zu implizieren. Ein Beispiel dafür kann man mit Hilfe einer Konstruktion von CARATHÉODORY ([6], S. 366) herleiten.

Drittens stellen wir fest:

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 ist* (5.4) *äquivalent zur folgenden Bedingung:*

(6.1) *Es gibt topologische Abbildungen $\varphi_n(t)$ von $|t| = 1$ auf R_n derart, daß für jedes t_0 die Menge $\varphi_0(t_0)$ identisch ist mit der Menge aller Häufungspunkte von Folgen $\{\varphi_n(t_n)\}$, wo $\{t_n\}$ alle möglichen gegen t_0 konvergenten Folgen durchläuft.*

Beweis. Der erste Teil des Beweises [aus (5.4) folgt (6.1)] folgt aus Satz 3(i). Ist umgekehrt (6.1) erfüllt für eine gewisse Folge von Abbildungen $\varphi_n(t)$, so nehme man dieselben zur Bildung von (5.1) und (5.2). Es ist $d_n(R_n, R_0) \leq d_n(\varphi_n)$, und wäre $d_n(R_n, R_0) \to 0$ falsch, so könnte man also Parameterwerte t_n finden $(t_n \to t_0)$, für die $d(\varphi_0(t_n), \varphi_n(t_n)) \geq \alpha > 0$, also $|\varphi_0(t_n) - P_n| \geq \alpha > 0$ wäre für eine Teilfolge der n. Also würde auch $|\varphi_0(t_0) - P_n| \geq \frac{\alpha}{2} > 0$ bestehen, im Gegensatz zur Annahme (6.1).

Wir sehen nun aber, daß die Bedingung (6.1) ohne weiteres auf den Fall ausgedehnt werden kann, daß $\mathfrak{G}_0$ auch nicht erreichbare Randpunkte besitzt; das bedeutet lediglich, daß $\varphi_0(t_0)$ nicht mehr wie oben aus einem Punkte zu bestehen braucht. Es entsteht also die Frage, ob (6.1) für das Bestehen von $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1, n \to \infty)$ für allgemeines $\mathfrak{G}_0$ notwendig und hinreichend ist.

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3, aber für allgemeines* $\mathfrak{G}_0$, *ist* (6.1) *notwendig, aber nicht hinreichend für das Bestehen von* $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1, n \to \infty)$.

Beweis. (i) Die Bedingung (6.1) ist notwendig. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit (s. oben) annehmen, $\varphi_0(t)$ sei die natürliche Darstellung von R_0, und wir wählen dann $\varphi_n(t)$ ebenso als die natürliche Darstellung von R_n.

a) Ist $t_n \to t_0$, $P_n \in \varphi_n(t_n)$, so gibt es wegen $f_n(z) - f_0(z) \Rightarrow 0$ $(|z| < 1, n \to \infty)$ einen Punkt $Q_n \in \varphi_0(t_n)$ mit $|Q_n - P_n| \to 0$. Die Folge $\{Q_n\}$ hat aber bloß Häufungspunkte auf $\varphi_0(t_0)$, also gilt dies auch für $\{P_n\}$.

b) Ist Q_0 ein beliebiger Punkt auf $\varphi_0(t_0)$, so gibt es eine Folge $t_n \to t_0$ und Punkte $Q_n \in \varphi_0(t_n)$ mit $Q_n \to Q_0$. Wieder infolge $f_n(z) - f_0(z) \Rightarrow 0$ finden wir Punkte $P_n \in \varphi_n(t_n)$ mit $|P_n - Q_n| \to 0$, also ist Q_0 tatsächlich Häufungspunkt von Punkten auf $\varphi_n(t_n)$.

(ii) Um zu zeigen, daß (6.1) nicht hinreicht, um $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1, n \to \infty)$ zu garantieren, betrachten wir das folgende Beispiel.

Wir definieren $\mathfrak{G}_n$ durch die konforme Abbildung von $|z| < 1$ vermöge

$$f_n(z) = f_0(e^{i\varepsilon_n} z)\, e^{-i\varepsilon_n} \qquad (\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty); \tag{6.2}$$

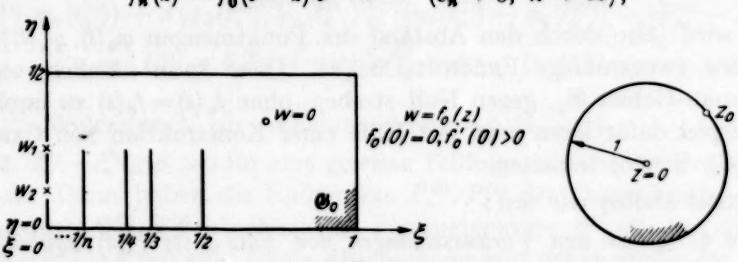


Fig. 3

das bedeutet, daß $\mathfrak{G}_n$ durch Rotation um $w = 0$ um den Winkel ε_n aus $\mathfrak{G}_0$ hervorgeht, weshalb (6.1) sicher erfüllt ist (man nehme die natürlichen Abbildungen φ_n). Die Funktionen $f_n(z)$ sind weiter normiert: $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$; all dies gilt unabhängig von der Wahl der ε_n.

Andererseits ist nun aber für eine gewisse Wahl der ε_n die Relation $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z|<1,\ n\to\infty)$ nicht erfüllt. Um dies einzusehen, fixieren wir w_1 und w_2 auf dem nicht punktförmigen Primende $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}_0$, das $z_0 = e^{i\vartheta_0}$ entspreche; w_1 sei der erreichbare Randpunkt von $\mathfrak{P}$, w_2 ein nicht erreichbarer Randpunkt von $\mathfrak{P}$. Es gibt Punkte $\zeta_n = r_n e^{i\vartheta_n}$ mit $r_n \nearrow 1$, $\vartheta_n \to \vartheta_0$, $f_0(\zeta_n) \to w_2$, und wir setzen in (6.2) jetzt $\varepsilon_n = \vartheta_n - \vartheta_0$. Für $z_n = r_n e^{i\vartheta_0}$ hat man dann einerseits

$$f_n(z_n) = f_0(e^{i\vartheta_n - i\vartheta_0} \cdot r_n e^{i\vartheta_0})\, e^{-i(\vartheta_n-\vartheta_0)} = f_0(e^{i\vartheta_n}\cdot r_n)\, e^{-i(\vartheta_n-\vartheta_0)} \to w_2,$$

andererseits aber

$$f_0(z_n) = f_0(r_n e^{i\vartheta_0}) \to w_1,$$

also sicher nicht

$$f_n(z) - f_0(z) \Rightarrow 0 \quad (|z|<1,\ n\to\infty).$$

§7. Der Sonderfall der JORDAN-Gebiete

In diesem Paragraphen wollen wir annehmen, daß sämtliche Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ JORDAN-Gebiete mit $O \in \mathfrak{G}_n$ sind; sie seien von den JORDAN-Kurven C_n berandet, und $w = f_n(z)$ seien die konformen und normierten Abbildungen von $|z| \leq 1$ auf $\mathfrak{G}_n$. Wir beabsichtigen, diesen Sonderfall mit Hilfe unseres Satzes 2 noch etwas genauer zu untersuchen.

Zunächst führen wir die diesbezüglichen bekannten Ergebnisse an[11]), damit der Zusammenhang mit unseren Resultaten deutlich wird.

Satz C (COURANT). *Notwendig und hinreichend dafür, daß* $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| \leq 1, n\to\infty)$ *gilt, sind die folgenden Bedingungen:*

(i) *Jeder Häufungspunkt einer beliebigen Punktfolge* $\{P_n\}$ *mit* $P_n \in C_n$ *liegt auf* C_0.

(ii) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\bar{n}(\varepsilon)$ *und ein* $\delta(\varepsilon)$ *mit* $\delta(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ *derart, daß es für jeden Punkt* $P_0 \in C_0$ *und beliebige Punkte* $P_1 \in \mathfrak{G}_n$, $P_2 \in \mathfrak{G}_n$ $(n > \bar{n})$ *aus der* ε*-Umgebung von* P_0 *einen Streckenzug* l_n *in* $\mathfrak{G}_n$ *gibt, der* P_1 *mit* P_2 *verbindet und einen Durchmesser* $< \delta(\varepsilon)$ *hat*[12]).

Ist für die Folge $\{C_n\}$ bloß (i) erfüllt, so spricht COURANT von „*gewöhnlicher Konvergenz* $C_n \to C_0$"; sind dagegen (i) und (ii) beide erfüllt, so wird von „*glatter Konvergenz* $C_n \to C_0$" gesprochen ([*11*], S. 69).

Satz D (RADÓ). *Notwendig und hinreichend dafür, daß* $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| \leq 1, n\to\infty)$ *gilt, ist die Bedingung* $d_n \to 0$, *wenn* d_n *die* FRÉCHET*-Entfernung der* JORDAN*-Kurven* C_n, C_0 [*im Sinne unserer Definition* (5.3)] *bezeichnet.*

Weiterhin wird unser Sonderfall noch im Rahmen eines schon in § 4 zitierten allgemeinen Satzes bei WARSCHAWSKI [*36*] besprochen. Wenn wir nun im folgenden eine weitere Bedingung hinzufügen, unter der $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$

[11]) Vgl. dazu COURANT [*10*], S. 106—109 und [*11*], sowie RADÓ [*28*], S. 182. Die Äquivalenz der Bedingungen von COURANT und RADÓ wurde von MARKOUCHEVITCH [*24*], S. 874 nachgewiesen.

[12]) Dieser Satz wird in der Literatur verschiedentlich ungenau zitiert; vgl. GATTEGNO-OSTROWSKI [*17*], S. 28—29 und Enzyklopädie [*22*], S. 375, Fußnote 636.

($|z| \leq 1, n \to \infty$) gilt, so deshalb, weil wir darin die Bedingungen von COURANT und RADÓ trennen in eine erste, die $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq r < 1, n \to \infty$) garantiert, und eine zweite, die das „Anhängen" von $f_n(z)$ für die übrigen Werte von z gestattet; die zweite Bedingung drückt eine gewisse Glattheit der Ränder R_n aus und ist völlig unabhängig von der Beziehung von $\mathfrak{G}_n$ zu $\mathfrak{G}_0$.

Um diese zweite Bedingung übersichtlich darstellen zu können, führen wir folgendes Maß $\varkappa_n(\delta)$ für die Glattheit der JORDAN-Kurve C_n ein. Wir betrachten irgend zwei Punkte $P_1 \in C_n$, $P_2 \in C_n$, deren Abstand $\leq \delta$ ist, und die C_n in die Teile $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$ mit Durchmessern $\Lambda_n^{(1)}, \Lambda_n^{(2)}$ zerlegen. Sodann setzen wir $\Lambda = \min(\Lambda_n^{(1)}, \Lambda_n^{(2)})$ und

$$\varkappa_n(\delta) = \max_{\substack{P_1 \in C_n;\ P_2 \in C_n \\ |P_1 - P_2| \leq \delta}} \Lambda. \tag{7.1}$$

Satz 6 (JORDAN-*Gebiete*). *Notwendig und hinreichend dafür, daß* $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq 1, n \to \infty$) *gilt, sind die Bedingungen*

$$\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0 \quad (n \to \infty), \tag{7.2}$$

$$\lim_{n \to \infty,\ \delta \to 0} \varkappa_n(\delta) = 0. \tag{7.3}$$

Vorbemerkung. Die Bedingung (7.3) ist nicht etwa lediglich eine andere Form von (4.2) oder (4.2'). Denn einmal macht, im Gegensatz zu (4.2'), unsere jetzige Bedingung (7.3) keinen Gebrauch von der Tatsache, daß C_n ein Gebiet berandet, und zum andern folgt aus $\eta_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$) nicht immer $\varkappa_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$), wie aus beigezeichnetem Beispiel ersichtlich ist.

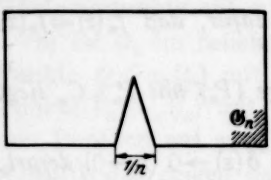


Fig. 4

Beweis von Satz 6. (i) Aus (7.3) folgt (4.2'), d.h. $\eta_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$). Andernfalls gäbe es für eine Teilfolge der n Querschnitte q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\delta_n \to 0$, die Abschnitte vom Durchmesser $\geq \alpha > 0$ erzeugen[13]). Nimmt man die Endpunkte von q_n als Punkte P_1, P_2 bei der Bildung von (7.1), so sieht man, daß sowohl $\Lambda_n^{(1)}$ als auch $\Lambda_n^{(2)}$ einen Durchmesser $\geq \alpha$ aufweisen, d.h. (7.3) wäre falsch. Also sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, was $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq 1, n \to \infty$) zur Folge hat.

(ii) Ist umgekehrt $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leq 1, n \to \infty$), so ist (7.2) eine Folge von Satz A, und (7.3) bleibt zu bestätigen.

Zu beliebigen Zahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ führen wir dazu die Funktionen $\sigma(\alpha)$, $\tau(\beta)$ ein: Ist $|w' - w''| < \alpha$ ($w', w'' \in C_0$), so sei $|f_0^{-1}(w') - f_0^{-1}(w'')| < \sigma(\alpha)$, und ist $|z' - z''| < \beta$ ($|z'| = |z''| = 1$), so sei $|f_0(z') - f_0(z'')| < \tau(\beta)$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f_0(z)$ auf $|z| = 1$ und von $f_0^{-1}(w)$ auf C_0 ist $\sigma(\alpha) \to 0$ ($\alpha \to 0$) und $\tau(\beta) \to 0$ ($\beta \to 0$).

[13]) Die Zahl α kann kleiner als der Radius eines Kreises angenommen werden, der allen $\mathfrak{G}_n$ angehört; einen solchen Kreis gibt es wegen (7.2).

Nun wählen wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein δ_0 und $\bar{n}$ derart, daß gilt:

a) Es ist $\delta_0 < \varepsilon$ und $\tau(\sigma(3\delta)) < \frac{\varepsilon}{3}$ für $\delta \leq \delta_0$;

b) Es ist $|f_n(z) - f_0(z)| < \frac{\delta_0}{3}$ für $n > \bar{n}$ und $|z| \leq 1$.

Sind dann $f_n(z_1)$ und $f_n(z_2)$ irgend zwei Punkte auf C_n vom Abstand $\leq \delta_0$, so gilt

$$|f_0(z_1) - f_0(z_2)| \leq |f_0(z_1) - f_n(z_1)| + |f_n(z_1) - f_n(z_2)| + |f_n(z_2) - f_0(z_2)|$$
$$\leq \frac{\delta_0}{3} + \delta_0 + \frac{\delta_0}{3} < 3\delta_0,$$

also $|z_1 - z_2| < \sigma(3\delta_0)$. Für einen beliebigen Punkt z des (kleineren) Bogens (z_1, z_2) hat man somit

$$|f_n(z) - f_n(z_1)| \leq |f_n(z) - f_0(z)| + |f_0(z) - f_0(z_1)| + |f_0(z_1) - f_n(z_1)|$$
$$< \frac{\delta_0}{3} + \tau(\sigma(3\delta_0)) + \frac{\delta_0}{3} < \varepsilon,$$

d.h. der Durchmesser des Bildes des (kleineren) Bogens (z_1, z_2) ist höchstens ε; also ist (7.3) erfüllt.

Durch Einschalten einer Zwischenabbildung gewinnt man leicht folgenden Zusatz zu Satz 6.

Zusatz. Die in Satz 6 betrachteten JORDAN-Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf ein beliebiges, endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}_z$ der z-Ebene abgebildet, das den Punkt $z = 0$ enthalte. Dann sind die Bedingungen (7.2) und (7.3) notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(z \in \mathfrak{G}_z,\ n \to \infty)$.

§8. Lokale Abänderung von $\mathfrak{G}_0$

In den §§ 4—6 haben wir gesehen, daß für den Fall der Existenz nicht erreichbarer Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$ die in dieser Arbeit behandelten Probleme noch weitgehend offen sind. Wir wollen jetzt einen Sonderfall behandeln, bei dem zwar $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzen darf; jedoch sollen die $\mathfrak{G}_n$ in spezieller Weise aus $\mathfrak{G}_0$ hervorgehen, indem ein „glatter" Teil des Randes von $\mathfrak{G}_0$ abgeändert wird. Diese Sachlage kann z.B. bei Anwendungen in der Theorie der Approximation im Komplexen auftreten. Allerdings wird es uns wieder nicht möglich sein, $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(n \to \infty)$ im ganzen Einheitskreis zu erschließen (was durch ein Gegenbeispiel belegt wird), sondern nur in einem gewissen, an $|z| = 1$ heranreichenden Teil von $|z| \leq 1$.

a) Ein Glattheitsmaß für JORDAN-Bögen. In Analogie zu dem Glattheitsmaß $\varkappa(\delta)$ einer geschlossenen JORDAN-Kurve verwenden wir im folgenden ein Glattheitsmaß $\lambda(\delta)$ eines offenen JORDAN-Bogens γ. Sind $P_1 \in \gamma$, $P_2 \in \gamma$ zwei Punkte vom Abstand $\leq \delta$, die auf γ einen Teilbogen vom Durchmesser Λ begrenzen, so setzen wir

$$\lambda(\delta) = \max_{\substack{P_1 \in \gamma,\ P_2 \in \gamma \\ |P_1 - P_2| \leq \delta}} \Lambda. \tag{8.1}$$

Über das Verhalten des Glattheitsmaßes λ bei einer konformen Abbildung gibt der folgende Hilfssatz Auskunft.

Hilfssatz 8. *In einem abgeschlossenen Teilbereich B_z eines Gebietes $\mathfrak{G}_z$ sei eine Folge $\{\gamma_n\}$ von* JORDAN-*Bögen gegeben. $\mathfrak{G}_z$ werde durch $\bar{z}=\varphi(z)$, $z=\psi(\bar{z})$ umkehrbar eindeutig und konform auf $\mathfrak{G}_{\bar{z}}$ abgebildet, wobei $\{\gamma_n\}$ in $\{\bar{\gamma}_n\}$ übergehe.*

Dann sind die Aussagen $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} \lambda_n(\delta)=0$ *und* $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} \bar{\lambda}_n(\delta)=0$ *äquivalent* [14]).

Beweis. Wir können annehmen, $\varphi(z)$ sei in $\mathfrak{G}_z$ regulär und schlicht. Sei $0<c\leq|\varphi'(z)|\leq C<\infty$ $(z\in\mathfrak{G}_z)$ und $\Delta=\operatorname{dist}(B_z,$ Rand von $\mathfrak{G}_z)$. Sodann betrachten wir nach Vorgabe eines positiven $\varepsilon<\Delta C$ alle $\bar{\delta}$ und n, für die

$$\bar{\delta}<c\cdot\Delta \quad \text{und} \quad \lambda_n\left(\frac{\bar{\delta}}{c}\right)<\frac{\varepsilon}{C}$$

ist, d.h. alle $\bar{\delta}<\bar{\delta}_0(\varepsilon)$, $n>\bar{n}(\varepsilon)$.

Sind nun $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ beliebige Punkte $\in B_{\bar{z}}=\varphi(B_z)$ vom Abstand $<\bar{\delta}$, so liegt ihre Verbindungsgerade ganz in $\mathfrak{G}_{\bar{z}}$. Denn wäre $\bar{\zeta}$ ein Randpunkt von $\mathfrak{G}_{\bar{z}}$, der auf der Verbindungsgeraden $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ dem Punkt $\bar{z}_1$ am nächsten liegt, so hätten wir für den Abstand der Urbilder in der z-Ebene

$$|z_1-\zeta|=\left|\int_{\bar{z}_1}^{\bar{\zeta}}\psi'(\bar{z})\,d\bar{z}\right|\leq c^{-1}|\bar{\zeta}-\bar{z}_1|<c^{-1}\cdot c\Delta=\Delta,$$

im Widerspruch zur Definition von Δ.

Liegen nun unsere Punkte $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ vom Abstand $\leq\bar{\delta}$ auf $\bar{\gamma}_n$, so haben wir für die Urbilder in der z-Ebene

$$|z_1-z_2|=\left|\int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2}\psi'(\bar{z})\,d\bar{z}\right|\leq c^{-1}\cdot|\bar{z}_1-\bar{z}_2|\leq c^{-1}\bar{\delta},$$

also wird durch z_1, z_2 ein Stück vom Durchmesser $<\frac{\varepsilon}{C}$ von γ_n abgetrennt. Da $\frac{\varepsilon}{C}<\Delta$ ist, kann man um z_1 einen Kreis schlagen, der ganz in $\mathfrak{G}_z$ liegt und das abgetrennte Stück von γ_n enthält. Für einen Punkt $\bar{z}$ auf $\bar{\gamma}_n$ haben wir deshalb

$$|\bar{z}_1-\bar{z}|=\left|\int_{z_1}^{z}\varphi'(z)\,dz\right|\leq C\cdot|z-z_1|<C\cdot\frac{\varepsilon}{C}=\varepsilon,$$

also ist der Durchmesser des durch $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ begrenzten Stücks von $\bar{\gamma}_n$ sicher $<2\varepsilon$. Somit gilt $\bar{\lambda}_n(\bar{\delta})<2\varepsilon$ für alle betrachteten $n, \bar{\delta}$

Der zweite Teil der Aussage von Hilfssatz 8 folgt durch Betrachtung der konformen Abbildung $z=\psi(\bar{z})$ auf ähnliche Weise.

b) Ein Konvergenzsatz.

Satz 7. *Voraussetzung für die $\mathfrak{G}_n$ $(n=0,1,\ldots)$. $\mathfrak{G}_0$ sei ein beliebiges, einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet der w-Ebene, $O\in\mathfrak{G}_0$, dessen Rand R_0 zum Teil aus dem offenen* JORDAN-*Bogen γ_0 mit den Endpunkten P_1, P_2 bestehe. Es gebe zwei* JORDAN-*Gebiete $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ folgender Art:*

[14]) $\bar{\lambda}_n$ bezeichnet die zu $\bar{\gamma}_n$ gehörige Größe (8.1).

α) γ_0 ist ein Querschnitt in $\mathfrak{g}_2$,

β) $\bar{\mathfrak{g}}_2$ enthält außer γ_0 keine Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$,

γ) $\bar{\mathfrak{g}}_1 \in \mathfrak{g}_2$, $O \notin \bar{\mathfrak{g}}_2$,

δ) ein Teilbogen γ_0^* von γ_0 mit Endpunkten Q_1, Q_2 ist ein Querschnitt in $\mathfrak{g}_1$, und es ist $(\gamma_0 - \gamma_0^*) \cap \mathfrak{g}_1 = 0$.

Auf γ_0^* seien Punkte S_n, T_n gegeben und durch einen JORDAN*-Bogen γ_n in $\mathfrak{g}_1$ verbunden, der γ_0^* höchstens in Punkten des Bogens S_n, T_n treffe. $\mathfrak{G}_n$ sei durch γ_n und $R_0 - (S_n, T_n)$ berandet.*

Voraussetzung für B_z. Dies sei ein abgeschlossener Teilbereich von $|z| \leqq 1$ mit der Eigenschaft, daß jedem auf $|z| = 1$ gelegenen Randpunkt von B_z bei der (konformen und normierten) Abbildung $w = f_0(z)$ von $|z| < 1$ auf $\mathfrak{G}_0$ ein erreichbarer Randpunkt von $\mathfrak{G}_0$ entspreche[15]*).*

Aussage. Wird $\mathfrak{G}_n$ durch $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet, so gilt genau dann für jeden Bereich B_z der angegebenen Art $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(z \in B_z,\ n \to \infty)$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0 \quad (n \to \infty), \tag{8.2}$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \lambda_n(\delta) = 0 \quad \text{für die JORDAN-Bögen } \gamma_n. \tag{8.3}$$

Beweis. (i) Die Bedingungen (8.2) und (8.3) seien erfüllt. Wir zeigen dann sogar: Aus $z_n \to z_0$ $(|z_0| \leqq 1)$ folgt stets $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$ $(n \to \infty)$, sofern $f_0(z)$ an der Stelle z_0 stetig ist[16]).

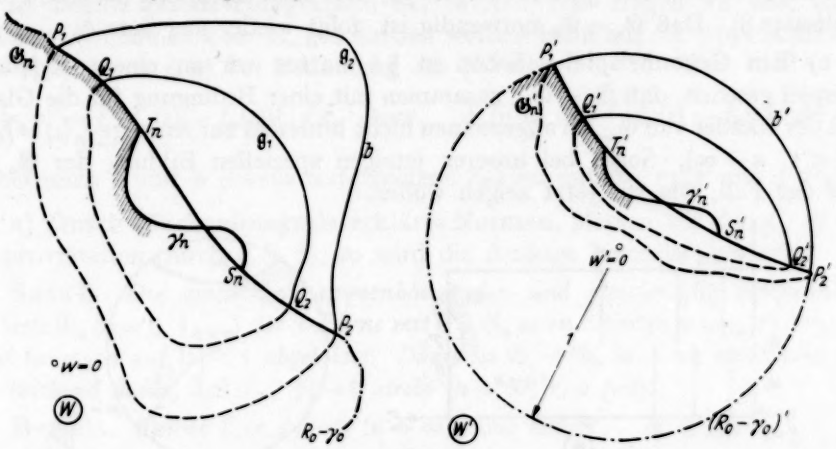


Fig. 5

Wir bilden das von $R_0 - \gamma_0$ und dem JORDAN-Bogen b berandete Gebiet (vgl. Fig. 5) vermöge $w' = \varphi(w)$, $w = \psi(w')$ konform und normiert auf $|w'| < 1$

[15]) B_z kann also insbesondere ein Teilbereich von $|z| \leqq 1$ sein, der als einzige Punkte auf $|z| = 1$ die Punkte $f_0^{-1}(\gamma_0^*)$ besitzt.

[16]) Diese Aussage ist weitergehend als $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(z \in B_z,\ n \to \infty)$; denn ist letztere Behauptung falsch, so gibt es $\{z_n\}$ mit $z_n \to z_0$ $(|z_0| = 1)$ so, daß $f_n(z_n) - f_0(z_n) \not\to 0$, d.h. $f_n(z_n) - f_0(z_0) \not\to 0$ strebt $(n \to \infty)$.

ab. Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ gehen dabei in die JORDAN-Gebiete $\mathfrak{G}_n'$, die JORDAN-Bögen γ_n in γ_n' über. (8.2) und (8.3) bedeuten in der w'-Ebene

$$\mathfrak{G}_n' \to \mathfrak{G}_0' \quad (n \to \infty), \tag{8.2'}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta\to 0}} \lambda_n'(\delta) = 0 \quad \text{für die JORDAN-Bögen } \gamma_n' \tag{8.3'}$$

(Hilfssatz 8). Da aber der Rest des Randes von $\mathfrak{G}_n'$ (also $R_n' - \gamma_n'$) fest bleibt, so sind damit offenbar die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt ($\mathfrak{G}_0'$ ist ein JORDAN-Gebiet!), und wir haben somit für die Zwischenabbildungen $w' = g_n(z)$ von $|z| < 1$ auf $\mathfrak{G}_n'$ $(n = 0, 1, \ldots)$

$$g_n(z) \rightrightarrows g_0(z) \qquad (|z| \leq 1,\ n \to \infty). \tag{8.4}$$

Unsere Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ hängen aber mit ψ und g_n durch

$$f_n(z) = \psi\big(g_n(z)\big) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

zusammen, und $\psi(w')$ ist unter anderem für alle die Werte von w' in $|w'| \leq 1$ stetig, die erreichbaren Randpunkten von $\mathfrak{G}_0$ entsprechen. Aus $z_n \to z_0$ folgt also einmal $g_n(z_n) \to g_0(z_0)$, und ferner $\psi\big(g_n(z_n)\big) \to \psi\big(g_0(z_0)\big)$, d.h. $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$ $(n \to \infty)$, und dies war zu zeigen.

(ii) Gilt $f_n(z) \rightrightarrows f_0(z)$ $(z \in B_z,\ n \to \infty)$ speziell für einen Bereich B_z von der in der Fußnote [15]) genannten Art, so gilt auch $\varphi\big(f_n(z)\big) \rightrightarrows \varphi\big(f_0(z)\big)$, d.h. $g_n(z) \rightrightarrows g_0(z)$ $(z \in B_z,\ n \to \infty)$. Dies impliziert (Zusatz zu Satz 6) $\lambda_n'(\delta) \to 0$ $(n \to \infty, \delta \to 0)$ für die JORDAN-Bögen γ_n', also auch $\lambda_n(\delta) \to 0$ $(n \to \infty, \delta \to 0)$ (Hilfssatz 8). Daß $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ notwendig ist, folgt wieder aus Satz A.

c) Ein Gegenbeispiel. Schon in § 6 hatten wir an einem einfachen Beispiel gesehen, daß $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$, zusammen mit einer Bedingung für die Glattheit der Ränder von $\mathfrak{G}_n$, im allgemeinen nicht hinreicht zur Aussage $f_n(z) \rightrightarrows f_0(z)$ $(|z| < 1,\ n \to \infty)$. Sogar bei unserer jetzigen speziellen Bildung der $\mathfrak{G}_n$ ist dies der Fall, wie wir jetzt zeigen wollen.

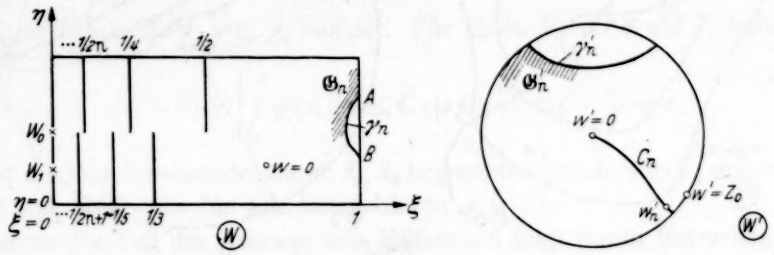


Fig. 6

Die $\mathfrak{G}_n$ gehen aus $\mathfrak{G}_0$ in der skizzierten Weise hervor; die Bögen γ_n seien vorläufig beliebig, sollen aber jedenfalls glatt [im Sinne von (8.3)] gegen die Strecke A, B konvergieren. Schaltet man wieder wie in **b)** eine Zwischenabbildung $w' = \varphi(w)$, $w = \psi(w')$ (konform und normiert) ein, die $\mathfrak{G}_0$ auf $|w'| < 1$ abbildet, so wird

$$f_n(z) = \psi\big(g_n(z)\big) \quad (n = 0, 1, \ldots) \quad \text{mit} \quad g_n(z) \rightrightarrows g_0(z) = z \quad (|z| \leq 1,\ n \to \infty).$$

Wir markieren uns $f_0^{-1}(w_0)=z_0$ und zeichnen den Radius C ein, der von $z=0$ nach $z=z_0$ führt; sein Bild bei der Abbildung $w'=g_n(z)$ sei C_n, ein von $w'=0$ nach $w'=g_n(z_0)$ führender JORDAN-Bogen. Lassen wir nun die γ_n kontinuierlich und glatt gegen A, B rücken, so rückt C_n kontinuierlich und gleichmäßig gegen C (Radius von $w'=0$ nach $w'=z_0$), und wir können daher für gewisse Bögen γ_n $(n=1, 2, \ldots)$ Punkte $w_n' \in C_n$ finden, für die $f_0(w_n') \to w_1$ strebt $(n\to\infty,\ w_1 \neq w_0)$. Diese γ_n denken wir uns gewählt, und $g_n(z)$, $f_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ liegen nun fest. Schließlich setzen wir noch $z_n=g_n^{-1}(w_n')$.

Dann gilt einerseits

$$f_n(z_n)=\psi(w_n')=f_0(w_n')\to w_1 \quad (n\to\infty),$$

andererseits aber

$$f_0(z_n)=\psi(z_n)\to w_0 \quad (n\to\infty),$$

da ja z_n auf C, also radial gegen z_0 strebt. Also ist $f_n(z)-f_0(z)\Rightarrow 0$ $(|z|<1,\ n\to\infty)$ sicher falsch.

§9. Benützung anderer Normen

Unsere seitherigen topologischen Bedingungen für die $\mathfrak{G}_n$ waren stets auf die Aussage $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(|z|<1,\ n\to\infty)$ zugeschnitten, d.h. auf die Approximation von $f_0(z)$ durch $f_n(z)$ bei Zugrundelegung der Norm

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}\,|f_n(z)-f_0(z)|.$$

In diesem letzten Paragraphen des zweiten Teils fragen wir uns, unter welchen Annahmen über $\mathfrak{G}_n$ geschlossen werden kann auf die Approximation von $f_0(z)$ durch $f_n(z)$ bei Benützung der Normen

$$L_n(r,p)=\int_{|z|=r}|f_n(z)-f_0(z)|^p\,|dz| \quad \text{bzw.} \quad F_n(r,p)=\iint_{|z|\le r}|f_n(z)-f_0(z)|^p\,dx\,dy;$$

dabei seien r und p jeweils festgehaltene Zahlen mit $0<r\le 1$ und $p>0$[17]).

a) Durch Flächenintegrale erklärte Normen. Messen wir den Grad der Approximation durch $F_n(r,p)$, so wird die Aussage besonders einfach.

Satz 8. *Die einfach zusammenhängenden und gleichmäßig beschränkten Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, \ldots)$ der w-Ebene mit $O\in\mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|z|<1$ abgebildet. Dann ist $\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{G}_0$ $(n\to\infty)$ notwendig und hinreichend dafür, daß $F_n(r,p)\to 0$ strebt $(n\to\infty;\ r, p$ fest$)$.*

Beweis. (i) Sei $F_n(r,p)\to 0$ $(n\to\infty)$, also sicher

$$\iint_{|z|\le r'}|f_n(z)-f_0(z)|^p\,dx\,dy\to 0 \quad (n\to\infty)$$

für ein positives $r'<1$. Mittels eines Satzes von WALSH ([32], S. 96) folgt daraus $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(|z|\le r''<r',\ n\to\infty)$, also nach VITALI $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(n\to\infty)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z|<1$, so daß nach Satz A sicher $\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{G}_0$ strebt $(n\to\infty)$.

[17]) Bedingungen, die $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(|z|<1,\ n\to\infty)$ zur Folge haben, werden wir hierbei nicht mehr erwähnen.

(ii) Es sei nun $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$. Ist $r<1$, so kommt $F_n(r,p) \to 0$ $(n \to \infty)$ direkt aus $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| \leq r,\ n \to \infty)$. Ist $r=1$, so zerlegen wir $F_n(1,p)$ in $\iint\limits_{|z|\leq r}$ und $\iint\limits_{r\leq|z|\leq 1}$, wovonder zweite Teil

$$\leq (2A)^p \cdot \pi(1-r^2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist für $r > r_0$ (es wurde $|f_n| \leq A$ in $|z|<1$ angenommen). Bei festem $r > r_0$ ist der erste Teil ebenfalls $< \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_0$, also $F_n(1,p) < \varepsilon$ $(n > n_0)$.

b) Durch Linienintegrale erklärte Normen. Schwieriger liegen die Dinge bei Zugrundelegung der Norm $L_n(r,p)$. Den Fall, daß $r<1$ ist, behandelt man wie oben: $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *ist* [*bei den gleichen Gebieten* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0,1,\ldots)$] *notwendig und hinreichend für* $L_n(r,p) \to 0$ $(n \to \infty)$[18]).

Zur Erledigung des Falls $r=1$ stellen wir zunächst fest, daß $L_n(r,p)$ $(0<r<1)$ bei festem n und p eine mit r stetig und monoton wachsende Funktion ist ([42], S. 160), weshalb $L_n(1,p) = \lim\limits_{r\to 1-} L_n(r,p) \leq \infty$ gesetzt werden kann.

Für $L_n(1,p) \to 0$ $(n \to \infty)$ ist sicherlich $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ notwendig (bei den Gebieten des Satzes 8), da ja dann auch $L_n(r,p) \to 0$ strebt für jedes feste $r<1$. Ob $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ im allgemeinen Fall für $L_n(1,p) \to 0$ $(n \to \infty)$ auch hinreicht, ist nicht bekannt. Jedoch wird in der Literatur ([38], S. 184) folgender Satz ohne Beweis angegeben.

Satz E (POLANSKY). *Gilt für die in Satz 8 genannten Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0,1,\ldots)$ *der w-Ebene die Bedingung* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$, *so folgt daraus* $L_n(1,p) \to 0$ $(n \to \infty)$ *für* $p=1$ *und also für* $0<p\leq 1$[19]).

Für Werte von p in $0<p\leq 2$ beweisen wir

Satz 9. *Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0,1,\ldots)$ *der w-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *und mit den Flächeninhalten* $A_n < \infty$ *seien vermöge* $w=f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|z|<1$ *abgebildet.*

Dann sind die Bedingungen $A_n \to A_0$ *und* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *hinreichend für* $L_n(1,p) \to 0$ $(n \to \infty)$ *für* $p=2$ *und also für* $0<p\leq 2$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß unter den angegebenen Voraussetzungen stets

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ r\to 1}} \iint\limits_{r\leq|z|\leq 1} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy = 0 \tag{9.1}$$

ist. Dazu setzen wir

$$A_n(r) = \iint\limits_{|z|\leq r} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy$$

und wählen zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ ein $r_0<1$ so, daß $A_0 - A_0(r_0) < \varepsilon$ ist. Nun halten wir r_0 fest und haben einmal $|A_n - A_0| < \varepsilon$ $(n > n_1)$, und ferner

$$|A_n(r_0) - A_0(r_0)| < \varepsilon \qquad (n \geq n_2 \geq n_1);$$

[18]) Statt Lemma II in [32], S. 96 nehme man das Lemma S. 101.

[19]) Man stellt nämlich leicht fest, daß die bei POLANSKY auftretende Bedingung $D_i(B_n, B_0) \to 0$ („innere Distanz") gleichwertig ist mit $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$.

letzteres ist eine Folge von $|f_n'(z)|^2 \Rightarrow |f_0'(z)|^2$ ($|z| \leq r_0$, $n \to \infty$). All dies zusammen ergibt

$$A_n - A_n(r_0) = \iint\limits_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy \leq |A_n - A_0| + |A_0 - A_0(r_0)| + |A_0(r_0) - A_n(r_0)| < 3\varepsilon \quad (n \geq n_2),$$

womit (9.1) bewiesen ist.

Auf Grund von (9.1) und $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ gibt es nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Zahlen r_0 ($\frac{1}{2} \leq r_0 < 1$) und n_0 derart, daß erstens

$$\iint\limits_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f_0'(z)|^2 \, dx\, dy < \varepsilon$$

ist und weiter

$$\iint\limits_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy < \varepsilon \quad \text{und} \quad |f_n'(z) - f_0'(z)| \leq \varepsilon \qquad (|z| \leq r_0)$$

gilt für $n > n_0$. Dann gilt unter Verwendung der SCHWARZschen und MINKOWSKIschen Ungleichungen für $r \geq r_0$

$$\int\limits_0^{2\pi} |f_n(re^{i\varphi}) - f_0(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left| \int\limits_0^r [f_n'(te^{i\varphi}) - f_0'(te^{i\varphi})] \, dt \right|^2 d\varphi \leq \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^r |f_n' - f_0'| \, dt \right]^2 d\varphi$$

$$\leq \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^r |f_n' - f_0'|^2 \, dt\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r_0} |f_n' - f_0'|^2 \, dt\, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_n' - f_0'|^2 \, dt\, d\varphi$$

$$\leq 2\pi\varepsilon^2 + \left[\left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_n'|^2 \, dt\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_0'|^2 \, dt\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

$$< 2\pi\varepsilon^2 + \left[\left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_n'|^2 \cdot \frac{t}{r_0} \, dt\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_0'|^2 \cdot \frac{t}{r_0} \, dt\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

$$< 2\pi\varepsilon^2 + \frac{1}{r_0} \left[\left(\iint\limits_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint\limits_{r_0 \leq |z| \leq 1} |f_0'(z)|^2 \, dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \leq 2\pi\varepsilon^2 + 8\varepsilon.$$

Daraus folgt aber $L_n(1, p) \to 0$ ($n \to \infty$) für $p = 2$ und daher auch, vermöge der HÖLDERschen Ungleichung, für $0 < p < 2$.

Schließlich beweisen wir für beliebige positive Werte von p den

Satz 10. *Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n = 0, 1, \ldots$) der w-Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet. Der Rand R_0 von $\mathfrak{G}_0$ sei eine geschlossene analytische* JORDAN*-Kurve C und jede Folge $\{P_n\}$ von Punkten $P_n \in R_n$ habe ihre Häufungspunkte auf C*[20]*. Dann gilt $L_n(1, p) \to 0$ ($n \to \infty$) für jedes feste $p > 0$.*

Beweis. Dieser Satz stammt für den Fall $C: |w| = 1$ von WARSCHAWSKI ([37], S. 563)[21], und wir werden den Satz 10 durch Reduktion auf diesen

[20]) Diese Bedingung ist (Hilfssatz 6) eine Folge von $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$, $\eta_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$), in welchem Falle die Aussage $L_n(1, p) \to 0$ ($n \to \infty$) trivial ist (Satz 2). Jedoch impliziert umgekehrt die Bedingung von Satz 10 nicht immer $\eta_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$).

[21]) Dort werden sogar numerische Abschätzungen für $L_n(1, p)$ angegeben.

Fall beweisen. Die Funktion $f_0(z)$ ist für ein $\delta>0$ in $|z|\leq 1+\delta$ regulär und schlicht; es sei etwa $|f_0'(z)|\leq M$ $(|z|\leq 1+\delta)$. Auf Grund unserer Annahmen über R_n können wir ferner sagen, daß R_n ganz in dem Bild von $1-\varepsilon_n\leq|z|\leq 1+\varepsilon_n$ durch $w=f_0(z)$ drin liegt, wobei $\varepsilon_n\to 0$ strebt für $n\to\infty$. Wir betrachten Werte von n, für die bereits $\varepsilon_n<\delta$ ist, für die also insbesondere $f_0^{-1}(w)$ $(w\in\mathfrak{G}_n)$ erklärt ist. Dann ist

$$\int_0^{2\pi}|f_n(re^{i\varphi})-f_0(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi=\int_0^{2\pi}|f_0[f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})]-f_0(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi,$$

wobei

$$|f_0[f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})]-f_0(re^{i\varphi})|=\left|\int_{re^{i\varphi}}^{f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})}f_0'(\zeta)\,d\zeta\right|\leq M\,|f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})-re^{i\varphi}|$$

ist, insgesamt also

$$\int_0^{2\pi}|f_n(re^{i\varphi})-f_0(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi\leq M^p\cdot\int_0^{2\pi}|f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})-re^{i\varphi}|^p\,d\varphi. \tag{9.2}$$

Wie bereits erwähnt, fallen die Ränder der Bildgebiete von $|z|<1$ bei den Abbildungen $f_0^{-1}f_n$ ganz in den Kreisring $1-\varepsilon_n\leq|z|\leq 1+\varepsilon_n$ $(\varepsilon_n\to 0)$, also strebt nach dem genannten Sonderfall von Satz 10 die rechte Seite von (9.2) gegen Null mit $n\to\infty$, gleichmäßig für alle r aus $(0,1)$. Dies beendet den Beweis von Satz 10.

Teil III

Verhalten der Funktionen, die $\mathfrak{G}_n$ auf $|w|<1$ abbilden

Wir kommen nun in Teil III zu dem Problem, das Verhalten der Umkehrfunktionen $w=f_n(z)$ zu untersuchen, die die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ konform und normiert auf $|w|<1$ abbilden. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, tritt dabei die zusätzliche Schwierigkeit auf, daß die $f_n(z)$ im allgemeinen kein gemeinsames Definitionsgebiet besitzen. Für die Frage der Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ ist daher die gleichmäßige Konvergenz ungeeignet; wir werden sie ersetzen durch zwei Arten von stetiger Konvergenz. Erst beim Sonderfall $\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ wollen wir in §§ 13–14 einige Untersuchungen über $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(z\in\mathfrak{G}_0,\ n\to\infty)$ anstellen.

§10. Arten von stetiger Konvergenz

Mit $\mathfrak{G}$ sei ein beliebiges, einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet der z-Ebene bezeichnet; $f(z)$ sei eine komplexe Funktion, definiert für alle $z\in\overline{\mathfrak{G}}$. CARATHÉODORY ([7], S. 58 und [9], S. 171ff.) nennt dann eine Folge $\{f_n(z)\}$ beliebiger, für $z\in\mathfrak{G}$ erklärter komplexer Funktionen in $\mathfrak{G}$ *stetig konvergent* gegen $f(z)$, wenn für jede Folge $\{z_n\}$ $(z_n\in\mathfrak{G})$ mit $z_n\to z_0\in\overline{\mathfrak{G}}$ gilt: $f_n(z_n)\to f(z_0)$.

Im folgenden werden wir eine etwas allgemeinere Definition der stetigen Konvergenz benützen, die in einem Sonderfall ($\mathfrak{G}$ = JORDAN-Gebiet) auf

COURANT ([10], S. 106) zurückzugehen scheint und die gegenüber der Definition von CARATHÉODORY einerseits Punkte z_n zuläßt, die nicht in $\mathfrak{G}$ liegen, andererseits aber auch nicht von $f_n(z)$ verlangt, in ganz $\mathfrak{G}$ definiert zu sein.

Definition 1 *(Stetige Konvergenz). Eine Folge $\{f_n(z)\}$ beliebiger komplexer Funktionen mit den Definitionsgebieten $\mathfrak{G}_n$ heißt in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig konvergent gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, wenn es zu jedem $z_0 \in \overline{\mathfrak{G}}$ Folgen $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_n$ und $z_n \to z_0$ gibt, und wenn dann stets gilt: $f_n(z_n) \to f(z_0)$.*

Diese Definition weist noch einen wichtigen Nachteil auf. Schon in einfachsten Fällen, wo $\{f_n\} = f, f, f, \ldots$ ist, liegt im allgemeinen keine stetige Konvergenz im Sinn der Definition 1 vor. Man nehme z. B. $f_n(z) = f(z) =$ Abbildungsfunktion von $\mathfrak{G}$ auf $|w| < 1$ und $z_n \to z_0$ abwechselnd auf verschiedenen Seiten des Einschnitts in $|z| < 1$ (Fig. 7). Ersichtlich divergiert $\{f_n(z_n)\}$.

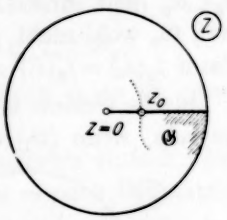


Fig. 7

Diese Möglichkeit schließen wir aus, indem wir nur $z_n \in \mathfrak{G}$ zulassen und verlangen, daß $z_n \to z_0 \in \mathfrak{G}$ oder gegen ein Primende E von $\mathfrak{G}$ strebe. Neben Definition 1 benützen wir also

Definition 2 *(Stetige Konvergenz im weiteren Sinne). Eine Folge $\{f_n(z)\}$ beliebiger komplexer Funktionen mit den Definitionsgebieten $\mathfrak{G}_n$ heißt in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig konvergent im weiteren Sinne gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, wenn es zu jedem $z_0 \in \mathfrak{G}$ [bzw. zu jedem Primende E von $\mathfrak{G}$] Folgen $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_n \cap \mathfrak{G}$ und $z_n \to z_0$ [bzw. $z_n \to E$] gibt, und wenn dann stets gilt: $f_n(z_n) \to f(z_0)$ [bzw. $f_n(z_n) \to f(E)$]*[22]).

Es wird dabei also angenommen, daß $f(z)$ für $z \in \overline{\mathfrak{G}}$ erklärt ist und auf jedem Primende E von $\mathfrak{G}$ konstant ist.

Wir bemerken noch, daß in unseren Anwendungen $f(z)$ die Abbildungsfunktion von $\mathfrak{G}$ auf $|w| < 1$ darstellt, so daß also $f(z)$ auf jedem Primende E von $\mathfrak{G}$ konstant ist. In diesem Fall bestätigt man dann unschwer, daß eine in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig gegen $f(z)$ konvergente Funktionenfolge $\{f_n(z)\}$ dort sicher auch im weiteren Sinne stetig gegen $f(z)$ konvergiert.

§11. Ein Satz für stetige Konvergenz

Sind die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ in der z-Ebene gegeben, so ist nun die Frage, unter welchen topologischen Annahmen über $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Abbildungsfunktionen $w = f_n(z)$ von $\mathfrak{G}_n$ auf $|w| < 1$ stetig gegen $w = f_0(z)$ konvergieren im Sinne unserer Definition 1. Es ist dabei keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, $\mathfrak{G}_0$ als beschränkt anzunehmen; andernfalls führe man zuerst $\mathfrak{G}_0$ durch eine einfache Abbildung in ein beschränktes Gebiet über.

Als entscheidend erweist sich die folgende

Bedingung (B_1). *Die Punkte $z_n', z_n'' \in \mathfrak{G}_n$ konvergieren gegen den Punkt z_0 des Randes R_0 von $\mathfrak{G}_0$. Dann muß es stets möglich sein, z_n' und z_n'' durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser ε_n $(\varepsilon_n \to 0)$ vom Punkt $z = 0$ zu trennen.*

[22]) Bei WALSH ([32], S. 348) wird wieder eine andere Definition von „stetiger Konvergenz" gegeben.

Sodann lautet unser

Satz 11 *(Stetige Konvergenz). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *der z-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w=f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|w|<1$ *abgebildet;* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt und besitze nur einfache Primenden.*

Dann ist die Bedingung (B_1) *zusammen mit* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge* $\{f_n(z)\}$ *in* $\mathfrak{G}_0$ *stetig gegen* $f_0(z)$ *konvergiert.*

Vorbemerkungen. a) Die Forderung an $\mathfrak{G}_0$, nur einfache Primenden zu besitzen, ist natürlich. Sonst kann man ja von $f_0(z)$ gar nicht reden, wenn $z_0 \in R_0$ liegt, und Definition 1 wäre nicht anwendbar. Hervorgehoben sei, daß $\mathfrak{G}_0$ wohl nicht punktförmige Primenden E besitzen kann; für $z_0 \in E$ ist dann $f_0(z_0)=f_0(E)$ zu setzen.

b) Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ brauchen nicht beschränkt oder gleichmäßig beschränkt zu sein, wenn (B_1) und $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ erfüllt sind, im Gegensatz zu § 4,

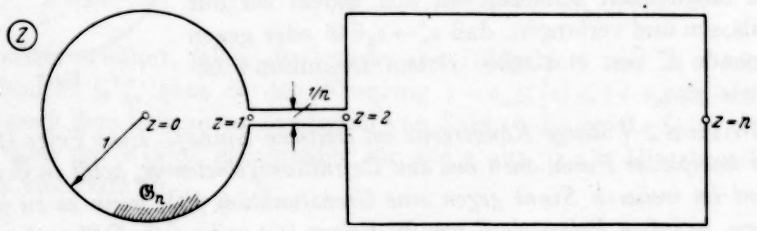


Fig. 8

wo die Bedingungen (4.1) und (4.2) die gleichmäßige Beschränktheit aller $\mathfrak{G}_n$ nach sich zogen. Im beigezeichneten Beispiel ist $\mathfrak{G}_0$ der Kreis $|z|<1$.

c) Man wird sich fragen, ob in Satz 11 die Bedingung (B_1) nicht ersetzt werden kann durch die folgende einfachere: „Die Punkte z_n' konvergieren gegen den Punkt z_0 des Randes R_0 von $\mathfrak{G}_0$. Dann muß es stets möglich sein, z_n' durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser ε_n $(\varepsilon_n \to 0)$ vom Punkt $z=0$ zu trennen."

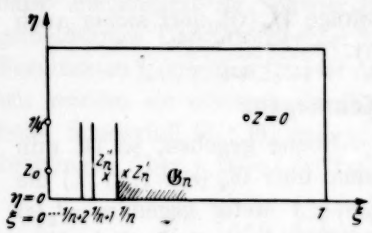


Fig. 9

Dies ist nicht der Fall, wie das Beispiel der Fig. 9 zeigt; $\mathfrak{G}_n$ ist dabei ein mit Einschnitten versehenes Rechteck, $\mathfrak{G}_0$ dieses Rechteck selbst. Hier ist nun die eben genannte einfachere Bedingung erfüllt, wie man sieht. Nicht erfüllt ist jedoch die Bedingung (B_1) von Satz 11 (vgl. z. B. die Punkte z_n', z_n''), und da dieselbe notwendig ist für das Bestehen von Satz 11, sehen wir hiermit, daß (B_1) nicht durch die oben genannte einfachere Bedingung ersetzt werden kann. Entsprechendes gilt für den folgenden Satz 12.

Beweis von Satz 11. A) Die Bedingungen sind notwendig.

(i) $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$. Zunächst ist zu sagen: $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n) \neq 0$. Sonst gäbe es eine Punktfolge $z_n \to 0$ derart, daß $|f_n(z_n)| \to 1$ strebt für eine Indexfolge $n=n_k$,

wogegen $f_0(0)=0$ ist. Weiter behaupten wir nun: $\{f_n(z)\}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$. Denn dies gilt zunächst für eine Nullpunktsumgebung U in $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$, die zu $\mathfrak{G}_0$ gehört wegen $O\in\mathfrak{G}_0$. Andernfalls gäbe es eine Folge $\{z_n\}$ und einen Punkt z_0 mit $z_0, z_n\in U$, $z_n\to z_0$ so, daß $|f_n(z_n)-f_0(z_0)|\geq\alpha>0$ ist für beliebig hohe Indizes n, im Widerspruch zur Annahme. Die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_n(z)\}$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$ ist nun eine Folge des Satzes von VITALI (es ist ja $|f_n(z)|\leq 1$ für $z\in\mathfrak{G}_n$), und die Grenzfunktion muß nach WEIERSTRASS mit $f_0(z)$ identisch sein. Nach Satz B ist also $\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{G}_0$ $(n\to\infty)$.

(ii) Die Bedingung (B_1) ist erfüllt. Wir nehmen also an, es sei

$$f_n(z_n')\to f_0(z_0)\quad f_n(z_n'')\to f_0(z_0)\quad z_n', z_n''\to z_0\in R_0;\ z_n', z_n''\in\mathfrak{G}_n,$$

und wir müssen zeigen, daß z_n', z_n'' durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\varepsilon_n\to 0$ vom Punkt $z=0$ zu trennen sind.

Haben die $\mathfrak{G}_n$ Flächen $A_n\leq A<\infty$, so ist dieser Nachweis einfach. Ist nämlich $\delta_n=\max(|f_n(z_n')-f_0(z_0)|, |f_n(z_n'')-f_0(z_0)|)$, so gibt es nach Hilfssatz 1 einen Radius ϱ_n in $(\delta_n, \sqrt{\delta_n})$ derart, daß das Bild von $k(\varrho_n)$ um den Punkt $f_0(z_0)$ in $\mathfrak{G}_n$ einen Durchmesser hat, der $\leq\left(\frac{2\pi A}{\log\frac{1}{\delta_n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon_n$ ist. Nun trennt aber $k(\varrho_n)$ die Punkte $f_n(z_n')$ und $f_n(z_n'')$ von $w=0$, also trennt sein Bild die Punkte z_n' und z_n'' von $z=0$.

Im allgemeinen Fall müssen wir unseren Beweis modifizieren. Wir wählen folgende Größen. $\mathfrak{G}_0$ sei in $|z|<M$ gelegen, $\varepsilon>0$ vorgegeben, und nun $r<1$ so klein gewählt, daß $\left(\frac{8\pi^2M^2}{\log\frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{4}$ ist. Sodann wählen wir $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$ so klein, daß das Bild jedes Querschnitts in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $<\delta$ in der w-Ebene einen Durchmesser $<\frac{r}{3}$ hat, unabhängig von n. Das läßt sich einrichten: Ist nämlich δ genügend klein, so läßt sich der Querschnitt in einen Kreis von beliebig kleinem Radius und Mittelpunkt auf R_n (Rand von $\mathfrak{G}_n$) einschließen; dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{G}_n$ hat aber, wie man mit Hilfssatz 2 (ii) sieht, in der w-Ebene ein Bild von beliebig kleinem Durchmesser, also auch die Teilmenge, die von unserem Querschnitt herrührte. Schließlich wählen wir noch n_0 so, daß (α) $|f_n(z_n')-f_0(z_0)|<\frac{r}{2}$ und $|f_n(z_n'')-f_0(z_0)|<\frac{r}{2}$ ist für $n\geq n_0$, und (β) $n_0\geq n_0(\delta)$ des Hilfssatzes 5.

Solche unter den $\mathfrak{G}_n$ $(n\geq n_0)$, die Punkte in $|z|\geq 2M$ haben, operieren wir wie folgt. $\mathfrak{G}_n$ sei ein solches Gebiet, P_1 ein Punkt in $|z|\geq 2M$. Nach dem Hilfssatz 5 läßt sich ein geradliniger δ-Querschnitt $q_n^{(1)}$ in $\mathfrak{G}_n$ finden, der in der δ-Umgebung von R_0 verläuft und P_1 von $z=0$ trennt; das $z=0$ enthaltende Teilgebiet von $\mathfrak{G}_n$ sei $\mathfrak{G}_n^{(1)}$. Besitzt $\mathfrak{G}_n^{(1)}$ noch einen Punkt P_2 in $|z|\geq 2M$, so trenne man ihn durch $q_n^{(2)}$ ab, also durch einen Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$, der wieder in der δ-Umgebung des Randes von $\mathfrak{G}_0$ verläuft; das $z=0$ enthaltende Teilgebiet von $\mathfrak{G}_n$ sei $\mathfrak{G}_n^{(2)}$. Und so fort, man erhält eine höchstens

abzählbare Folge von Teilgebieten $\mathfrak{G}_n^{(\nu)}$ von $\mathfrak{G}_n$, die sich auch überschneiden dürfen. Der völlig in $|z| \leq 2M$ gelegene Durchschnitt $\bigcap_\nu \mathfrak{G}_n^{(\nu)}$ werde durch $w = f_n(z)$ auf die Teilmenge $\mathfrak{M}_n$ von $|w| < 1$ abgebildet.

Nun schlagen wir den durch Hilfssatz 3 (ii) für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n$ und unser gewähltes r bestimmten Kreis $k(\varrho) = k(\varrho_n)$ um $w = f_0(z_0)$. Da alle unsere Abschnitte nach Konstruktion in $|w| > 1 - \frac{r}{3}$ liegen, hat $k(\varrho)$ mit $\mathfrak{M}_n$ innere Punkte gemeinsam, z.B. den Punkt $w_1 = (1-\varrho) f_0(z_0)$. Laufen wir von w_1 aus nach beiden Seiten, so seien w_2, w_3 die beiden ersten Punkte, die nicht mehr innere Punkte von $\mathfrak{M}_n$ sind, d.h. sie liegen entweder auf $|w| = 1$ oder sind Häufungspunkte von Punkten auf den $f_n(q_n^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Im letzteren Fall verbinden wir w_2 (bzw. w_3) mit einem Punkt auf $f_n(q_n^{(\nu)})$ [bzw. $f_n(q_n^{(\mu)})$] durch ein beliebig kurzes Geradenstück, dessen Bild in der z-Ebene ein analytisches Kurvenstück der Länge $< \frac{\varepsilon}{8}$ sein möge, und verfolgen dann $f_n(q_n^{(\nu)})$ und $f_n(q_n^{(\mu)})$ bis auf $|w| = 1$. Der damit konstruierte Kurvenzug $C = C_n$: $\omega_1, w_3, w_1, w_2, \omega_2$ trennt sicher $f_n(z_n')$ und $f_n(z_n'')$ von $w = 0$, da ja z. B. $|f_n(z_n') - f_0(z_0)| < \frac{r}{2}$ ist und die Kurven $f_n(q_n^{(\nu)})$, $f_n(q_n^{(\mu)})$ höchstens einen Durchmesser $\frac{r}{3}$ haben. Also trennt das Bild von C in der z-Ebene die Punkte z_n', z_n'' von $z = 0$; dieses Bild hat aber, wie man mit Hilfssatz 3 (ii) sieht, einen Durchmesser

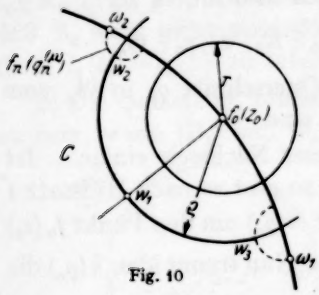


Fig. 10

$$< \delta + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \delta < \varepsilon$$

und bildet einen Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$, was zu zeigen war. (Wenn $\mathfrak{G}_n$ keine Punkte in $|z| \geq 2M$ hat, braucht es nicht operiert zu werden; $\mathfrak{M}_n$ ist dann einfach $|w| < 1$.)

B) Die Bedingungen sind hinreichend. Mit Rücksicht auf Satz B müssen wir zeigen: Aus $z_n \in \mathfrak{G}_n$ mit $z_n \to z_0 \in R_0$ folgt $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$ $(n \to \infty)$. Zunächst bemerken wir:

(11.1) Es gibt eine Folge $z_n' \in \mathfrak{G}_n$ mit $z_n' \to z_0$ so, daß $f_n(z_n') \to f_0(z_0)$.

Zu diesem Zweck wählen wir eine Folge $\{\bar{z}_k\}$ von Punkten aus $\mathfrak{G}_0$ mit $\bar{z}_k \to z_0$; für diese gilt dann (Voraussetzung einfacher Primenden!) $f_0(\bar{z}_k) \to f_0(z_0)$, und es sei $\{\varepsilon_k\}$ eine beliebige Nullfolge. Infolge Satz B gibt es für $k = 1$, d.h. festes $\bar{z}_1$, ε_1 einen Index n_1 derart, daß $f_n(\bar{z}_1)$ erklärt ist und $|f_n(\bar{z}_1) - f_0(\bar{z}_1)| < \varepsilon_1$ für $n \geq n_1$. Aus denselben Gründen gibt es allgemein für den Index k, d.h. festes $\bar{z}_k$, ε_k einen Index $n_k > n_{k-1}$ derart, daß $f_n(\bar{z}_k)$ erklärt ist und $|f_n(\bar{z}_k) - f_0(\bar{z}_k)| < \varepsilon_k$ für $n \geq n_k$. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} z_n' &= 0 \qquad (n < n_1), \\ z_n' &= \bar{z}_1 \qquad (n_1 \leq n < n_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n' &= \bar{z}_k \qquad (n_k \leq n < n_{k+1}). \end{aligned}$$

Dann haben wir für diese Folge $z_n' \to z_0$ und

$$|f_n(z_n') - f_0(z_0)| \leq |f_n(z_n') - f_0(\overline{z}_k)| + |f_0(\overline{z}_k) - f_0(z_0)| < \varepsilon_k + \varepsilon$$
$$(n_k \leq n < n_{k+1},\ k \geq k_0),$$

also gilt (11.1).

Nun kommen wir wieder auf unsere beliebige Punktfolge $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_n$ und $z_n \to z_0$ zurück. Nach Voraussetzung (B_1) kann man z_n, z_n' durch einen ε_n-Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ von $z=0$ trennen, und man erkennt sofort mit Hilfssatz 2, daß es ein ϱ_n in $(\varepsilon_n, \sqrt{\varepsilon_n})$ gibt, für das das Bild von $\sum_i k_i(\varrho_n)$ eine Menge von Querschnitten in $|w|<1$ vom Gesamtdurchmesser $< \dfrac{2\pi}{\left(\log \frac{1}{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{4}}} = \delta_n$ ist $(\delta_n \to 0)$; insbesondere hat also das Bild von q_n einen Durchmesser $\leq \delta_n$. Nun werden z_n, z_n' durch q_n von $z=0$ getrennt, also $f_n(z_n), f_n(z_n')$ durch das Bild von q_n in der w-Ebene von $w=0$, d.h. $f_n(z_n)$ und $f_n(z_n')$ gehören einer δ_n-Umgebung an. Aus $f_n(z_n') \to f_0(z_0)$ folgt daher $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$, und dies war zu zeigen.

Zusätze. Wir wollen noch hervorheben, daß wir zugleich folgenden Satz bewiesen haben, in dem Aussage und Voraussetzung lokal sind.

Zusatz 1. *Für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ von Satz 11 gelte $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$. Dann konvergiert $\{f_n(z)\}$ an einer Stelle $z_0 \in R_0$ genau dann stetig gegen $f_0(z)$ [d.h. aus $z_n \in \mathfrak{G}_n$ mit $z_n \to z_0$ folgt $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$], wenn die Bedingung (B_1) an der Stelle z_0 erfüllt ist.*

Ferner wollen wir noch die Beziehung zu dem folgenden Satz von COURANT ([*10*], S. 108) herstellen.

Zusatz 2 (JORDAN-*Gebiete*). *Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ von Satz 11 seien* JORDAN-*Gebiete. Dann konvergiert $\{f_n(z)\}$ sicher dann stetig in $\overline{\mathfrak{G}}_0$ gegen $f_0(z)$, wenn die Bedingungen von Satz C (§ 7) erfüllt sind.*

Beweis. Es genügt, anzunehmen, es sei $z_n \in \mathfrak{G}_n$ und $z_n \to z_0 \in R_0$; $\{f_{n_k}(z_{n_k})\}$ konvergiere gegen ein $\overline{w}$ auf $|w|=1$. Nach Satz C gilt daher $f_{n_k}^{-1}(f_{n_k}(z_{n_k})) \to f_0^{-1}(\overline{w})$, also $z_0 = f_0^{-1}(\overline{w})$, d.h. wegen der Einfachheit der Primenden von $\mathfrak{G}_0$ sicher $\overline{w} = f_0(z_0)$, und der Grenzwert der Folge $\{f_{n_k}(z_{n_k})\}$ war also unabhängig von $\{n_k\}$. Dies bedeutet $f_n(z_n) \to \overline{w} = f_0(z_0)$.

Indessen sei darauf hingewiesen, daß entgegen einer Bemerkung von COURANT ([*11*], S. 70) die Bedingung (i) von Satz C nicht notwendig ist für die Gültigkeit von Zusatz 2; man vergleiche dazu das Beispiel der Fig. 8.

§12. Ein Satz für stetige Konvergenz im weiteren Sinne

Nachdem in § 11 die Frage der stetigen Konvergenz erledigt worden ist, behandeln wir nun das analoge Problem, unter welchen Annahmen über die $\mathfrak{G}_n$ stetige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ gegen $f_0(z)$ im weiteren Sinne vorliegt. Von $\mathfrak{G}_0$ können wir dabei wieder Beschränktheit verlangen. Von Wichtigkeit ist im folgenden die

Bedingung (B_2). *Die Punkte $z_n', z_n'' \in (\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{G}_n)$ konvergieren gegen das Primende E des Randes R_0 von $\mathfrak{G}_0$. Dann muß es stets möglich sein, z_n' und z_n'' durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser ε_n ($\varepsilon_n \to 0$) vom Punkt $z=0$ zu trennen.*

Unter Benützung dieser Bedingung lautet

Satz 12 *(Stetige Konvergenz im weiteren Sinne). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) der z-Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|w|<1$ abgebildet; $\mathfrak{G}_0$ sei beschränkt.*

Dann ist die Bedingung (B_2) zusammen mit $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ ($n \to \infty$) notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ in $\overline{\mathfrak{G}}_0$ stetig im weiteren Sinne gegen $f_0(z)$ konvergiert.

Der Beweis von Satz 12 verläuft völlig parallel zum Beweis von Satz 11 und kann daher übergangen werden.

Bemerkungen. a) Daß Satz 12 weitergehend als Satz 11 sein kann, sieht man am Beispiel der Fig. 4. Die Bedingungen in Satz 12 sind dort erfüllt, jedoch nicht diejenigen in Satz 11. $\mathfrak{G}_0$ ist in diesem Falle ein mit einem Einschnitt versehenes Rechteck.

b) Die Bedingung (B_2) ist keine Folge von $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ ($n \to \infty$), selbst dann nicht, wenn $\mathfrak{G}_n \nearrow \mathfrak{G}_0$; man betrachte dazu Fig. 9.

c) Schließlich gilt noch ein Analogon zu Zusatz 1 von Satz 11.

Zusatz. *Für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ von Satz 12 gelte $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ ($n \to \infty$). Dann konvergiert $\{f_n(z)\}$ am Primende E von $\mathfrak{G}_0$ genau dann stetig im weiteren Sinne gegen $f_0(z)$ [d.h. aus $z_n \in (\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{G}_n)$ mit $z_n \to E$ von $\mathfrak{G}_0$ folgt $f_n(z_n) \to f_0(E)$], wenn die Bedingung (B_2) am Primende E erfüllt ist.*

An der Fig. 9 liest man sofort ab, daß dieser Zusatz anwendbar sein kann, ohne daß Satz 12 selbst anwendbar ist, da die Bedingung (B_2) nicht überall erfüllt ist.

§13. Die Sonderfälle $\mathfrak{G}_n < \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$

Nach den allgemeinen Sätzen 11 und 12 wollen wir nun die Verhältnisse genauer studieren für den Fall, daß $\mathfrak{G}_n < \mathfrak{G}_0$ oder $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ ist ($n=1, 2, \ldots$).

$\mathfrak{G}_n < \mathfrak{G}_0$. Wir sahen bereits im Anschluß an Satz 12, daß dort selbst in diesem Sonderfall die Bedingung (B_2) nicht weggelassen werden kann; das dort angeführte Beispiel der Fig. 9 zeigt ferner, daß auch in Satz 11 die Bedingung (B_1) nicht aus $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_n < \mathfrak{G}_0$ folgt. $\mathfrak{G}_n < \mathfrak{G}_0$ bedeutet also für Satz 11 und Satz 12 keine Vereinfachung. Zu bemerken wäre höchstens, daß wegen $\mathfrak{G}_n < \mathfrak{G}_0$ in der Beurteilung von $f_n(z_n)$ jetzt die z_n alle Punkte aus $\mathfrak{G}_n$ durchlaufen können.

$\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$. Hier bekommen wir jedoch eine beträchtliche Vereinfachung von Satz 12; es zeigt sich nämlich, daß die Bedingung (B_2) überflüssig ist.

Satz 13. *Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) der z-Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|w|<1$ abgebildet. $\mathfrak{G}_0$ sei beschränkt und es gelte $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ ($n=1, 2, \ldots$).*

Dann ist $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge* $\{f_n(z)\}$ *in* $\overline{\mathfrak{G}}_0$ *stetig im weiteren Sinne gegen* $f_0(z)$ *konvergiert.*

Beweis. Wegen Satz B genügt es zu zeigen, daß die Bedingung (B_2) im Falle $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ eine Folge von $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ ist.

Es seien $\{z_n'\}$ und $\{z_n''\}$ zwei Punktfolgen mit $z_n', z_n'' \in \mathfrak{G}_0$ und $z_n', z_n'' \to E$ von $\mathfrak{G}_0$.

Fall A. E trägt einen erreichbaren Randpunkt z_0. Da dieser Hauptpunkt von E ist, gibt es für eine Nullfolge $\{r_k\}$ Querschnitte q_k in $\mathfrak{G}_0$, die auf $|z - z_0| = r_k$ liegen und E definieren. Die Endpunkte von q_k, die also zum Rand von $\mathfrak{G}_0$ gehören, seien mit R_k und Q_k bezeichnet.

Fall A_1. Es gibt beliebig kleine r_k, für die $R_k = Q_k$ ist. Dann besteht E aus dem einzigen Punkt z_0; denn der durch q_k erzeugte Abschnitt g_k von $\mathfrak{G}_0$ liegt völlig in $|z - z_0| < r_k$, also ist $\bigcap_k \bar{g}_k = z_0 = E$. Nun wählen wir $\varepsilon > 0$ und k so, daß $r_k < \varepsilon$ ist, halten aber k jetzt fest. Da q_k zu $\mathfrak{G}_0$ gehört (ohne R_k, Q_k), gehört q_k auch zu $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Der Punkt z_0 ist Randpunkt von $\mathfrak{G}_0$, also gibt es wegen $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ Randpunkte ζ_n von $\mathfrak{G}_n$ mit $\zeta_n \to z_0$, insbesondere gibt es für $n > n_0$ in $|z - z_0| < \frac{r_k}{2}$ Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$. $\mathfrak{G}_n$ hat somit für $n > n_0$ in $|z - z_0| < \frac{r_k}{2}$ und in $|z - z_0| > r_k$ Randpunkte, weshalb $R_k = Q_k$ Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$ sind $(n > n_0)$; q_k ist demnach für alle diese n ein Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$. Schließlich ist $|z_0 - z_n'| < r_k$, $|z_0 - z_n''| < r_k$ für $n > n_1$, so daß sich sagen läßt: Für $n > \bar{n}$ werden die Punkte z_n', z_n'' durch den Querschnitt q_k in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $< 2\varepsilon$ von $z = 0$ getrennt. Das mußte aber gezeigt werden.

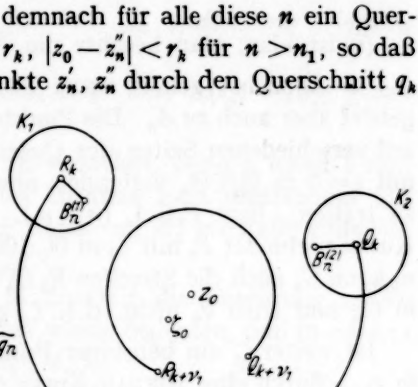


Fig. 11

Fall A_2. Die Punkte R_k, Q_k sind für hinreichend kleine r_k verschieden. Nach Vorgabe von $\varepsilon > 0$ wählen wir wieder ein $r_k < \varepsilon$, halten aber k jetzt fest und zeichnen q_k in $\mathfrak{G}_0$ ein. Dann gibt es ein ν_0 so, daß weder Q_k noch R_k zu $\overline{g_{k+\nu}}$ gehört für $\nu \geqq \nu_0$; $g_{k+\nu}$ ist dabei wie oben der durch $q_{k+\nu}$ erzeugte Abschnitt von $\mathfrak{G}_0$. Wäre nämlich z. B. $R_k \in \overline{g_{k+\nu_i}}$ $(\nu_i \to \infty)$, so wäre $R_k \in \bigcap_{\nu_i} \overline{g_{k+\nu_i}} = E$, d.h. E hätte zwei erreichbare Randpunkte, z_0 und R_k, was nicht sein kann. Wir greifen nun ein beliebiges, weiterhin festgehaltenes $\nu_1 \geqq \nu_0$ heraus, für das also R_k und Q_k nicht zu $\overline{g_{k+\nu_1}}$ gehören; es sei etwa

$$\min\{\operatorname{dist}(R_k, \overline{g_{k+\nu_1}}), \operatorname{dist}(Q_k, \overline{g_{k+\nu_1}})\} = d > 0.$$

Im folgenden brauchen wir noch die beiden Testpunkte P_1, P_2. Sie gehören einer festen, in $\mathfrak{G}_0$ gelegenen Umgebung U eines Punktes auf q_k an und sind so beschaffen, daß P_2 in g_k liegt, während man P_1 durch eine JORDAN-Kurve C_1 in $\mathfrak{G}_0$ mit $z = 0$ verbinden kann, ohne q_k zu treffen; insbesondere ist

$$\min\{\operatorname{dist}(R_k, C_1), \operatorname{dist}(Q_k, C_1)\} = d_1 > 0.$$

Ist ferner ζ_0 irgendein fester Punkt $\in g_{k+\nu_1} \subset g_k$, so läßt er sich mit P_2 in $\mathfrak{G}_0$ durch eine JORDAN-Kurve C_2 verbinden, die q_k nicht trifft; insbesondere ist

$$\min\{\operatorname{dist}(R_k, C_2), \operatorname{dist}(Q_k, C_2)\} = d_2 > 0.$$

Nun schlagen wir um R_k und Q_k Kreise K_1, K_2 mit dem Radius

$$\varrho < \min\left(d, d_1, d_2, \frac{R_k Q_k}{2}, r_k\right),$$

was eine von n unabhängige Zahl ist. In diesen Kreisen, die fremd sind und $\overline{g_{k+\nu_1}}$, C_1 und C_2 nicht schneiden, finden sich Randpunkte $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}$ von $\mathfrak{G}_n$ für $n > n_1$, da ja R_k, Q_k Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$ sind und $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$. Zieht man die Geraden $R_k A_n^{(1)}$, $Q_k A_n^{(2)}$, so gibt es von R_k bzw. von Q_k aus gesehen erste Randpunkte $B_n^{(1)}, B_n^{(2)}$ von $\mathfrak{G}_n$, wobei eventuell $R_k = B_n^{(1)}$, $Q_k = B_n^{(2)}$.

Wir stellen jetzt fest: (i) Der konstruierte Kurvenzug $B_n^{(1)}, R_k, q_k, Q_k, B_n^{(2)}$ ist ein Querschnitt $\tilde{q}_n$ in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $< 2r_k + 2\varrho < 4r_k < 4\varepsilon$ $(n > n_1)$. Diesem Querschnitt $\tilde{q}_n$ entspreche ein Abschnitt Δ_n von $\mathfrak{G}_n$. (ii) Es ist

$$g_{k+\nu_1} \subset \Delta_n \quad (n > n_1). \tag{13.1}$$

(i) ist klar; man beachte die Konstruktion und $q_k \subset \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$.

(ii) Zunächst gehört unser Punkt ζ_0 zu $g_{k+\nu_1}$ (nach Konstruktion), er gehört aber auch zu Δ_n. Die Punkte $P_1, P_2 \in \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ liegen nämlich ersichtlich auf verschiedenen Seiten des Querschnitts $\tilde{q}_n$ in $\mathfrak{G}_n$, und da C_1 den Punkt P_1 mit $z = 0$ in $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ verbindet, ohne q_k und K_1, K_2 zu treffen (also ohne $\tilde{q}_n$ zu treffen), liegt $P_2 \in \Delta_n$ $(n > n_1)$. Nun betrachten wir C_2: Diese JORDAN-Kurve verbindet P_2 mit ζ_0 in $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$, ohne q_k zu treffen, und nach Wahl von n_1 kann C_2 auch die Strecken $R_k B_n^{(1)}$ und $Q_k B_n^{(2)}$ nicht treffen, d.h. C_2 verläuft in $\mathfrak{G}_n$ und trifft $\tilde{q}_n$ nicht, d.h. ζ_0 gehört zu Δ_n.

Ist weiter ζ_1 ein beliebiger Punkt aus $g_{k+\nu_1}$, so verbinden wir ihn mit ζ_0 in $g_{k+\nu_1}$ durch eine JORDAN-Kurve C_3. Läge ζ_1 nicht in Δ_n, so müßte C_3 den Rand von Δ_n schneiden. Dieser Rand besteht aus Teilen $R^{(1)}, R^{(2)}$, wobei $R^{(1)}$ zum Rand von $\mathfrak{G}_n$ gehört, $R^{(2)}$ aber nur innere Punkte von $\mathfrak{G}_n$ enthält, nämlich $R^{(2)} = \tilde{q}_n$. C_3 kann nun sicher nicht $R^{(1)}$ schneiden, da ja $C_3 \subset g_{k+\nu_1} \subset \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$, und ferner kann C_3 nicht den in $K_1 \cup K_2$ gelegenen Teil von $R^{(2)}$ schneiden, da nach Konstruktion $K_1 \cap \overline{g_{k+\nu_1}} = K_2 \cap \overline{g_{k+\nu_1}} = 0$ ist. Also müßte C_3 den Weg q_k schneiden, d.h. es gäbe auf q_k innere Punkte von $g_{k+\nu_1}$; dies ist wegen $g_{k+\nu_1} \subset g_k$ unmöglich.

Also liegt ζ_1 in Δ_n, d.h. es gilt (13.1). Da nun aber z_n', z_n'' gegen E streben, so gilt $z_n', z_n'' \in g_{k+\nu_1}$ $(n > n_2)$ und daher $z_n', z_n'' \in \Delta_n$ $(n > \bar{n})$, d.h.

$$\left\{\begin{array}{l} z_n', z_n'' \text{ werden für } n > \bar{n} \text{ durch den Querschnitt } \tilde{q}_n \text{ in } \mathfrak{G}_n \text{ vom Durch-} \\ \text{messer } < 4\varepsilon \text{ von } z = 0 \text{ getrennt,} \end{array}\right. \tag{13.2}$$

was zu zeigen war.

Fall B. E hat keinen erreichbaren Randpunkt. Wir schlagen um einen Hauptpunkt z_0 von E Querschnitte q_k, die auf $|z-z_0|=r_k$ gelegen sind ($r_k \to 0$), und die E definieren. Dann kann der Fall A_1 nicht eintreten. Denn sonst bestünde E aus dem Punkt z_0, der dann natürlich erreichbar wäre.

Wir gehen daher gemäß Fall A_2 vor, zeichnen q_k, R_k, Q_k. Wieder gibt es ein ν_0 der dort besprochenen Art; andernfalls wäre entweder R_k oder Q_k erreichbarer Randpunkt von E, im Widerspruch zu unserer jetzigen Annahme. Die übrige Konstruktion bleibt unverändert, man erhält also auch im Fall B das Resultat (13.2).

Damit ist gezeigt, daß bei $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ die Bedingung (B_2) eine Folge von $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ ist, und Satz 13 ist bewiesen.

§14. Einige Folgerungen im Fall $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$

I. Aus dem eben bewiesenen Satz 13 läßt sich nachstehendes Ergebnis folgern, das die stetige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ betrifft, wenn hierbei nur Punkte $z_n \in \mathfrak{G}_0$ in Betracht gezogen werden.

Zusatz 1. *Voraussetzung: Wie in Satz 13; $\mathfrak{G}_0$ besitze nur einfache Primenden.*

Behauptung: Aus $z_n \in \mathfrak{G}_0$ und $z_n \to z_0 \in \overline{\mathfrak{G}}_0$ folgt stets $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$ genau dann, wenn $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$.

Hierin ist unter $f_0(z_0)$ der Punkt $f_0(E)$ zu verstehen, wenn z_0 einem Primende E von $\mathfrak{G}_0$ angehört. Der Beweis des Zusatzes folgt unmittelbar aus Satz 13, wenn man beachtet, daß $z_n \to z_0 \in$ Rand von $\mathfrak{G}_0$ im Falle einfacher Primenden impliziert: $z_n \to E$ $(n \to \infty)$.

Man wird sich natürlich fragen, ob in Zusatz 1 die Forderung $z_n \in \mathfrak{G}_0$ nicht einfach weggelassen werden kann. Das würde bedeuten, daß in Satz 11 die Bedingung (B_1) überflüssig ist, wenn $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ ist, so wie das ja bei Satz 12 der Fall war. Indessen ist dieser Analogieschluß falsch, denn es gilt

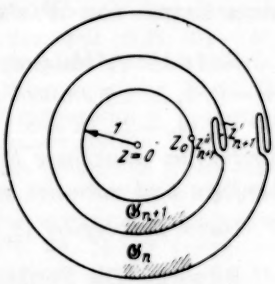


Fig. 12

Zusatz 2. *Die Forderung $z_n \in \mathfrak{G}_0$ kann in Zusatz 1 nicht weggelassen werden.*

Dies zeigt das Beispiel der Fig. 12, in dem sogar $\mathfrak{G}_n \searrow \mathfrak{G}_0$; $\mathfrak{G}_0$ ist hier das Kreisgebiet $|z|<1$. Hier ist nämlich für die angedeuteten Punkte z'_n, z''_n die Bedingung (B_1) von Satz 11 nicht erfüllt, weshalb auch dessen Aussage falsch ist.

Die Forderung $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ gab also nur im Falle der stetigen Konvergenz im weiteren Sinne eine Vereinfachung, weil eben dort die Folge $\{f_n(z_n)\}$ nur für Punkte $z_n \in \mathfrak{G}_0$ untersucht wird.

Schließlich folgt aus Satz 13 noch die folgende wichtige *Aussage bezüglich gleichmäßiger Konvergenz* der $f_n(z)$ in $\mathfrak{G}_0$.

Satz 14 *(Gleichmäßige Konvergenz). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *der z-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w=f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|w|<1$ *abgebildet.* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt und es gelte* $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Dann ist $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge* $\{f_n(z)\}$ *in* $\mathfrak{G}_0$ *gleichmäßig gegen* $f_0(z)$ *konvergiert*[23].

Vorbemerkung. Ein etwas schwächerer Satz stammt von FARRELL ([12], S. 573)[24]; dort wurde aber zusätzlich verlangt:

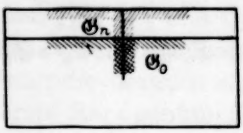


Fig. 13

a) $\mathfrak{G}_0$ habe nur einfache Primenden; der FARRELLsche Satz wäre also im Beispiel der Fig. 13 nicht anwendbar.

b) $\mathfrak{G}_0$ besitzt einen Rand, der auch Rand eines einfach zusammenhängenden unendlichen Gebiets ist; dies wäre ebenfalls bei unserem Beispiel nicht erfüllt.

c) $\mathfrak{G}_n$ sind gleichmäßig beschränkt; diese Voraussetzung war beweistechnisch bedingt, da FARRELL mit älteren LINDELÖFschen Sätzen operierte statt mit dem FERRANDschen Satz, wie das hier geschah.

Beweis von Satz 14. $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ ist notwendig (Satz B). Wenn andererseits $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ erfüllt ist, die Aussage aber falsch wäre, so gäbe es eine Punktfolge $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_0$ so, daß $|f_n(z_n) - f_0(z_n)| \geq 2\alpha > 0$ ist. Die z_n streben dabei (wieder wegen Satz B) gegen den Rand von $\mathfrak{G}_0$, und es sei angenommen, daß $\{z_n\}$ gegen das Primende E von $\mathfrak{G}_0$ konvergiere. Dann ist aber $f_0(z_n) \to f_0(E)$, es wäre also $|f_n(z_n) - f_0(E)| \geq \alpha > 0$, obwohl $z_n \in \mathfrak{G}_0$ und $z_n \to E$ gilt; dies wäre im Widerspruch zu Satz 13.

II. Manchmal ist es zweckmäßig, über das Verhalten der Funktionen $g_n(z)$ Bescheid zu wissen, die $\mathfrak{G}_n$ auf den Kern $\mathfrak{G}_0$ der Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ abbilden. In dieser Richtung wollen wir abschließend noch folgende Verallgemeinerung eines Satzes von WALSH ([32], S. 35, Corollary 1) beweisen.

Satz 15 *(Abbildung auf den Kern). Vorgegeben sei eine Folge* $\{\mathfrak{G}_n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *einfach zusammenhängender und endlicher Gebiete mit* $O \in \mathfrak{G}_n$, *für die* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ und $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ *gelte;* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt und besitze nur erreichbare Randpunkte. Die* $\mathfrak{G}_n$ *seien vermöge der Funktionen* $g_n(z)$ *konform und normiert auf* $\mathfrak{G}_0$ *abgebildet.*

Dann konvergiert $\{g_n(z)\}$ *gleichmäßig in* $\mathfrak{G}_0$ *gegen* $g_0(z)=z$.

Beweis. Die Funktionen $w=\varphi_n(z)$ [Umkehrfunktionen $z=\psi_n(w)$] mögen $\mathfrak{G}_n$ konform und normiert auf $|w|<1$ abbilden. Dann ist $g_n(z)=\psi_0(\varphi_n(z))$

[23] Wir behaupten absichtlich nicht die gleichmäßige Konvergenz in $\overline{\mathfrak{G}}_0$, um die Möglichkeit nicht auszuschließen, daß $\mathfrak{G}_0$ mehrfache Primenden besitzt.

[24] Ein noch spezielleres Resultat findet sich bei WALSH ([32], S. 32). Dieser Satz ist bekanntlich der Schlüssel zu wichtigen Sätzen aus der Theorie der Approximation im Komplexen.

($n=1, 2, \ldots$), worin infolge von Satz 14 $\varphi_n(z) \Rightarrow \varphi_0(z)$ strebt ($n \to \infty$, $z \in \mathfrak{G}_0$). Die Abbildung $\psi_0(w)$ ist aber stetig in $|w| \leq 1$, woraus die Behauptung sofort folgt.

Bei WALSH ist neben anderen Voraussetzungen $\mathfrak{G}_0$ ein JORDAN-Gebiet und die $\mathfrak{G}_n$ müssen gleichmäßig beschränkt sein.

Literatur

[1] BIEBERBACH, L.: Über einen Satz des Herrn CARATHÉODORY. Göttinger Nachr. **1913**, 552—560. — [2] BIEBERBACH, L.: Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. Rend. Circ. Mat. Palermo **38**, 98—112 (1914). — [3] BIEBERBACH, L.: Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., math.-phys. Kl. **1924**, 181—188. — [4] BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II. Leipzig 1931. — [5] CARATHÉODORY, C.: Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Ann. **72**, 107—144 (1912). — [6] CARATHÉODORY, C.: Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. **73**, 323—370 (1913). — [7] CARATHÉODORY, C.: Conformal representation. Cambridge 1932. — [8] CARATHÉODORY, C.: Reelle Funktionen, Bd. I. Leipzig u. Berlin 1939. — [9] CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie, Bd. I. Basel 1950. — [10] COURANT, R.: Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung. Göttinger Nachr. **1914**, 101—109. — [11] COURANT, R.: Bemerkung zu meiner Note: „Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung." Göttinger Nachr. **1922**, 69—70. — [12] FARRELL, O. J.: On approximation to a mapping function by polynomials. Amer. J. Math. **54**, 571—578 (1932). — [13] FERRAND, J.: Étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme. Bull. Soc. math. France **70**, 143—174 (1942). — [14] FERRAND, J.: Sur la déformation analytique d'un domaine. C. r. Acad. Sci., Paris **221**, 132—134 (1945). — [15] FRÉCHET, M.: Sur l'écart de deux courbes et sur les courbes limites. Trans. Amer. Math. Soc. **6**, 435—449 (1905). — [16] GARNIER, R.: Sur la variation de la représentation conforme d'un domaine variable. Rend. di Mat. Roma **1954**, 258—267. — [17] GATTEGNO, C., et A. OSTROWSKI: Représentation conforme à la frontière; domaines généraux. Paris 1949. — [18] GATTEGNO, C., et A. OSTROWSKI: Représentation conforme à la frontière; domaines particuliers. Paris 1949. — [19] JULIA, G.: Sur une équation aux dérivées fonctionelles liée à la représentation conforme. Ann. sci. Écol. norm. sup. (3) **39**, 1—28 (1922). — [20] LAVRENTIEFF, M., u. D. KWESSELAWA: Über einen OSTROWSKIschen Satz. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR **1**, 171—174 (1940). — [21] LELONG-FERRAND, J.: Sur certaines classes de représentations d'un domaine plan variable. J. Math. pur. appl. (9) **31**, 103—126, 245—252 (1952). — [22] LICHTENSTEIN, L.: Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, 3^1, S. 177—377. 1909—1921. — [23] MARCHENKO, A.: Sur la représentation conforme. Doklady Acad. Sci. USSR **1**, 289—290 (1935). — [24] MARKOUCHEVITCH, A.: Sur la représentation conforme des domaines à frontières variables. Mat. Sbornik (2) **1**, 863—884 (1936). — [25] MÜLLER, M.: Zur konformen Abbildung angenähert kreisförmiger Gebiete. Math. Z. **43**, 628—636 (1938). — [26] OSTROWSKI, A.: Über konforme Abbildungen annähernd kreisförmiger Gebiete. Jber. Dtsch. Math.-Verein. **39**, 78—81 (1930). — [27] OSTROWSKI, A.: Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung. Prace mat.-fiz. **44**, 371—471 (1936). — [28] RADÓ, T.: Sur la représentation conforme de domaines variables. Acta Sci. Math. Szeged **1**, 180—186 (1922/23). — [29] SPECHT, E. J.: Estimates on the mapping function and its derivatives in conformal mapping of nearly circular regions. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 183—196 (1951). — [30] TITCHMARSH, E. C.: The theory of functions. Oxford 1950. — [31] TSUJI, M.: On the theorems of CARATHÉODORY and LINDELÖF in the theory of conformal representation. Japanese J. Math. **7**, 91—99 (1930). — [32] WALSH, J. L.: Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York 1935. — [33] WALSH, J. L., u. D. GAIER: Zur Methode der variablen

Gebiete bei der Randverzerrung. Arch. der Math. **6**, 77—86 (1955). — [*34*] WARSCHAWSKI, S. E.: Über einige Konvergenzsätze aus der Theorie der konformen Abbildung. Göttinger Nachr. **1930**, 344—369. — [*35*] WARSCHAWSKI, S. E.: Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung. Math. Z. **35**, 321—456 (1932). — [*36*] WARSCHAWSKI, S. E.: On the degree of variation in conformal mapping of variable regions. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 335—356 (1950). — [*37*] WARSCHAWSKI, S. E.: On conformal mapping of nearly circular regions. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 562—574 (1950). — [*38*] WARSCHAWSKI, S. E.: Construction and applications of conformal maps. Washington 1952. — [*39*] WARSCHAWSKI, S. E.: On mean convergence in conformal mapping. Arch. der Math. **6**, 102—114 (1955). — [*40*] WOLFF, J.: Sur la représentation conforme. Proc. Akad. Amsterdam **33**, 96—97 (1930). — [*41*] WOLFF, J.: Sur la représentation conforme des bandes. Compositio math. **1**, 217—222 (1934). — [*42*] ZYGMUND, A.: Trigonometrical series. Warschau 1935.

Stuttgart, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 2. Juli 1955)

CARLITZ, L.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 425—434 (1956)

Arithmetic properties of elliptic functions

By
LEONARD CARLITZ

1. *Introduction.* Put [5, p. 399]

$$\operatorname{sn} x = \operatorname{sn}(x, u) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(u) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \tag{1.1}$$

where $u = k^2$ in the usual notation; then $A_{2m+1}(u)$ is a polynomial in u with integral coefficients. Also put

$$\frac{x}{\operatorname{sn} x} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \tag{1.2}$$

where $\beta_{2m}(u)$ is a polynomial with rational coefficients. The writer proved in [2] that the polynomials $A_n(u)$ satisfy

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{(r-s)t/(p-1)} A_{n+st} \equiv 0 \pmod{(p^n, p^{er})}, \tag{1.3}$$

where p is an odd prime; $p^{e-1}(p-1) \mid t$ and r is an arbitrary integer ≥ 1. This result is to be interpreted in the following way: after expansion each coefficient in the left member $\equiv 0$.

As for the polynomial $\beta_{2m}(u)$ we have

$$p\,\beta_{2m}(u) \equiv \begin{cases} -A_p^{2m/(p-1)}(u) & (p-1 \mid m) \\ 0 & (\text{otherwise}); \end{cases} \tag{1.4}$$

the modulus is p. Also corresponding to (1.3) we have

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{(r-s)t/(p-1)} \frac{\beta_{2m+st}}{2m+st} \equiv 0 \pmod{(p^{2m-1}, p^{er})}, \tag{1.5}$$

provided now that $p-1 \nmid 2m$. We shall refer to (1.3) and (1.5) as Kummer's congruences; (1.4) is of course an analogue of the Staudt-Clausen Theorem. We may also mention the result

$$\beta_{2m}(u) \equiv 0 \pmod{p^r}, \tag{1.6}$$

provided $p^r \mid 2m$, $p-1 \nmid 2m$.

In the present paper we show that results like the above can be proved very rapidly by making use of the Fourier expansions for the Jacobi elliptic functions. (For a somewhat similar application see [1].) We find that the formulas in question can be referred back to corresponding properties of the

Bernoulli and Euler numbers. Indeed in this way we also get some new results. In particular we state

$$\beta_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) A_p^{2m/(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r}, \tag{1.7}$$

where now $p^r(p-1) \mid 2m$. This, like (1.6), is the analogue of a known property of the Bernoulli numbers.

It may be of interest to recall that Hurwitz in his paper [7] on the coefficients of the lemniscate function remarks that he was unable to carry over the usual proofs of the Staudt-Clausen Theorem because the necessary explicit formulas were not available. From the point of view of the present paper it appears that it is quite possible to carry over the usual proofs provided one considers the general function $\mathrm{sn}(x, u)$ with u arbitrary rather than the special lemniscate function.

2. *Some preliminaries.* We consider power series of the form

$$f(x, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} f_m(u), \tag{2.1}$$

where

$$f_m(u) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{ms} u^s, \tag{2.2}$$

and the coefficients a_{ms} are rational integers; a little more generally it suffices to assume that the a_{ms} are integral (mod p), where p is a fixed odd prime. We may think of the series (2.1) and (2.2) as formal power series or if we prefer as series converging for $|x|$ and $|u|$ sufficiently small.

Now consider the transformation

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} c_r v^r \quad (c_1 = 1), \tag{2.3}$$

where the c_r are integral (mod p). Substituting from (2.3) in (2.2) we get

$$f_m(u) = h_m(v) = \sum_{s=0}^{\infty} a'_{ms} v^s. \tag{2.4}$$

It is immediate that the a'_{ms} are also integral. Since (2.3) implies

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n u^n \tag{2.5}$$

with integral c'_n, we may accordingly state

LEMMA 1. *Let the transformation* (2.3) *carry* $f_m(u)$ *into* $g_m(v)$. *Then the coefficients* a_{ms} *are integral if and only if the* a'_{ms} *are integral.*

In the next place assume that $f_m(u)$ satisfies

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} f^{(r-s)t/(p-1)} f_{m+st} \equiv 0 \pmod{(p^m, p^{er})}, \tag{2.6}$$

where $p^{e-1}(p-1) \mid t$, $r \geq 1$, and $f_m = f_m(u)$.

LEMMA 2. *Let the transformation* (2.3) *carry* $f_m(u)$ *into* $h_m(v)$ *and* $f(u)$ *into* $h(u)$. *Then* $f_m(u)$ *satisfies* (2.6) *if and only if* $h_m(v)$ *satisfies a similar congruence.*

This result is an immediate consequence of Lemma 1.

LEMMA 3. *Let* $f_m(u)$ *satisfy* (2.6) *and let* $f(u) \equiv \bar{f}(u) \pmod{p}$. *Then*

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \bar{f}^{(r-s)\,t/(p-1)} f_{m+st} = 0 \pmod{p^m, p^{e'}}. \tag{2.7}$$

It follows from $f = \bar{f} \pmod{p}$ that $f^w = \bar{f}^w + p^e \varphi$, where $t = w(p-1)$ and φ has integral coefficients. Using symbolic notation, the left member of (2.7) is equal to

$$f^m (f_t - \bar{f}^w)^r = f^m (f_t - f^w + p^e \varphi)^r = f^m \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (f_t - f)^s (p^e \varphi)^{r-s},$$

and the lemma follows.

If we take $t = p-1$, $e = 1$, (2.6) becomes

$$f_{m+p-1}(u) \equiv f(u) f_m(u) \pmod{p} \quad (m \geq 1), \tag{2.8}$$

which implies the following

LEMMA 4. *If* $f_m(u)$ *satisfies* (2.6) *and* $f_1(u) = 1$ *then*

$$f_p(u) \equiv f(u) \pmod{p}. \tag{2.9}$$

3. *The coefficients of* $\operatorname{sn} x$. For the application the transformation (2.3) will be the familiar expression for k^2 in terms of q:

$$k^2 = 16q \prod_{1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}} \right)^8; \tag{3.1}$$

the coefficient 16 is of no consequence.

Now consider the expansion (see for example [8, p. 511])

$$\operatorname{sn} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} \sin(2n+1)x}{1-q^{2n+1}}.$$

Since $2K/\pi = \vartheta_3^2$, we have

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{sn} x &= \frac{4}{k\vartheta_3^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{((2n+1)x/\vartheta_3^2)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \frac{4}{k\vartheta_3^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \left(\frac{x}{\vartheta_3^2} \right)^{2m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2m+1} q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}. \end{aligned} \right. \tag{3.2}$$

Comparing (3.2) with (2.1) and (2.4), we put

$$f_{2m+1}(k^2) = h_{2m+1}(q) = (-1)^m \frac{4}{k} \vartheta_3^{-2(2m+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2m+1} q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}. \tag{3.3}$$

Since $\vartheta_3 = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2}$, it is clear from (3.1) that $h_{2m+1}(q)$ is a series in q with integral coefficients. Also it is evident from (3.3) that

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s+st}\binom{r}{s}\vartheta_3^{2st}h_{2m+1+st} = (-1)^m\frac{4}{k}\vartheta_3^{-2(2m+2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^m\left((2n+1)^t-1\right)^r.$$

Now when $p^{e-1}(p-1)\mid t$, $p\nmid(2n+1)$, we have $(2n+1)^t\equiv 1 \pmod{p^e}$. Hence we get

$$h^{2m+1}\left(h^t-(-1)^{t/2}\vartheta_3^{-2t}\right)^r \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\,(p^m, p^{er})\right). \tag{3.4}$$

We now apply Lemma 2 and Lemma 4. Comparing (3.3) with (1.1) we have

$$f_{2m+1}(u) = A_{2m+1}(u).$$

Since $A_1(u)=1$, it therefore follows that (2.6) becomes

$$A^{2m+1}(A^t - A_p^w)^r \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\,(p^{2m+1}, p^{er})\right), \tag{3.5}$$

where as above $(t=p-1)^w$, $p^{e-1}(p-1)\mid t$ and $A_n = A_n(u)$. We have therefore proved (1.3). Note also for later use that (2.9) reduces to

$$A_p(k^2) \equiv (-1)^{(p-1)/2}\vartheta_3^{-2(p-1)} \pmod{p}. \tag{3.6}$$

Since [2, § 6]

$$A_p(u) \equiv (-1)^{(p-1)/2}\sum_{s=0}^{z}\binom{z}{s}^2 u^s \pmod{p},$$

where $p = 2z+1$, (3.6) implies the following congruence

$$\vartheta_3^{2(p-1)}\sum_{s=0}^{z}\binom{z}{s}^2 k^{2s} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{3.7}$$

Substituting for k^2 from (3.1), (3.7) becomes an identical congruence in q.

4. *The coefficients of* $\mathrm{cn}\,x$ *and* $\mathrm{dn}\,x$. We put

$$\mathrm{cn}\,x = \mathrm{cn}(x,u) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m}(u)\frac{x^{2m}}{(2m)!}. \tag{4.1}$$

On the other hand we have [8, p. 511]

$$\mathrm{cn}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}\cos(2n+1)x}{1+q^{2n+1}},$$

which implies

$$\operatorname{cn} x = \frac{4}{k\vartheta_3^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{((2n+1)\,x/\vartheta_3^2)^{2m}}{(2m)!}$$

$$= \frac{4}{k\vartheta_3^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{x}{\vartheta_3^2}\right)^{2m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2m}q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}},$$

so that now

$$f_{2m}(k^2) = h_{2m}(q) = (-1)^m\frac{4}{k}\vartheta_3^{-2(2m+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2m}q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}}.$$

Thus exactly as above we get

$$h^{2m}\left(h^t-(-1)^{t/2}\vartheta_3^{-2t}\right)^r \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,(p^{2m},p^{er})).$$

Finally by Lemma 2 and (3.6) we get

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}A_p^{(r-s)w}C_{2m+st}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,(p^{2m},p^{er})), \tag{4.2}$$

where $C_n = C_n(u)$. Thus the coefficients in (4.1) satisfy a congruence similar to that satisfied by the coefficients of $\operatorname{sn} x$; note however the presence of A_p in the left member of (4.2).

For the function $\operatorname{dn} x$ we put

$$\operatorname{dn} x = \sum_{m=0}^{\infty}D_{2m}(u)\frac{x^{2m}}{(2m)!} \tag{4.3}$$

and recall the expansion [8, p. 511]

$$\operatorname{dn}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos 2nx}{1+q^{2n}}. \tag{4.4}$$

Then exactly as in the proof of (4.2), (4.3) and (4.4) yield

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}A_p^{(r-s)w}D_{2m+st}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,(p^{2m},p^{er})), \tag{4.5}$$

where $D_n = D_n(u)$.

We remark that a glance at the Fourier expansions of $\operatorname{cd} x$, $\operatorname{sd} x$ and $\operatorname{nd} x$ show that their coefficients also satisfy similar congruences; the notation is that of Glaisher [8, p. 494]. For example if we put

$$\operatorname{cd} x = \sum_{m=0}^{\infty}\operatorname{cd}_{2m}(u)\frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

we find that

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}A_p^{(r-s)w}\operatorname{cd}_{2m+st}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,(p^{2m},p^{er})). \tag{4.6}$$

The functions dc, nc and sc are a little more interesting from this point of view and we return to them below.

5. *The reciprocal of* $\operatorname{sn} x$. We shall employ the notation (1.2). Also we have the expansion [8, p. 511]

$$\operatorname{ns}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2K}\csc x + \frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}\sin(2n+1)x}{1-q^{2n+1}}$$

so that

$$\frac{x}{\operatorname{sn} x} = \frac{x}{\vartheta_3^2}\csc\frac{x}{\vartheta_3^2} + \frac{4x}{\vartheta_3^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\sin\frac{(2n+1)x}{\vartheta_3^2}. \tag{5.1}$$

Also

$$x\csc x = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m R_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}, \tag{5.2}$$

where

$$R_{2m} = (2-2^{2m})B_{2m}, \tag{5.3}$$

and B_{2m} is a Bernoulli number in the even suffix notation. Thus combining (5.1) and (5.2) we get

$$\begin{aligned}\frac{x}{\operatorname{sn} x} &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{R_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{x}{\vartheta_3^2}\right)^{2m} + \\ &\quad + \frac{4}{\vartheta_3^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\frac{(2n+1)^{2m+1}x^{2m+2}}{\vartheta_3^{2(2m+1)}} \\ &= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left(\frac{x}{\vartheta_3^2}\right)^{2m}\left\{R_{2m}-8m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2m-1}q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right\}.\end{aligned}$$

Comparing with (1.2) we get

$$\frac{\beta_{2m}(u)}{2m} = \frac{(-1)^m}{\vartheta_3^{4m}}\left\{\frac{R_{2m}}{2m}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2m-1}q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right\}. \tag{5.4}$$

If we put

$$\varphi_{2m} = \frac{(-1)^m}{\vartheta_3^{4m}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2m-1}q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \qquad (m\geq 1),$$

it is apparent that

$$\varphi^{2m}\left(\varphi^t-(-1)^{t/2}\vartheta_3^{-2t}\right)\equiv 0\left(\operatorname{mod}\left(p^{2m-1},p^{er}\right)\right). \tag{5.5}$$

Also it is familiar [6] that, if $p-1\nmid 2m$,

$$R'^{2m}(R'^t-1)^r\equiv 0\left(\operatorname{mod}\left(p^{2m-1},p^{er}\right)\right), \tag{5.6}$$

where $R'_{2m}=R_{2m}/2m$. Consequently if we put $\beta'_{2m}(u)=\beta_{2m}(u)/2m$, it is clear from (5.4), (5.5) and (3.6) that

$$\beta'^{2m}\left(\beta'^t-A_p^w\right)\equiv 0\left(\operatorname{mod}\left(p^{2m-1},p^{er}\right)\right)(p-1\nmid 2m), \tag{5.7}$$

which is the same as (1.5).

We now show that (5.4) implies additional properties of $\beta_{2m}(u)$. In the first place φ_{2m} has integral coefficients, so that we get

$$p\,\beta_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \cdot p\,R_{2m} \pmod{p\,m}. \tag{5.8}$$

If $p-1 \mid 2m$, the Staudt-Clausen theorem for B_{2m} implies $p R_{2m} \equiv -1 \pmod p$ and thus (5.8) yields

$$p\,\beta_{2m}(u) \equiv -A_p^{2m/(p-1)} \pmod p \quad (p-1 \mid 2m), \tag{5.9}$$

which proves (1.4). Indeed (5.8) yields

$$p\,\beta_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \cdot p\,R_{2m} \pmod{p^{r+1}} \quad \left(p^r (p-1) \mid 2m\right). \tag{5.10}$$

In the next place if $p^r \mid m$ but $p-1 \nmid 2m$ then it is known that $B_{2m} \equiv 0 \pmod{p^r}$; by (5.3) it follows that $R_{2m} = 0 \pmod{p^r}$. Hence (5.4) yields

$$\beta_{2m}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (p^r \mid m,\ p-1 \nmid 2m). \tag{5.11}$$

More precisely we may state that the coefficients of

$$\frac{\beta_{2m}(u)}{2m} - A_p^{2m/(p-1)} \frac{R_{2m}}{2m} \tag{5.12}$$

are integral (mod p).

Again it is known [4, Th. 3] that when $p^r (p-1) \mid 2m$, then

$$B_{2m} + \frac{1}{p} - 1 \equiv 0 \pmod{p^r}; \tag{5.13}$$

indeed

$$B_{2m} + \frac{1}{p} - 1 \equiv -2m\,W_p \pmod{p^{r+1}}, \tag{5.14}$$

where $W_p = \left((p-1)! + 1\right)/p$. Thus (5.4) implies

$$\beta_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) A_p^{2m/(p-1)} \equiv -2m\,W_p\,A_p^{2m/(p-1)} \pmod{p^{r+1}} \tag{5.15}$$

and in particular

$$\beta_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) A_p^{2m/(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \quad \left(p^r (p-1) \mid 2m\right). \tag{5.16}$$

The restriction in (5.7) that $p-1 \nmid 2m$ can to a certain extent be removed. For brevity put

$$\sigma_m = \frac{1}{m}\left(B_{mt} + \frac{1}{p} - 1\right),$$

$$\tau_m = \tau_m(u) = \frac{1}{m}\left\{\beta_{mt}(u) + \left(\frac{1}{p} - 1\right) A_p^{mw}(u)\right\}.$$

By Theorem 7 of [4] we have

$$\sigma^m (\sigma - 1)^r \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\,(p^{t-h'}, p^{er})\right), \tag{5.17}$$

where $p^{e-1}(p-1) \mid t$, $m \geq 1$, $1 \leq r \leq p-1$, h' is the least integer $\geq (r+m-1)e/p$.

Hence by (5.4) we get

$$\tau^m(\tau-1)^r \equiv 0 \pmod{(p^{l-k'}, p^{s'r})}, \tag{5.18}$$

subject to the same restrictions as (5.17). A more general congruence can be obtained by using Theorem 6 of [4], while results of a slightly different kind can be obtained by using Theorem 4.

6. *The coefficients of* $\operatorname{ds} x$ *and* $\operatorname{cs} x$. We have the expansions [8, p. 512]

$$\operatorname{ds}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2K}\csc x - \frac{2\pi}{K}\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}\sin(2n+1)x}{1+q^{2n+1}}, \tag{6.1}$$

$$\operatorname{cs}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2K}\cot x - \frac{2\pi}{K}\sum_1^\infty \frac{q^{2n}\sin 2nx}{1+q^{2n}}.$$

Comparing (6.1) with (5.1) it is clear that the coefficients of $x\operatorname{ds} x$ have properties similar to those of $\beta_{2m}(u)$. We shall accordingly not take the space to discuss those coefficients; we shall however briefly discuss the coefficients of $x\operatorname{cs} x$. Put

$$x\operatorname{cs} x = \sum_0^\infty \gamma_{2m}(u)\, x^{2m}/(2m)! \tag{6.3}$$

Expanding the right member of (6.2) we find that

$$\frac{\gamma_{2m}(u)}{2m} = \frac{(-1)^m}{\vartheta_3^{4m}}\left\{\frac{2^{2m}B_{2m}}{2m} - 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n)^{2m-1}q^{2n}}{1+q^{2n}}\right\}.$$

Thus we get

$$\gamma'^{2m}(\beta'^{l} - A_p^w)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m-1}, p^{s'r})}, \tag{6.4}$$

where $\gamma'_{2m}(u) = \gamma_{2m}(u)/2m$, corresponding to (5.7). We have also

$$p\,\gamma_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \pmod p \quad (p-1 \mid 2m), \tag{6.5}$$

$$\gamma_{2m}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (p^r \mid m,\ p-1 \nmid 2m), \tag{6.6}$$

$$\gamma_{2m}(u) + \left(\frac{1}{p}-1\right)A_p^{2m/(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (p^r \mid (p-1) \mid 2m). \tag{6.7}$$

Indeed (6.5), (6.6), (6.7) can be generalized as in (5.10), (5.12), (5.14).

7. *The coefficients of* $\operatorname{dc} x$, $\operatorname{nc} x$, $\operatorname{sc} x$. We now require the expansions [8, p. 512]

$$\operatorname{dc}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2K}\sec x + \frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n q^{2n+1}\cos(2n+1)x}{1-q^{2n+1}}, \tag{7.1}$$

$$\operatorname{nc}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2Kk'}\sec x - \frac{2\pi}{Kk'}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n q^{2n+1}\cos(2n+1)x}{1+q^{2n+1}}, \tag{7.2}$$

$$\operatorname{sc}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2Kk'}\tan x + \frac{2\pi}{Kk'}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)\,q^{2n}\sin 2nx}{1+q^{2n}} \tag{7.3}$$

together with

$$\sec x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} E_{2m}, \tag{7.4}$$

$$\tan x = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} T_{2m-1} \tag{7.5}$$

where E_{2m} is the Euler number and

$$T_{2m+1} = 2^{2m}(1-2^{2m}) B_{2m}/2m. \tag{7.6}$$

The coefficients of dn and nc have similar properties, so that it will suffice to discuss only (7.1) and (7.3). Put

$$\mathrm{dc}\, x = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{dc}_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \tag{7.7}$$

$$\mathrm{sc}\, x = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{sc}_{2m+1}(u) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{7.8}$$

Comparison of (7.7) with (7.1) yields

$$\mathrm{dc}_{2m}(u) = \frac{(-1)^m}{\vartheta_3^{2(2m+2)}} \left\{ E_{2m} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)^{2m} q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \right\}, \tag{7.9}$$

while (7.8) and (7.3) imply

$$\mathrm{sc}_{2m+1}(u) = \frac{(-1)^{m+1}}{\vartheta_3^{2(2m+1)} k'} \left\{ T_{2m+1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)^{2m+1} q^{2n}}{1+q^{2n}} \right\}. \tag{7.10}$$

Then since $E^{2m}(E^t-1)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m}, p^{er})}$ we get

$$\mathrm{dc}^m(\mathrm{dc}^t - A_p^w)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m}, p^{er})}, \tag{7.11}$$

while $T^{2m+1}(T^t-1)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m+1}, p^{er})}$ gives

$$\mathrm{sc}^{2m+1}(\mathrm{sc}^t - A_p^w)^r \equiv 0 \pmod{(p^{2m+1}, p^{er})}, \tag{7.12}$$

where as above $p^{e-1}(p-1) \mid t$ and $t = (p-1)w$.

In the next place we make use of the following result ([6, p. 845], [3, Th. 1]:

$$E_{2m} \equiv 1 - (-1)^{(p-1)/2} \pmod{p^e}, \tag{7.13}$$

provided $p^{e-1}(p-1) \mid 2m$. For such m we have $a^m \equiv 1 \pmod{p^e}$ when $p \nmid a$. Also it follows from (3.6) that

$$A_p^{2m/(p-1)} \equiv (-1)^m \vartheta_3^{-4m} \pmod{p^e}.$$

Thus (7.9) becomes

$$\mathrm{dc}_{2m}(u) \equiv \frac{A_p^{2m/(p-1)}}{\vartheta_3^2} \left\{ 1 + (-1)^{(p-1)/2} + 4 \sum_{\substack{n=0 \\ p \nmid (2n+1)}}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \right\}.$$

Since

$$\vartheta_3^2 = 1 + 4\sum_0^\infty (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}},$$

it is clear that

$$4\sum_{\substack{n=0\\ p\nmid(2n+1)}}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} = \vartheta_3^2(q) - \vartheta_3^2(q^p),$$

where we have used the fuller notation $\vartheta_3(q)$ in place of ϑ_3.

Hence we get

$$(7.14)\qquad \mathrm{dc}_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \left\{1 + \frac{1+(-1)^{(p-1)/2}}{\vartheta_3^2(q)} - \frac{\vartheta_3^2(q^p)}{\vartheta_3^2(q)}\right\} \pmod{p^e},$$

provided $p^{e-1}(p-1)\,|\,2m$. When $e=1$ and $p \equiv 1 \pmod 4$, (7.14) reduces to

$$(7.15)\qquad \mathrm{dc}_{2m}(u) \equiv A_p^{2m/(p-1)} \left(1 - \frac{1}{A_p}\right) \pmod{p}.$$

The corresponding formulas for $\mathrm{sc}_{2m}(u)$ are somewhat more complicated and will not be stated.

References

[1] BELL, E. T.: On the power series for elliptic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 841—852 (1934). — [2] CARLITZ, L.: Congruences connected with the power series expansions of the Jacobi elliptic functions. Duke Math. J. **20**, 1—12 (1953). — [3] CARLITZ, L.: A note on Euler numbers and polynomials. Nagoya Math. J. **7**, 35—43 (1954). — [4] CARLITZ, L.: Some congruences for the Bernoulli numbers. Amer. J. Math. **75**, 163—172 (1953). — [5] FRICKE, R.: Die elliptische Funktionen und ihre Anwendungen, vol. 1. Leipzig and Berlin 1916. — [6] FROBENIUS, G.: Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome. Sitzgsber. Preuß. Akad. Wiss. **1910**, 809—847. — [7] HURWITZ, A.: Über die Entwickelungscoeffizienten der lemniscatischen Funktionen. Mathematische Werke, vol. 2, pp. 342—373. Basel 1933. — [8] WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: Modern Analysis, 4th ed. Cambridge 1927.

Dept. of Math., Duke University, Durham, N. C. (U.S.A.)

(Eingegangen am 2. September 1955)

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 435—456 (1956)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. V

Von
WALTER NEUMER

Vorbemerkung

Im nachstehenden 5. Abschnitt dieser Arbeit[1]) wird der im 1. Abschnitt entwickelte konstruktive Algorithmus über die dortige Grenzzahl $1VII'I''\ldots$ [I, § 2, (19)] hinaus ein Stück Wegs fortgesetzt bis zu einer provisorisch mit Ξ bezeichneten Grenzzahl. Diese Fortsetzung ermöglicht es unter anderem, der von H. BACHMANN[2]) auf nicht konstruktivem Wege definierten Zahl $H(1)$ einen Platz im Algorithmus zu geben, und zwar ist $H(1) = 1VI_{1VI}1V$. Das kann aber erst im 7. Abschnitt gezeigt werden, nachdem zuvor im 6. Abschnitt auch der weitergeführte konstruktive Algorithmus zu einem „freien" (d.h. zu einem auf beliebige Ordnungszahlen mit beliebigen Operatoren anwendbaren) Algorithmus verallgemeinert sein wird, analog der Umwandlung des konstruktiven Algorithmus von I in den freien Algorithmus von II. Im 7. Abschnitt soll der schon in der Vorbemerkung zu I angekündigte Algorithmus für Normalfunktionen entwickelt werden, und zwar sogleich entsprechend dem im vorliegenden Abschnitt erreichten Stande des konstruktiven Algorithmus. Eine Skizze des Algorithmus für Normalfunktionen und seines Parallelismus mit dem (freien) Algorithmus für Zahlen, allerdings nur entsprechend dem Stande des konstruktiven Algorithmus von I, ist vom Verfasser inzwischen anderweitig erschienen[3]). In dieser Skizze wurde zugleich ein weiterer Zusammenhang der beiden Algorithmen dargestellt, der durch eine von BACHMANN a. a. O.[2]) und DENJOY[4]) verwendete Bezeichnungsweise für die Folge der höheren Ableitungen einer Normalfunktion vermittelt wird, und es wurde darauf hingewiesen, daß sich hieraus eine Fortführung des Algorithmus für Zahlen über den Ausdruck $\alpha VII'I''\ldots$ hinaus müsse gewinnen lassen. Der nunmehr vorgelegte 5. Abschnitt bringt in gewissem Umfange eine Ausführung dieses Hinweises für den konstruktiven Algorithmus und liefert damit zugleich die effektive Definition von Fundamentalfolgen

[1]) Die vier vorangehenden Abschnitte sind in dieser Zeitschrift **58**, 391—413 (1953); **59**, 434—454 (1954); **60**, 1—16 (1954); **61**, 47—69 (1954) erschienen. Sie werden als **I** bis **IV** zitiert; die Paragraphen sind durchgehend, die Formeln, Sätze und Fußnoten abschnittsweise numeriert.

[2]) Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen. Dissertation Zürich 1950.

[3]) Ein Algorithmus für Normalfunktionen. Proc. of the Int. Congr. of Math. 1954, II, 147—149. Amsterdam 1954.

[4]) L'énumération transfinie, II, 2. Paris 1952.

für die Limeszahlen eines erheblich größeren Abschnitts der zweiten Zahlenklasse, als er in jener Skizze genannt wurde. Auch dies wird erst im 7. Abschnitt deutlich werden.

5. Abschnitt

Weiterführung des konstruktiven Algorithmus über $1VII'I''\ldots$ hinaus

§ 12. Vorbereitende Erläuterungen

1. Wir ersetzen zunächst die provisorische Bezeichnung $1VII'I''\ldots$ für die Grenzzahl des konstruktiven Algorithmus von I durch eine „vollreguläre" mittels der Definition (vgl. § 14, **2**, 1. Absatz)

$$(1) \qquad \underline{1VI_1} = \lim\{1VI, 1VII', 1VII'I'', \ldots\}.$$

Dabei halten wir die Verabredung von I, § 1 ein, daß in definierenden Gleichungen (auch schematischer Art) die regulären Zahlenfiguren unterstrichen werden sollen. Die Grundkonzeption des Algorithmus von I bleibt auch für die neuen Verabredungen wirksam, welche durch die Hinzunahme eines neuen Symbols ($\mathcal{V}$) und einer neuen Bezeichnungstechnik (untere Indizes) erforderlich werden. Wir wollen dies an Hand von I, § 1 besprechen. Zunächst geben wir folgende Erklärung, welche die im 1. Absatz von § 1, **1** gegebene mit umfaßt:

Eine Ordnungszahl oder kurz Zahl soll in diesem (5.) Abschnitt eine — im allgemeinen „zweidimensionale" — Figur aus endlich vielen „Einzelzeichen"

$$(2) \qquad 1, +, (), V, \mathcal{V}, I, I', I'', I''', I'''', \ldots$$

sein[5]), welche nach bestimmten Regeln, unter anderem mit Verwendung der Potenz- und Indexschreibweise[6]), aus der Fig. 1 abgeleitet ist. — Der Begriff „Ableitung" hat dabei dieselbe Bedeutung wie in § 1.

Die Bezeichnung der Zahlen $< 1VI_1$ bleibt ungeändert; neue Bezeichnungen treten nur für „neue" Zahlen auf, d. h. für Zahlen $\geq 1VI_1$.

Die Absätze 2 bis 4 von § 1, **1** gelten weiterhin. Die im 4. Absatz gegebene provisorische Erklärung des Operators ist jedoch dahin zu ergänzen, daß die zur Bildung von Operatoren verwendeten Zeichen $I, I', I'', \ldots$ mit (unteren) Indizes versehen sein können, die selbst wieder Zeichenfiguren sind. — Die Unterscheidung von Operatoren 1., 2., 3., ... Stufe bleibt weiterhin ein Instrument des Algorithmus.

Die Indexschreibweise wird in diesem Abschnitt nur im Anschluß an eines der Symbole $I, I', I'', \ldots$ vorgenommen. Die gesamte Zeichenfigur, welche einem dieser Symbole innerhalb einer Zahlenfigur durch Rechts-tief-

[5]) Ausnahmen s. I, Fußnote [6]).

[6]) Potenzierung und Indizierung, d. h. Rechts-hoch- und Rechts-tief-Stellung könnten freilich durch je ein besonderes Zeichen ersetzt werden; dann bliebe die Figur in einer Zeile, wäre aber weniger übersichtlich.

Stellung angeheftet wird, heißt sein *Supponent*; rechts vom Supponenten stehende Zeichen der betreffenden Zahlenfigur gehören dann nicht mehr zu ihm, was unter Umständen mittels einer ( ) zum Ausdruck gebracht werden muß (s. die Klammerregeln in § 13, **6**).

Für die Zahlenfiguren des Algorithmus wird die Links-rechts-Struktur auch weiterhin streng durchgeführt (vgl. **I**, § 1, **2**, letzter Absatz; **I**, § 2, **3**; **II**, § 4, **3**, letzter Absatz); unter anderem schreiben wir niemals zwei Einzelzeichen einer Zahlenfigur in dieselbe Vertikale; man kann demnach die Einzelzeichen einer Zahlenfigur von links nach rechts eindeutig durchnumerieren [wobei „halbe" Klammern „(" und „)" dann als Einzelzeichen zu zählen sind]. Unter einer *Teilfigur* einer Zahlenfigur verstehen wir eine Gruppe ihrer Einzelzeichen, welche von links nach rechts ohne Auslassungen (von Klammern eventuell abgesehen) aufeinander folgen, aber nicht die gesamte Figur erschöpfen. Das erste Einzelzeichen einer (Teilfigur einer) Zahlenfigur bestimmt die *Grundzeile* der Figur. Wird die Figur im Verlauf einer weiteren Konstruktion in eine ( ) eingeschlossen, so werden deren beide Hälften in die Grundzeile der Figur gesetzt. — Analog sprechen wir von einer Teilfigur einer Teilfigur.

2. Im Algorithmus der Zahlen $> 1VI_1$ treten neben die Operatoren noch zwei weitere Arten von Teilfiguren mit selbständiger Bedeutung: *Fazienten* und *Operanten*. Erstere treten nur als Supponenten oder als Teilfiguren von solchen auf; die Operanten sind immer Teilfiguren von Fazienten. Wie bei den Operatoren unterscheiden wir Operanten 1., 2., 3., ... *Stufe*. Die Operanten 1. Stufe werden auf Zahlen, und zwar hier nur auf die Zahl 1, oder auf Fazienten „ausgeübt" und das „Ergebnis" ist stets ein *Fazient*. Der einfachste Operant 1. Stufe ist $\mathcal{V}$. Ein Operant $(n+1)$. Stufe wird nur auf Operanten n. Stufe ausgeübt und das Ergebnis ist wieder ein Operant n. Stufe. Die einfachsten Operanten 2., 3., 4., ... Stufe sind $I, I', I'', \ldots$. Ob ein Symbol $I, I', I'', \ldots$ einen Operator oder einen Operanten bedeutet, geht aus seiner Stellung in der Gesamtfigur hervor. Die I, I', I'', ... können auch als Operantensymbole mit Supponenten (Zahlen oder Fazienten) behaftet werden. — Die Fazienten haben stets einen „Anfang" (§ 15, **1**) $1\mathcal{V}$, die Operanten 1. Stufe einen Anfang $\mathcal{V}$. Die Operanten können noch mit Exponenten versehen sein; diese sind Zahlen oder Fazienten.

Als Variable für Fazienten verwenden wir große griechische Buchstaben, desgleichen für Figuren, von denen es noch dahingestellt bleibt, ob sie Fazienten oder Zahlen sind. Große lateinische Buchstaben (außer $V, \mathcal{V}, I$) verwenden wir wieder als Variable für alle Arten von Zeichenfiguren (Zahlen, Fazienten, Operatoren, Operanten und sonstige Teilfiguren); kleine griechische Buchstaben bedeuten stets Ordnungszahlen, kleine deutsche Buchstaben stets natürliche Zahlen ≥ 1.

Die Unterscheidung von *vollständigen Figuren* und *festen Abkürzungen* sowie die von *regulären Figuren* und *Hilfsfiguren* gehört weiterhin zur Technik des Algorithmus und bezieht sich jetzt außer auf Zahlen und Operatoren

auch auf Fazienten und Operanten. — Bei Beachtung der vorstehenden Bemerkungen bleiben die Ausführungen von § 1, **1** ab 5. Absatz einschließlich sowie die gesamten Ziffern **2**, **3** und **4** des § 1 uneingeschränkt verbindlich (im 1. Absatz von § 1, **2** und im viertletzten Absatz von § 1, **4** ist außer auf § 2 bzw. § 2, **2** noch auf die nachstehenden Ausführungen des gesamten § 14 verwiesen zu denken). — Wir erinnern insbesondere an die Gleichheitsdefinition im letzten Absatz von § 1, **1**. Es ist zuweilen bequem, für die *Identität*, einen Sonderfall unserer Gleichheit, ein eigenes Zeichen zu haben, und zwar schreiben wir F_1 id F_2 bzw. F_1 non id F_2 um auszudrücken, daß die Variablen F_1 und F_2 dieselben bzw. verschiedene Zeichenfiguren bedeuten.

Zu den beiden Konstruktionsprinzipien von § 1, **3** kommt indessen ein drittes hinzu:

III. Konstruktionsprinzip. In einer ersten Hilfsfigur $\lim\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ *besteht die vollständige Zahlenfigur* α_1 *aus der geringsten Anzahl von Einzelzeichen, welche durch die Ableitungsschemata ermöglicht wird.*

Das soll folgendes besagen. Ist neben der Hilfsfigur $\lim\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ auch die von ihr verschiedene Figur $\lim\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\}$ auf Grund der Ableitungsschemata formal möglich und „*konkurrieren*" beide Figuren, d.h. läßt sich zu jedem α_i bzw. β_i ein $\beta_j > \alpha_i$ bzw. $\alpha_j > \beta_i$ angeben, so muß α_1 weniger Einzelzeichen aufweisen als β_1. — Wir werden sehen, daß dieses Prinzip stets funktioniert (§ 14, **2** bis **4**, § 15, **5**).

In **I** war ein solches Prinzip noch nicht notwendig, weil wir verabreden konnten, daß die in einer Zahlenfigur auftretenden Exponenten zuvor schon konstruiert sein sollten (§ 1, **5**). Diese Forderung läßt sich aber für Fazienten (als Exponenten oder Supponenten) schlecht übernehmen. Umgekehrt macht das III. Konstruktionsprinzip im Verein mit den beiden ersten derartige Forderungen überflüssig.

Die Ziffer **5** von § 1 soll auch für den Algorithmus über $1VI_1$ hinaus die Handhabung der Addition von Zahlen und der Ausübung von Operatoren festlegen. Daraus ergibt sich, *daß die Exponenten von Operatoren stets Zahlen sind.* — Die Koeffizienten- und die Exponentenregel von § 1, **5** übernehmen wir also auch für den Algorithmus der Zahlen $> 1VI_1$. Wir bemerken jedoch, daß die in diesen Regeln ausgesprochenen Klammervorschriften nicht mehr ausreichen, um die Mehrdeutigkeiten auszuschalten, welche durch das Auftreten mehrzeiliger Supponenten entstehen können. Dasselbe gilt für die sonstigen im § 1, **5** explizit und implizit zum Ausdruck gebrachten Klammervorschriften. Wir verweisen diesbezüglich auf die Klammerregeln von § 13, **6**, welche unbeschadet noch weiterer einstweilen zu gebender Vorschriften sämtliche Fälle aufzählen, in denen Klammern gesetzt werden.

3. Es wird sich ergeben, daß die transfiniten regulären Zahlenfiguren auch im fortgeführten Algorithmus die Form haben [vgl. **I**, (21)]:

$$\chi_1 q_1 + \cdots + \chi_k q_k + r \quad (\chi_1 > \cdots > \chi_k), \tag{3}$$

wo $q_1, \ldots, q_k$ und r natürliche Zahlen sind, von denen $k = 1$ sein und r (genauer: $+r$) fehlen darf, während die χ_i sog. *Hauptzahlen* (§ 1, **5**, 1. Absatz)

sind, d.h. Zahlenfiguren, welche aus den Zeichen (2) bestehen und V wirklich enthalten, die aber bezüglich der Form (3) „unzerlegbar" sind; eine Hauptzahl weist demnach $+$-Zeichen höchstens in Exponenten oder Supponenten auf. — Die in (3) angeschriebenen $+$-Zeichen befinden sich natürlich in der Grundzeile der gesamten Figur (3), welche zugleich die Grundzeile der einzelnen „Summanden" ist.

Überhaupt besitzt jede transfinite Zahlenfigur aus den Zeichen (2), auch als Hilfsfigur, die Form (3), und sie ist immer regulär, wenn r nicht fehlt oder bei fehlendem r der Koeffizient $q_k > 1$ ist. (3) kann nur dann Hilfsfigur sein, wenn r fehlt und $q_k = 1$ ist, und auch dann nur, wenn entweder χ_k Hilfsfigur ist oder, wenn nicht, $\chi_k = \chi_{k-1}$ ist; im letzteren Fall lautet die reguläre Zahlenfigur zu (3):

$$\chi_1 q_1 + \cdots + \chi_{k-1}(q_{k-1} + 1)$$

[nach dem ersten Konstruktionsprinzip (§ 2, 3) sind $\chi_1, \ldots, \chi_{k-1}$ jedenfalls regulär].

Wir nennen die Ausdrücke $\chi_i q_i$ sowie r die *Summanden* von (3).

Diejenigen *Exponenten* und *Supponenten*, welche keine Zahlen sind, sind *Fazienten* der Form

$$\Delta_1 \xi_1 + \cdots + \Delta_k \xi_k + \eta, \tag{4}$$

wo die Δ_i ebenfalls Fazienten bedeuten; η kann fehlen und k darf $= 1$ sein. Die Ausdrücke $\Delta_i \xi_i$ sowie die Zahl η heißen die *Summanden* von (4); die Zahl ξ_i heißt der *Koeffizient* von Δ_i. Die Δ_i sind hinsichtlich der Form (4) „unzerlegbar" und werden *Hauptfazienten* genannt. — Die in (4) angeschriebenen $+$-Zeichen stehen wieder in der Grundzeile der gesamten Figur (4), welche zugleich die Grundzeile der Δ_i, ξ_i und von η ist.

In den Summanden $\chi_i q_i$ von (3) bzw. $\Delta_i \xi_i$ von (4) heißt χ_i bzw. Δ_i der Multiplikand, q_i bzw. ξ_i der Multiplikator; die Ausdrücke $\chi_i q_i$ und $\Delta_i \xi_i$ heißen Produkte. Im Algorithmus werden nur Produkte aus zwei Faktoren vorstehender Art gebildet. — Für die Produkte, deren Multiplikanden Fazienten sind, gilt folgende

Koeffizientenregel für Fazienten. Die Formel $\Delta\xi$, wo Δ ein Fazient, ist eine Abkürzung für $\Delta(\xi)$, wenn die Variable ξ eine Zahlenfigur bedeutet, die $+$-Zeichen in der Grundzeile enthält. ξ darf auch die Zahl 1 bedeuten, aber diese 1 wird dann nicht hingeschrieben; wir sagen dann, Δ habe den Koeffizienten 1.

Der Fazient (4) befindet sich in Hilfsform nur in folgenden Fällen (sonst ist er reguläre Teilfigur): 1. η ist in Hilfsform. 2. η fehlt und ξ_k ist in Hilfsform. 3. η fehlt zugleich mit ξ_k (d.h. $\xi_k = 1$) und Δ_k ist in Hilfsform. 4. η und ξ_k fehlen und es gilt Δ_k id Δ_{k-1}; dann ist aber

$$\Delta_1 \xi_1 + \cdots + \Delta_{k-1}(\xi_{k-1} + 1)$$

die reguläre Form von (4) (vgl. die Regeln in § 13, 3). — Die Δ_i und ξ_i mit $i < k$ sind immer regulär, desgleichen Δ_k, falls $\xi_k > 1$, und $\Delta_k \xi_k$, falls η nicht

fehlt. — Diese Bemerkungen ergeben sich aus dem I. Konstruktionsprinzip (§ 1, 3) unter Beachtung des Umstandes, daß der Fazient (4) einmal als abschließende Teilfigur eines Anfangs (§ 15, 1) einer Zahlenfigur vorkommt (die ihrerseits regulär oder in Hilfsform sein kann).

§ 13. Neue Ableitungsschemata

1. Zwecks übersichtlicher Darstellung der Ableitungsregeln, die zu denen in § 1, 5 neu hinzukommen, bedienen wir uns für eine Zahlenfigur ζ, die ohne das Zeichen lim gebildet ist, also nur aus den Zeichen (2) besteht, einer schematischen Abkürzung $\zeta = [U]$; darin bedeutet U eine Teilfigur von ζ, welche die Bedingungen erfüllt: 1. U ist keine Zahlenfigur und kommt auch in keiner Teilfigur von ζ vor, die Zahlenfigur ist. 2. U steht am Schluß von ζ, d.h. U enthält das letzte Einzelzeichen von ζ (einschließlich Klammern). — Verschiedene Zahlenfiguren mit demselben Schluß-U kann man, wenn nötig, durch Kennzeichnung der Klammern [ ] unterscheiden, etwa in der Form $[U]$, $[U]^*$, $[U]'$ usw. Das nämliche kann man machen, um dieselbe Zahlenfigur auf verschiedene Weisen abzukürzen, etwa $[U]$ id $[W]^*$ (mit U non id W), oder um überhaupt verschiedene Zahlenfiguren zu unterscheiden, also $[U]$ non id $[W]^*$ (einerlei, ob U und W identisch sind oder nicht). — Wenn wir sagen, daß die Zahlenfigur $\eta = [T]$ aus $\zeta = [U]$ abgeleitet sei: $[U] \to [T]$, so bedeutet dies, daß η aus ζ entsteht, indem die Zeichengruppe U durch die Zeichengruppe T ersetzt wird. Das entsprechende gilt für Definitionen der Form

$$(5) \qquad \text{(a)}\ [U] = \lim_{n} [U_n] \qquad \text{(b)}\ [U] = \lim \{[U_1], [U_2], [U_3], \ldots\},$$

welche in dem Sinne $[U_n] \to [U_{n+1}]$, $[U_n] \to [U]$ gemeint sind. (Die Indizes $1, 2, \ldots, n$ dienen hier lediglich zur Unterscheidung und brauchen keine Supponenten im Sinn des Algorithmus zu sein.) — Die $[U_i]$ in (5) sind regulär, $[U]$ ist Hilfsfigur oder regulär (vgl. § 1, 3, Limesbildung).

Analog verwenden wir später (in § 15) die Abkürzung $\zeta = \langle U \rangle$, wo U entweder ζ selbst oder eine Teilfigur von ζ bedeutet, die das letzte Einzelzeichen von ζ enthält (von Klammern eventuell abgesehen).

2. Nun stellen wir die Regeln für das Anbringen von Supponenten zusammen, wobei $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}$ für I', I'', I''' stehen soll; ferner schreiben wir der Kürze halber $I_1^{(n)}, I_\Delta^{(n)}$ statt $I^{(n)}{}_1, I^{(n)}{}_\Delta$ usw. (eine Vereinfachung, welche sich bei Figuren wie $I^{(1000)}_{1V}{}_{1V}$ verbietet).

(Sup, a) $\quad [I_1] = \lim \{[I], [I\,I'], [I\,I'\,I''], \ldots\}$

(Sup$^{(n)}$, a) $\quad [I_1^{(n)}] = \lim \{[I^{(n)}], [I^{(n)} I^{(n+1)}], [I^{(n)} I^{(n+1)} I^{(n+2)}], \ldots\}$

(Sup, b) $\quad [I_{\Delta+1}] = \lim \{[I_\Delta], [I_\Delta\, I'_\Delta], [I_\Delta\, I'_\Delta\, I''_\Delta], \ldots\}$

(Sup$^{(n)}$, b) $\quad [I^{(n)}_{\Delta+1}] = \lim \{[I^{(n)}_\Delta], [I^{(n)}_\Delta I^{(n+1)}_\Delta], [I^{(n)}_\Delta I^{(n+1)}_\Delta I^{(n+2)}_\Delta], \ldots\}$

$$\text{(Sup, c)} \qquad [I_\lambda] = \lim_p [I_{\alpha_p}] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$\text{(Sup}^{(n)}\text{, c)} \qquad [I^{(n)}_\lambda] = \lim_p [I^{(n)}_{\alpha_p}] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$\text{(Sup, d)} \qquad [I_{1\mathcal{V}}] = \lim \{[I_1], [I_{[I_1]}], [I_{[I_{[I_1]}]}], \ldots\}$$

$$\text{(Sup}^{(n)}\text{, d)} \qquad [I^{(n)}_{1\mathcal{V}}] = \lim \{[I^{(n)}_1], [I^{(n)}_{[I^{(n)}_1]}], [I^{(n)}_{[I^{(n)}_{[I^{(n)}_1]}]}], \ldots\}.$$

In den Formeln (b) ist Δ eine Zahl oder ein Fazient. Betreffend (Sup, c) soll $[I_{\lambda_i}]$ $(i \geq 2)$ die i-te Hilfsfigur der zu $[I_\lambda]$ gleichen regulären Figur sein, wenn λ_i die i-te Hilfsfigur von λ ist; entsprechend hinsichtlich (Sup$^{(n)}$, c). — I_Γ bzw. $I^{(n)}_\Gamma$, Γ Zahl oder Fazient, bedeutet innerhalb einer Zahlenfigur stets einen Operator oder Operanten 2. bzw. $(n+2)$. Stufe. — Die angeschriebenen I-Symbole in einer der vorstehenden Sup-Formeln sind entweder sämtlich Operatoren oder sämtlich Operanten, was im konkreten Falle eindeutig auf Grund ihrer Stellung in der Gesamtfigur entschieden wird.

3. In den jetzt folgenden Regeln wird die Konstruktion der Fazienten festgelegt; Δ bedeutet demgemäß überall einen Fazienten.

$$\text{(Faz, a)} \qquad [\Delta + \lambda] = \lim_p [\Delta + \alpha_p] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$\text{(Faz, b)} \qquad [\Delta(\xi + 1)] = [\Delta\xi + \Delta]$$

$$\text{(Faz, c)} \qquad [\Delta\lambda] = \lim_p [\Delta\alpha_p] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$\text{(Faz, d)} \qquad [\Delta + 1\mathcal{V}] = \lim \{[\Delta + 1], [\Delta + [\Delta + 1]], [\Delta + [\Delta + [\Delta + 1]]], \ldots\}$$

$$\text{(Faz, e)} \qquad [\Delta\mathcal{V}] = \lim \{[\Delta], [\Delta[\Delta]], [\Delta[\Delta[\Delta]]], \ldots\}.$$

In den vorstehenden Faz-Formeln bedeutet $\Delta\lambda$, $\Delta\alpha_p$, $\Delta[\Delta]$ usw. ein Produkt aus dem Fazienten Δ und den Zahlen λ, α_p, $[\Delta]$ usw. — Ist λ_i $(i \geq 2)$ die i-te Hilfsfigur für λ, so soll $[\Delta + \lambda_i]$ bzw. $[\Delta\lambda_i]$ die i-te Hilfsfigur der zu $[\Delta + \lambda]$ bzw. $[\Delta\lambda]$ gleichen regulären Figur sein.

4. Nun geben wir die Regeln für das Anbringen von Exponenten bei Operanten.

$$\text{(Exp, a)} \qquad [T\,U^{\Delta+1}] = [(T\,U^\Delta)\,U]$$

$$\text{(Exp, b)} \qquad [U^\lambda] = \lim_p [U^{\alpha_p}] \quad (\underline{\lambda} = \lim_p \alpha_p)$$

$$\text{(Exp, c)} \qquad [U^{1\mathcal{V}}] = \lim \{[U], [U^{[U]}], [U^{[U^{[U]}]}], \ldots\}.$$

In vorstehenden Exp-Formeln ist U überall ein Operant. In (Exp, a) ist Δ eine Zahl oder ein Fazient; U ist entweder ein Operant 1. oder $(n+1)$. Stufe; im ersten Fall ist T die Zahl 1 oder ein Fazient, im zweiten Fall ein Operant n. Stufe; ferner sind $T\,U^\Delta$, $T\,U^{\Delta+1}$ und $(T\,U^\Delta)\,U$ im ersten Fall Fazienten, im zweiten Fall Operanten n. Stufe. — $[U^{\lambda_i}]$ $(i \geq 2)$ ist die i-te Hilfsfigur der zu $[U^\lambda]$ gleichen regulären Zahlenfigur, wenn λ_i die i-te Hilfsfigur für λ ist. — Als Auswirkung der beiden Konstruktionsprinzipien von

§ 1, 3 ergibt sich, daß U^{Δ} nie ein Operant ist, wenn U einer ist und Δ ein Fazient oder eine Zahl >1 ist. — Entsprechend der Exponentenregel für Operatoren (§ 1, 5) setzen wir fest:

Exponentenregel für Operanten. Ist X ein Operant, so darf in der Formel X^{Δ} die Variable Δ (der „Exponent" von X) auch durch 1 ersetzt werden, aber diese 1 wird nicht hingeschrieben; wir sagen dann, X habe den Exponenten 1. — Enthält der Operant X in seiner Grundzeile mindestens zwei Zeichen $\mathcal{V}, I, I', I'', \ldots$, so ist X^{Δ} eine Abkürzung für $(X)^{\Delta}$, und bei Ersetzung von Δ durch 1 wird außer dieser 1 auch die ( ) um X weggelassen.

5. Die Ausübung des „iterierenden" Operanten $\mathcal{V}$ auf die Zahl 1 oder einen geeigneten Fazienten Δ wird durch die Schemata (Sup, d), (Sup$^{(n)}$, d), (Faz, d), (Faz, e), (Exp, c) geregelt. Die Anwendung der gleichfalls „iterierenden" Operanten $I, I', I'', \ldots$ findet gemäß folgenden Regeln statt:

$$\text{(It)} \qquad [\Delta W I] = \lim\{[\Delta W], [\Delta W^{\Delta W}], [\Delta W^{\Delta W^{\Delta W}}], \ldots\}$$

$$\text{(It')} \quad [\Delta W X I'] = \lim\{[\Delta W X], [\Delta W X^{\Delta W X}], [\Delta W X^{\Delta W X^{\Delta W X}}], \ldots\}$$

$$\text{(It}^{(n)}\text{)} \begin{cases} [\Delta W X \ldots X_{n-1} I^{(n)}] = \lim\{[\Delta W X \ldots X_{n-1}], [\Delta W X \ldots X_{n-1}^{\Delta W X \ldots X_{n-1}}], \\ [\Delta W X \ldots X_{n-1}^{\Delta W X \ldots X_{n-1}^{\Delta W X \ldots X_{n-1}}}], \ldots\}. \end{cases}$$

Um sogleich (It$^{(n)}$) zu erläutern, bemerken wir, daß $W, X, X_1, \ldots, X_{n-1}$ ($n \geq 2$) Operanten 1., 2., ..., $(n+1)$. Stufe sind; der Operant $(n+2)$. Stufe $I^{(n)}$ ist auf X_{n-1} ausgeübt; $X_{n-1} I^{(n)}$ ist ein Operant $(n+1)$. Stufe, ausgeübt auf $X_{n-2}, \ldots, X \ldots X_{n-1} I^{(n)}$ ein Operant 2. Stufe, ausgeübt auf $W, W X \ldots X_{n-1} I^{(n)}$ ein Operant 1. Stufe, ausgeübt auf Δ, und Δ ist entweder die Zahl 1 oder ein Fazient. Die in [ ] befindlichen Ausdrücke in (It$^{(n)}$) sind Fazienten. Die Rechts-hoch-Stellungen beziehen sich stets auf X_{n-1}. — Entsprechend sind (It) und (It') zu interpretieren.

Allgemein bemerken wir: Ist U auf T ausgeübt, so daß die Figur TU entsteht [also T eine Zahl oder ein Fazient bzw. ein Operator oder Operant n. Stufe, U ein Operator oder Operant 1. bzw. $(n+1)$. Stufe], so ist die Grundzeile von TU zugleich die von T und U. — Wird ein Operator oder Operant U mit einem Exponenten Δ versehen, so ist die Grundzeile von U^{Δ} die von U, während die Grundzeile von Δ in der Figur U^{Δ} die zur Grundzeile von U nächsthöhere Zeile ist.

6. Nun stellen wir die Vorschriften zusammen, nach denen die Klammern angewendet werden sollen. Um sie leichter formulieren zu können, sagen wir von einer Teilfigur T einer Zahlenfigur (oder auch von einer Zahlenfigur T selbst), daß sie sich *überschneide*, wenn sie einen (oder mehrere) Supponenten enthält, von denen Einzelzeichen in der Grundzeile von T stehen.

Klammerregeln. Eine Teilfigur T einer aus den Zeichen (2) bestehenden Zahlenfigur wird in ( ) eingeschlossen in folgenden Fällen:

1. T ist Multiplikator mit wenigstens einem +-Zeichen in seiner Grundzeile.

2. T ist ein Multiplikand, der einen oder mehrere Supponenten enthält oder dessen letztes Einzelzeichen ein Symbol $I, I', I'', \ldots$ ist, das in der nächsthöheren Zeile zur Grundzeile von T steht.

3. T ist ein sich überschneidender Summand einer Summe (3) oder (4), auf den noch ein weiterer Summand folgt.

4. T ist eine transfinite Zahl oder ein Fazient und wird einem Operator bzw. Operanten 1. Stufe unterworfen.

5. T ist ein sich überschneidender Operator oder Operant der Form I_A oder $I_A^{(n)}$ oder ein Operator bzw. Operant mit wenigstens zwei Zeichen V bzw. $\mathcal{V}, I, I', I'', \ldots$ in seiner Grundzeile und T wird mit einem Exponenten versehen oder einem Operator bzw. Operanten der nächsthöheren Stufe unterworfen.

Beispiele zu diesen Vorschriften sind in § 15, **4** gegeben.

§14. Fortsetzung des Algorithmus bis zur Grenzzahl Ξ

1. Nun muß gezeigt werden, daß die Anwendung der in § 1, **3**, **5** und § 13, **2** bis **5** aufgestellten Ableitungsregeln, wenn sie, mit der Zahlenfigur 1 beginnend, in Befolgung der drei Konstruktionsprinzipien von § 1, **3** und § 12, **2** vorgenommen wird, einen zwangsläufigen Prozeß der Konstruktion von Zahlenfiguren bewirkt, mit dessen Darlegung zugleich der Nachweis verbunden ist, daß im Bereich der so entwickelten (voll)regulären Zahlenfiguren die transfinite Induktion gilt (vgl. § 1, **4**). Im § 2, **1** und **2** ist dies für die Zahlenfiguren $< 1VI_1$ geleistet und es kommt darauf an, das entsprechende für den Abschnitt von $1VI_1$ bis Ξ zu tun. Dabei ist das Augenmerk wieder darauf zu richten, daß die Limesdefinitionen ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{O}_n$), ($\mathfrak{Z}$), ($\mathfrak{Z}^{(n)}$), (Sup), (Sup$^{(n)}$), (Faz), (Exp), (It), (It$^{(n)}$), sofern sie im Zuge des ab 1 entwickelten Algorithmus erfolgen, zugleich eine Ableitung der definierten Zahlen im Sinne von § 1, **2**, **4** darstellen. — In § 2, **1** wurden der Durchführung dieses Programms im damaligen Rahmen (§ 2, **2**) noch einige Erläuterungen vorausgeschickt. Die dortigen Bemerkungen über die additive und die Operatorkonstruktion können auch für die Fortsetzung des Algorithmus über $1VI_1$ hinaus als maßgebend angesehen werden. Die Handhabung der neuen Regeln von (Sup) bis (It), d.h. im wesentlichen das Hantieren mit Fazienten und Operanten, läßt sich jedoch nicht ebenso in allgemeiner Weise charakterisieren, ohne daß man auf die konkrete Konstruktion eingeht. Wir beginnen daher mit dieser sogleich und weisen auf die sich dabei ergebenden Methoden von Fall zu Fall hin.

2. Der erste Schritt über den in **I** entwickelten Algorithmus hinaus ist die Definition seiner Grenzzahl als algorithmische Zahlenfigur, und zwar als Limes der Folge $1VI, 1VII', 1VII'I'', \ldots$ oder einer mit ihr konkurrierenden. Hierfür bieten sich rein formal die Schemata (Sup, a), (Sup$^{(n)}$, a) ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

an; von diesen *muß* aber gemäß dem III. Konstruktionsprinzip das erste gewählt werden. Damit kommt die Gl. (1) von § 12 nach Schema (Sup, a) zustande und die Figuren $1VII_1'$, $1VII'I_1''$ usw. scheiden aus. — Von $1VI_1$ aus beginnen wir die Konstruktion von vorne; es ist klar, daß der Weg, der von 1 zu $1VI_1$ geführt hat, völlig analog von $1VI_1$ über die Zahlen

$$1VI_1+1,\ldots,1VI_1+1V,\ldots,1VI_1+1VI,\ldots,1VI_1+1VII',\ldots$$

$$\underline{1VI_1(1+1)}=\underline{1VI_12}=1VI_1+1VI_1$$
$$=\lim\{1VI_1+1VI,1VI_1+1VII',1VI_1+1VII'I'',\ldots\}$$

(Schema ($\mathfrak{A}$, 1) und (Sup, a)),

$$1VI_13,\ldots,\underline{(1VI_1)V}=\lim_{n}(1VI_1)n \text{ (Schema } (\mathfrak{B})),\ldots,(1VI_1)VI,(1VI_1)VII',\ldots,$$

$$(6)\qquad \begin{cases}\underline{1(VI_1)^{1+1}}=\underline{1(VI_1)^2}=(1VI_1)VI_1\\ \quad=\lim\{(1VI_1)VI,(1VI_1)VII',(1VI_1)VII'I'',\ldots\}\end{cases}$$

(Schema ($\mathfrak{C}_1$, a) und (Sup, a) mit $[I]=(1VI_1)VI$), $1(VI_1)^3,\ldots,1(VI_1)I$, $1(VI_1)II',\ldots$ zu der Zahl

$$(7)\qquad \begin{cases}\underline{1VI_1{}^{1+1}}=\underline{1VI_1{}^2}=1(VI_1)I_1\\ \quad=\lim\{1(VI_1)I,1(VI_1)II',1(VI_1)II'I'',\ldots\}\end{cases}$$

führt, indem wir VI_1 als Operator 1. Stufe erkennen und behandeln. Dabei erscheint laut (7) I_1 als Operator 2. Stufe, d.h. man kann zu $1VI_1{}^3,\ldots,$ $1VI_1{}^{1VI_1},\ldots$ fortschreiten und gemäß ($\mathfrak{F}'$) (§ 1, 5) die Zahl $1VI_1I'$ bilden, entsprechend $1VI_1I'I''$ usf. Dies führt zur Anwendung von (Sup', a) mit $[I']=1VI_1I'$ und liefert die Zahl

$$(8)\qquad \underline{1VI_1I_1'}=\lim\{1VI_1I',1VI_1I'I'',1VI_1I'I''I''',\ldots\}.$$

Nun ist I_1' ein Operator 3. Stufe, den man dem Operator I'' unterwerfen kann, so daß $1VI_1I_1'I''$ entsteht, darauf $1VI_1I_1'I''I'''$, ...; (Sup'', a) liefert dann

$$(8')\qquad \underline{1VI_1I_1'I_1''}=\lim\{1VI_1I_1'I'',1VI_1I_1'I''I''',1VI_1I_1'I''I'''I'''',\ldots\}.$$

Entsprechend bekommt man $1VI_1I_1'I_1''I_1'''$ usf. Gemäß (Sup, b) mit $\Delta=1$ und $[I_\Delta]=1VI_1$ steigt man auf zu

$$(9)\qquad \underline{1VI_{1+1}}=\underline{1VI_2}=\lim\{1VI_1,1VI_1I_1',1VI_1I_1'I_1'',\ldots\}.$$

So wird man darauf geführt, im Supponenten von I (ebenso von I', I'', ...) weiter zu konstruieren, indem man unter anderem gemäß (Sup, c), (Sup', c),... mittels der Definition $1V=\lim_{n} n$ [§ 1, (6)] die Limites

$$\underline{1VI_{1V}}=\lim_{n}1VI_n,\ \underline{1VI_{1V}I'_{1V}}=\lim_{n}1VI_{1V}I'_n,\ldots$$

bildet, dann gemäß (Sup, b) $1VI_{1V+1}$ erklärt usf. und überhaupt jede bereits erreichte Zahl als Supponent benützt. Man gelangt so auf Grund des III. Konstruktionsprinzips (§ 12, 2) zu dem Limes

$$(10)\qquad \underline{1VI_{1\mathcal{V}}} = \lim\{1VI_1, 1VI_{1VI_1}, 1VI_{1VI_{1VI_1}}, \ldots\},$$

bei dem erstmalig der Operant $\mathcal{V}$, und zwar gemäß (Sup, d), verwendet wird sowie zum erstenmal ein Fazient: $1\mathcal{V}$ (zugleich der einfachste Fazient) auftritt. [Rein formal könnten nämlich, wenn α die linke Seite von (10) bezeichnet, gemäß (Sup, c) und (Sup, d) auch die Figuren $\alpha_1 = 1VI_\alpha$, $\alpha_2 = 1VI_{\alpha_1}$ usw. gebildet werden.] — Entsprechend ergibt sich gemäß (Sup', d), wenn man $I_{1\mathcal{V}}$ als Operator 2. Stufe betrachtet:

$$(11)\qquad \begin{cases} \underline{1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_{1\mathcal{V}}}} = \lim\{1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_1},\ 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_{1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_1}}}, \\ \qquad\qquad 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_{1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_{1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_1}}}}}, \ldots\}, \end{cases}$$

analog $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_{1\mathcal{V}}{}^{I''_{1\mathcal{V}}}}$ usw. Dann läßt sich gemäß (Sup, b) mit $\Delta = 1\mathcal{V}$ die Zahl

$$(12)\qquad \underline{1VI_{1\mathcal{V}+1}} = \lim\{1VI_{1\mathcal{V}}, 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_{1\mathcal{V}}}, 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{I'_{1\mathcal{V}}{}^{I''_{1\mathcal{V}}}}, \ldots\}$$

bilden, gemäß (Sup', b) die Zahl $1VI_{1\mathcal{V}+1}{}^{I'_{1\mathcal{V}+1}}$ usf.

3. Die letzte Entwicklung leitet zur Konstruktion im Supponenten gemäß den Faz-Regeln über. Unter anderem ergibt sich nach (Faz, a):

$$(13)\qquad \underline{1VI_{1\mathcal{V}+1V}} = \lim_n 1VI_{1\mathcal{V}+n},$$

ebenso $1VI_{1\mathcal{V}+1V}{}^{I'_{1\mathcal{V}+1V}}$ usw., desgleichen $1VI_{1\mathcal{V}+1VI}$ usf. Es ist z. B.

$$(14)\qquad \begin{cases} \underline{1VI_{1\mathcal{V}+1VII'}} = \lim\{1VI_{1\mathcal{V}+1VI}, 1VI_{1\mathcal{V}+1VI}{}^{1VI}, \\ \qquad\qquad 1VI_{1\mathcal{V}+1VI}{}^{1VI^{1VI}}, \ldots\}. \end{cases}$$

Gemäß (Faz, d) und (Faz, b) steigt man auf zu

$$(15)\qquad \begin{cases} \underline{1VI_{1\mathcal{V}(1+1)}} = \underline{1VI_{1\mathcal{V}2}} = 1VI_{1\mathcal{V}+1\mathcal{V}} = \lim\{1VI_{1\mathcal{V}+1}, \\ \qquad 1VI_{1\mathcal{V}+1VI_{1\mathcal{V}+1}}, 1VI_{1\mathcal{V}+1VI_{1\mathcal{V}+1VI_{1\mathcal{V}+1}}}, \ldots\} \end{cases}$$

[die gemäß (Faz, a) und (Faz, d) formal möglichen Gebilde $\alpha_1 = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}+\alpha}$ $\alpha_2 = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}+\alpha_1}$ usw. mit $\alpha = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}2}$ scheiden auf Grund des III. Konstruktionsprinzips aus], entsprechend zu ${}_1VI_{{}_1\mathcal{V}2}{}'_{{}_1\mathcal{V}2}$ usw.

Nun kann man $\underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}3}} = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}2+{}_1\mathcal{V}}$ bilden usw. und gemäß (Faz, c) mit $\Delta = 1\mathcal{V}$ den Limes

$$\underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}{}_1V}} = \lim_n {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}n} \tag{16}$$

definieren. Darauf folgt $\underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}(1V+1)}} = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}1V+{}_1\mathcal{V}}$ usw. Gemäß (Faz, e) mit $\Delta = 1\mathcal{V}$ und (Exp, a) mit $T = 1\mathcal{V}$, $U^\Delta = \mathcal{V}(\Delta = 1)$ ergibt sich der Limes

$$\begin{cases} \underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^{1+1}}} = \underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^2}} = {}_1VI_{(1\mathcal{V})\mathcal{V}} = \lim\{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}, \\ {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}}, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}}}}, \ldots\}. \end{cases} \tag{17}$$

[Nach dem III. Konstruktionsprinzip sind die Figuren $\alpha_1 = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}\alpha}$, $\alpha_2 = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}\alpha_1}$ usw. mit $\alpha = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^2}$, obwohl sie formal richtig gemäß (Faz, c) und (Faz, e) gebildet sind, unzulässig.]

Nun bildet man

${}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^2+1}, \ldots, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^2+1\mathcal{V}}, \ldots, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^2 2}, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^2 2+1\mathcal{V}}, \ldots, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^3}$, analog ${}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^3}{}'_{{}_1\mathcal{V}^3}$ usw., dann ${}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^3+{}_1\mathcal{V}^2}, \ldots, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^3 2}, \ldots$, ${}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^3{}_1V}, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^3{}_1V}{}'_{{}_1\mathcal{V}^3{}_1V}, \ldots$ und schließlich nach (Exp, b) die Limites

$$\underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V} = \lim_n {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}^n}, \tag{18}$$

$$\underline{{}_1V({}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V)\,{}'_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V} = \lim_n {}_1V({}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V)\,{}'_{{}_1\mathcal{V}^n} \tag{18'}$$

usf. Sodann kommt gemäß (Exp, a) und (Faz, e):

$$\begin{cases} \underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V+1} = {}_1VI_{({}_1\mathcal{V}}{}_1V)\mathcal{V} = \lim\{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V, \\ {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}}{}_1V}, \ldots\}. \end{cases} \tag{19}$$

Damit ist die Konstruktion im Exponenten von $\mathcal{V}$ eingeleitet, die fortzusetzen ist und gemäß dem III. Konstruktionsprinzip nach (Exp, c) mit dem Limes

$$(20)\quad \underline{1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}}} = \lim\{1VI_{1\mathcal{V}},\ 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1VI_{1\mathcal{V}}},\ 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1VI_{1\mathcal{V}}}},\ldots\}$$

aus dem Stadium der Zahlen- in das der Fazientenexponenten von $\mathcal{V}$ übergeht. Analog ergibt sich $1V(I_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}})I'_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}}$ usf.

Nun bildet man $\underline{1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}+1}} = 1VI_{(1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}}{}_{)\mathcal{V}},\ldots,\ 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}+1V},\ldots,$ d.h. man macht im Exponenten von $\mathcal{V}$ die Fazientenkonstruktion; sie führt nach (Exp, c) (mit $U=\mathcal{V}$ und $[U]=1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}}$) zu $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}}}$. Setzt man $\Delta=1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}}$, so fährt man fort mit $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{\Delta+1},\ldots,\ 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{\Delta 2},\ldots,$ $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{\Delta\mathcal{V}} = \underline{1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}+1}}},\ldots$ und gelangt, wenn $\Delta_1=1\mathcal{V}^{\Delta}$ gesetzt wird, zu $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{\Delta_1}$. Analog ergibt sich $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{\Delta_2}$ mit $\Delta_2=1\mathcal{V}^{\Delta_1}$ usf.

4. Der Abschluß der letzten Entwicklung wird durch die erstmalige Anwendung von (It) vollzogen, bei der zum erstenmal das Symbol I als Operant fungiert; auf Grund des III. Konstruktionsprinzips kommt der Limes

$$(21)\quad \underline{1VI_{1\mathcal{V}I}} = \lim\{1VI_{1\mathcal{V}},\ 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}},\ 1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}}},\ldots\},$$

wobei in (It) der Ausdruck ΔW mit $1\mathcal{V}$ und $[\Delta W]$ mit $1VI_{1\mathcal{V}}$ identifiziert wird. [Rein formal könnten gemäß (It) auch die Figuren $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}I}$, $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}^{1\mathcal{V}I}}$ usw. gebildet werden.]

Analog stellt man $1VI_{1\mathcal{V}I}{}^{I'_{1\mathcal{V}I}}$ ner usw. Die Fazientenkonstruktion im Supponenten beginnt wieder von vorne und liefert $1VI_{1\mathcal{V}I+1},\ldots,$ $1VI_{1\mathcal{V}I2},\ldots,\ 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}},\ldots,\ 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}{}^{1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}},\ldots,$ dann gemäß (Exp, c) mit $U=\mathcal{V}$, $[U]=1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}$ den Limes

$$(22)\quad \begin{cases} \underline{1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}}} = \lim\{1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}},\ 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}{}^{1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}}, \\ \qquad 1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}{}^{1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}{}^{1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}}},\ldots\}, \end{cases}$$

hierauf mittels der Anwendung von (It) im Exponenten von $\mathcal{V}$ die Zahl ${}_{1}VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}{}^{1}\mathcal{V}I$, womit der Weg zur Bildung des Limes

$$(23)\quad \begin{cases} \underline{{}_{1}VI_{1(\mathcal{V}I)^{1+1}}} = \underline{{}_{1}VI_{1(\mathcal{V}I)^{2}}} = {}_{1}VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}I} \\ \qquad = \lim\{{}_{1}VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}},\ {}_{1}VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}{}^{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, \\ \qquad\qquad {}_{1}VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}{}^{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}{}^{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}, \ldots\} \end{cases}$$

gemäß (It) und (Exp, a) beschritten wurde. Entsprechend ergibt sich ${}_{1}VI_{1(\mathcal{V}I)^{3}}, \ldots, {}_{1}VI_{1(\mathcal{V}I)}{}^{1}VI_{1\mathcal{V}I}, \ldots, {}_{1}VI_{1(\mathcal{V}I)}{}^{1}\mathcal{V}, \ldots, {}_{1}VI_{1(\mathcal{V}I)}{}^{1}\mathcal{V}I, \ldots$ und abermals nach (It):

$$(24)\quad \begin{cases} \underline{{}_{1}VI_{1\mathcal{V}I^{1+1}}} = \underline{{}_{1}VI_{1\mathcal{V}I^{2}}} = {}_{1}VI_{1(\mathcal{V}I)I} \\ \qquad = \lim\{{}_{1}VI_{1\mathcal{V}I},\ {}_{1}VI_{1(\mathcal{V}I)}{}^{1}\mathcal{V}I,\ {}_{1}VI_{1(\mathcal{V}I)}{}^{1(\mathcal{V}I)}{}^{1\mathcal{V}I}, \ldots\}. \end{cases}$$

Dabei ist $\mathcal{V}I$ als neuer Operant 1. Stufe behandelt worden. Behandelt man $\mathcal{V}I^{2}$ als solchen, so kommt analog zu (24) ${}_{1}VI_{1\mathcal{V}I^{3}}$ usw., d.h. man gelangt zur Konstruktion im Exponenten des Operanten I. Diese führt zu den Zahlen ${}_{1}VI_{1\mathcal{V}I}{}^{1}\mathcal{V}, \ldots, {}_{1}VI_{1\mathcal{V}I}{}^{1}\mathcal{V}I$ usw. und wird „abgeschlossen" gemäß (It') durch

$$(25)\quad \underline{{}_{1}VI_{1\mathcal{V}II'}} = \lim\{{}_{1}VI_{1\mathcal{V}I},\ {}_{1}VI_{1\mathcal{V}I}{}^{1\mathcal{V}I},\ {}_{1}VI_{1\mathcal{V}I}{}^{1\mathcal{V}I}{}^{1\mathcal{V}I}, \ldots\},$$

wobei I' zum erstenmal als Operant betätigt wird. Nun steigt man zu ${}_{1}VI_{1\mathcal{V}II'I''}$ auf gemäß (It'') usw. und gelangt nach (Sup, a) mit $[I] = {}_{1}VI_{1\mathcal{V}I}$ zu dem Limes

$$(26)\quad \underline{{}_{1}VI_{1\mathcal{V}I_{1}}} = \lim\{{}_{1}VI_{1\mathcal{V}I},\ {}_{1}VI_{1\mathcal{V}II'},\ {}_{1}VI_{1\mathcal{V}II'I''}, \ldots\}.$$

5. Mit der Zahl (26) ist diejenige Etappe in der Fazientenkonstruktion des Supponenten erreicht, bei der erstmalig ein mit Supponent versehener Operant auftritt: I_1. — Eine analoge Konstruktion wie die gesamte seitherige führt zu ${}_{1}VI_{1\mathcal{V}I_{1}I'}{}_{1}\mathcal{V}I_{1}$, dann zu ${}_{1}VI_{1\mathcal{V}I_{1}I'}{}_{1}\mathcal{V}I_{1}{}^{I''}{}_{1}\mathcal{V}I_{1}$ usw. [gemäß (Sup', a), (Sup'', a) usw.]; nach (Sup, b) wird damit die Definition von

$$(27)\quad \begin{cases} \underline{{}_{1}VI_{1\mathcal{V}I_{1}+1}} = \lim\{{}_{1}VI_{1\mathcal{V}I_{1}},\ {}_{1}VI_{1\mathcal{V}I_{1}}{}^{I'}{}_{1}\mathcal{V}I_{1}, \\ \qquad\qquad {}_{1}VI_{1\mathcal{V}I_{1}}{}^{I'}{}_{1}\mathcal{V}I_{1}{}^{I''}{}_{1}\mathcal{V}I_{1}, \ldots\} \end{cases}$$

ermöglicht (mit $\Delta = {}_1\mathcal{V}I_1$ und $[I_\Delta] = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1}$), mit welcher die Konstruktion im Supponenten von vorne beginnt. Indem wir sie weiter verfolgen, bekommen wir die Zahlen

$$
\begin{gathered}
{}_1VI_{{}_1(\mathcal{V}I_1)\mathcal{V}}, \; {}_1VI_{{}_1(\mathcal{V}I_1)\mathcal{V}I}, \; {}_1VI_{{}_1(\mathcal{V}I_1)\mathcal{V}II'}, \ldots, \\
{}_1VI_{{}_1(\mathcal{V}I_1)^2}, \ldots, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1^2}, \ldots, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1I'}, \; {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1I'I''}, \ldots,
\end{gathered}
$$

und gemäß (Sup', a) den Limes

$$
(28) \qquad \underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1I_1'}} = \lim \{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1I'}, \; {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1I'I''}, \; {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1I'I''I'''}, \ldots\}.
$$

Analog kommt ${}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1I_1'I_1''}$ usw. Wir können dann (Sup, b) mit $\Delta = 1$, $[I_\Delta] = {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1}$ anwenden und gelangen zu

$$
(29) \qquad \begin{cases} \underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{1+1}}} = \underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_2}} \\ \qquad\qquad = \lim \{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1}, \; {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1I_1'}, \; {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_1I_1'I_1''}, \ldots\}. \end{cases}
$$

Entsprechend ergibt sich ${}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_3}$ usf., d.h. wir treten in die Supponentenkonstruktion bezüglich der *Operanten* $I, I', I'', \ldots$ ein. Diese bringt nunmehr die Zahlenfiguren

$$
\begin{gathered}
{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}}, \; {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}}, \ldots, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}}, \\
{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}}, \\
{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}{}^{I''}{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}}, \ldots, \\
{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}}{}^{I'}{}_1\mathcal{V}{}^{I''}{}_1\mathcal{V}}, \ldots, {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}+1}}, \ldots, \\
{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}I}}, \; {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}II'}}, \ldots
\end{gathered}
$$

hervor. — Gemäß (Sup, a) erreicht man den Limes

$$
(30) \qquad \begin{cases} \underline{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}I_1}}} = \lim \{{}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}I}}, \; {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}II'}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad {}_1VI_{{}_1\mathcal{V}I_{{}_1\mathcal{V}II'I''}}, \ldots\}; \end{cases}
$$

mit ihm wiederholt sich die Supponentenkonstruktion bezüglich der Operanten $I, I', I'', \ldots$ eine Stufe tiefer. Dieses „Tiefersteigen" geht unbegrenzt weiter.

Als Grenzzahl des Algorithmus, die wir mit den bisherigen Regeln nicht mehr als reguläre Zahlenfigur definieren können, erscheint ein Limes

$$(31) \qquad \Xi = \lim\{1VI_{1\mathcal{V}I_1},\ 1VI_{1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}I_1}},\ 1VI_{1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}I_1}}}, \ldots\}.$$

§15. Ergänzende Bemerkungen zum Algorithmus der Zahlen $< \Xi$

1. Die Ausführungen dieses Paragraphen sind eine sinngemäße Übertragung der Bemerkungen von § 2, **3**, welche sich auf den Algorithmus bis zu $1VI_1$ hin bezogen und die m. m. durchaus auch für den Algorithmus bis zu Ξ hin zutreffen. Zunächst übernehmen wir den Begriff eines *Anfangs* einer Zahlenfigur wörtlich so, wie er im 1. Absatz von § 2, **3** erklärt wurde, wobei wir jetzt unter einem „Schreibakt" das Hinschreiben eines Einzelzeichens (2) (§ 12) verstehen. Diese Erklärung ist für alle vollständigen, allein aus den Zeichen (2), d.h. ohne das Zeichen lim, gebildeten Zahlenfiguren sinnvoll, ob sie nun regulär sind oder Hilfsfiguren (vgl. § 2, **3**, 7. Absatz). — Wenn man die Reihe der Anfänge einer Zahlenfigur aufschreibt, entstehen zugleich die Anfänge ihrer einzelnen Teilfiguren, wie Exponenten, Supponenten, Koeffizienten, Operatoren, Operanten und Fazienten. — Unter dem *letzten Anfang* einer Figur verstehen wir diese selbst; ihre übrigen Anfänge nennen wir *echt*. *Echte Anfänge sind stets vollregulär*. — Zur Erläuterung vorstehender Bemerkungen diene folgendes

Beispiel: $1,\ 1V,\ 1VI,\ 1VI_1,\ 1VI_{1\mathcal{V}},\ 1VI_{1\mathcal{V}I},\ 1VI_{1\mathcal{V}I_1},\ 1VI_{1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}}}$,

$1VI_{(1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}})1V},\ 1VI_{(1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}})1V^{1V}},\ 1(VI_{(1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}})1V^{1V}})I$. — Setzen wir zur Abkürzung $1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}} = \Delta$, $1V^{1V} = \xi$, so ist die letzte — vollreguläre — Zahlenfigur gleich $1(VI_{\Delta\xi})I$ und die ihr vorangehenden Zahlenfiguren bilden die komplette Reihe ihrer echten Anfänge.

Wichtig für die Klassifikation der (vollregulären) Zahlenfiguren $\geq 1VI_{1\mathcal{V}I_1}$ sind ihre Anfänge Ξ_n, wobei wir mit Ξ_n das n-te Glied der Limesreihe in (31) rechts bezeichnen. Wir nennen Ξ_n eine *n-stufige $\mathcal{V}$-Spitze*. Für jede vollständige Zahlenfigur $\zeta \geq 1VI_{1\mathcal{V}I_1}$ ohne lim gibt es einen größten Anfang Ξ_n (d.h. mit größtem n), den wir die *$\mathcal{V}$-Spitze von ζ* nennen; er ist zugleich die $\mathcal{V}$-Spitze aller zu ζ gleichen Zahlenfiguren ohne lim.

Hinsichtlich der Anfänge von Hilfsfiguren gilt auch jetzt noch das in § 2, **3** gesagte; wir wollen es ausführlicher formulieren in Form eines Satzes:

Satz 1. Es sei $\underline{\lambda} = \lambda_m = \lambda_{m-1} = \cdots = \lambda_2 = \lim_p \alpha_p$, *wobei die* λ_i *die Reihe der vollständigen Hilfsfiguren ohne* lim *für die vollreguläre Zahlenfigur* λ *bilden; dann ist der vorletzte Anfang von* λ *ein Anfang von* λ_m *und allgemein der vorletzte Anfang von* λ_{i+1} *ein Anfang von* λ_i, *während die Umkehrung nicht zu gelten braucht.*

Beispiel: $\lambda = 1VI_{1(\mathcal{V}I^2)^2 2^2}$, $\lambda_5 = 1(VI_{1(\mathcal{V}I^2)^2 2})I_{1(\mathcal{V}I^2)^2 2}$,

$\lambda_4 = 1(VI_{1(\mathcal{V}I^2)^2 2})I_{1(\mathcal{V}I^2)^2 + 1(\mathcal{V}I^2)^2}$,

$\lambda_3 = 1(VI_{1(\mathcal{V}I^2)^2 2})I_{1(\mathcal{V}I^2)^2 + (1\mathcal{V}I^2)\mathcal{V}I^2}$,

$\lambda_2 = 1(VI_{1(\mathcal{V}I^2)^2 2})I_{1(\mathcal{V}I^2)^2 + (1\mathcal{V}I^2)(\mathcal{V}I)I}$.

Denkt man sich überall 2 durch $1+1$ ersetzt, so erkennt man die Richtigkeit der obigen Behauptung in diesem speziellen Fall, und zugleich sieht man, daß λ_2 und λ_3 gleich viele Anfänge haben, λ_3 aber mehr Anfänge hat als λ_4, λ_4 mehr als λ_5 und λ_5 mehr als λ.

Von der allgemeinen Richtigkeit des Satzes 1 überzeugt man sich so: Die Umwandlung einer Hilfsfigur λ_i ($i \geq 2$) in die nächste λ_{i+1} oder, wenn $i=m$, in λ, erfolgt an Hand eines der „Verwandlungs-Schemata" ($\mathfrak{A}$, 1), ($\mathfrak{D}_n$, a) ($n = 1, 2, 3, \ldots$), (Faz, b), (Exp, a) (§ 1, **5** und § 13), indem wir es unter Umständen auch auf eine Teilfigur (die Zahlenfigur ist) anwenden. Die Schemata ($\mathfrak{A}$, 1) bzw. ($\mathfrak{D}_n$, a) können wir miterfassen im Schema (Faz, b) bzw. (Exp, a), wenn Δ in (Faz, b) auch eine Zahl bzw. T und U in (Exp, a) auch Operatoren oder T auch eine Zahl >1 bedeuten dürfen [wobei in den Fällen ($\mathfrak{A}$, 1) und ($\mathfrak{D}_1$, a) die eckigen Klammern [ ] wegzulassen sind]. Also hat λ_i entweder die Form (vgl. § 13, **1**, Schluß) $\langle \Delta\xi + \Delta \rangle$ oder $\langle (TU^{\Delta})U \rangle$ und λ_{i+1} bzw. λ die Form $\langle \Delta(\xi+1) \rangle$ oder $\langle TU^{\Delta+1} \rangle$. Der vorletzte Anfang von λ_{i+1} bzw. λ ist dann jeweils $\langle \Delta\xi \rangle$ oder $\langle TU^{\Delta} \rangle$, also immer ein Anfang von λ_i.

Den Inhalt des 8. Absatzes von § 2, **3** fixieren wir in dem

Satz 2. Ist α *eine vollständige Zahlenfigur ohne* lim *und* ξ, ξ_1 *ein Paar sukzessiver Anfänge von* α, *so haben alle vollständigen Zahlenfiguren* β *ohne* lim *mit* $\xi < \beta < \xi_1$ *ebenfalls* ξ *zum Anfang.*

Denn es gilt $\xi < \xi_1$ mit vollregulärem ξ. ξ_1 entsteht aus ξ, indem man rechts von ξ — eventuell unter Einschließung von ξ oder einer Teilfigur von ξ in ( ) — entweder eines der Zeichen $V, \mathcal{V}, I, I', I'', \ldots$ als Operator bzw. Operant oder das Zeichen 1 als Supponent oder eine der Zeichenkombinationen $1+1$, $1V$, $1\mathcal{V}$ als Exponent oder die Kombination $+1$ additiv oder die Kombination $(1+1)$ oder $1V$ multiplikativ hinzufügt. (Diese Anfügungen brauchen sich natürlich nicht auf die Grundzeile von ξ zu beziehen!) Wie unsere Ableitungsregeln erkennen lassen, enthält dann jedes Zwischenstadium β der Ableitung von ξ_1 aus ξ, sofern β eine vollständige Zahlenfigur

ohne lim ist, entweder ξ selbst oder eine aus ξ durch Verwendung von Klammern entstehende Figur als Initial-Teilfigur. Das aber besagt, daß ξ ein Anfang von β ist.

Satz 3. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 haben sogar alle vollständigen Zahlenfiguren β ohne lim *mit $\xi<\beta<\alpha$ den Anfang ξ.*

Für $\beta<\xi_1$ folgt dies aus Satz 2, desgleichen, wenn α id ξ_1. Ist $\xi_1<\alpha$, so sei $\xi_1, \ldots, \xi_p$ die Reihe der Anfänge von α ab ξ_1 (also α id ξ_p). Wenn $\beta=\xi_1$ bzw. $=\xi_i$ $(2\leq i\leq p-1)$, so hat β nach Satz 1 den Anfang ξ bzw. ξ_{i-1} (die $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ sind ja vollregulär), also jedenfalls den Anfang ξ. Wenn $\xi_{i-1}<\beta<\xi_i$ $(2\leq i\leq p)$, so hat β nach Satz 2 den Anfang ξ_{i-1}, also auch den Anfang ξ.

2. Auch die Ausführungen von § 2, **3** bezüglich der Vergleichung zweier vollregulärer Zahlenfiguren übertragen sich m. m., wobei zu beachten ist, daß alle Zahlenfiguren, die den Anfang $1VI_{1\mathcal{V}I_1}$ haben, größer sind als alle, die ihn nicht haben, und daß $\alpha<\beta$ gilt, wenn die $\mathcal{V}$-Spitze von β größer ist als die von α. Letztere Bemerkung gilt überhaupt, wenn α und β vollständige Zahlenfiguren ohne lim sind. Desgleichen gilt folgender Satz, welcher das Vergleichungsrezept von § 2, **3** etwas verallgemeinert:

Satz 4. Seien $\eta\neq\eta'$ zwei vollständige Zahlenfiguren ohne lim *und $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sowie $\xi'_1, \ldots, \xi'_{m'}$ die Reihen ihrer Anfänge (also ξ_1 id $\xi'_1=1$, ξ_m id η, $\xi'_{m'}$ id η'). Dann sind genau drei Fälle möglich. 1. η ist ein echter Anfang von η' oder Hilfsfigur eines solchen. 2. Dasselbe mit Vertauschung von η und η'. 3. Es gibt ein $j\leq\min(m, m')$, so daß ξ_i id ξ'_i für $i<j$ und $\eta'\neq\xi_j\neq\xi'_j\neq\eta$ ist. — Im ersten Fall ist $\eta<\eta'$, im zweiten $\eta>\eta'$ und im dritten gilt $\eta<$ oder $>\eta'$, je nachdem $\xi_j<$ oder $>\xi'_j$ ist.*

Die beiden ersten Fälle sind trivial. Daß der dritte Fall zu ihnen disjunkt ist, folgt so. Nach Voraussetzung kann nicht ξ_i id ξ'_i sein für alle $i\leq\min(m, m')$, wenn zugleich die beiden ersten Fälle ausgeschlossen sein sollen; also gibt es ein j mit $2\leq j\leq\min(m, m')$, so daß ξ_i id ξ'_i für $i<j$ und ξ_j non id ξ'_j ist. Dann ist aber auch $\xi_j\neq\xi'_j$; das ist klar, wenn $j=m$ oder $j=m'$, und wenn $j<\min(m, m')$, so folgt es aus dem Umstand, daß dann ξ_j und ξ'_j vollregulär sind. — Im dritten Fall sind ξ_{j-1} und ξ'_{j-1} vollregulär und identisch, d. h. ξ_{j-1} ist der vorletzte Anfang von ξ_j und ξ'_j. Es gibt nur endlich viele Zahlenfiguren, von denen ξ_{j-1} der vorletzte Anfang ist; für je zwei von ihnen kann man auf Grund ihrer Ableitung aus ξ_{j-1} feststellen, in welcher der Relationen $<, =, >$ sie zueinander stehen. Sei etwa $\xi_j<\xi'_j$ festgestellt (die Gleichheit scheidet ja aus). Wenn $j=m$, so folgt $\eta<\xi'_j\leq\eta'$. Wenn $j<m$, so ist $\xi_j<\eta$ und alle Zahlen zwischen ξ_j und η haben nach Satz 3 den Anfang ξ_j; ξ'_j gehört demnach nicht zu ihnen; wegen $\eta\neq\xi'_j$ muß also wieder $\eta<\xi'_j\leq\eta'$ sein.

Hat man zwei Zahlenfiguren zu vergleichen, so ist es unter Umständen vorteilhaft, sie durch ihre zweiten Hilfsfiguren zu ersetzen, soweit dies möglich ist bzw. sie nicht bereits solche sind. Denn die Reihe ihrer identischen Anfänge wird damit eventuell verlängert und die Vergleichung der ersten nicht identischen Anfänge erleichtert. — Beispiel: Die echten Anfänge von $1(VI)^{1+1}$

sind $1, 1V, 1VI$; die von $(1VI)V^{1+1}$ sind $1, 1V, 1VI, (1VI)V$. Die letzteren sind aber auch die echten Anfänge von $(1VI)VI$ und $((1VI)V)V$.

3. Was in § 2, **3** über die Angabe eines $\alpha_m > \beta$ zu einem $\beta < \underline{\lambda} = \lim_n \alpha_n$ gesagt wurde, bleibt bei sinngemäßer Ergänzung ebenfalls gültig. Wir wollen aber den Sachverhalt noch etwas eingehender behandeln und überzeugen uns zunächst davon, daß folgender Satz gilt:

Satz 5. Sei $\underline{\lambda} = \lim_n \alpha_n$ im Sinn des Algorithmus; λ und die α_n seien in vollständiger Form geschrieben. Dann ist α_1 der vorletzte Anfang entweder der zweiten Hilfsfigur für λ oder, wenn es eine solche nicht gibt, von λ selbst. — α_n ist stets ein Anfang von α_{n+1}.

Jede Limesbildung geht nämlich zurück auf eines der „produktiven" Schemata § 1: (6), $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{Z})$, $(\mathfrak{Z}^{(n)})$ oder § 13: (Sup, a), $(\mathrm{Sup}^{(n)}, \mathrm{a})$, (Sup, b), $(\mathrm{Sup}^{(n)}, \mathrm{b})$, (Sup, d), $(\mathrm{Sup}^{(n)}, \mathrm{d})$, (Faz, d), (Faz, e), (Exp, c), (It), $(\mathrm{It}^{(n)})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, wobei diese Schemata auch auf Teilfiguren einer Zahlenfigur anzuwenden sind, nämlich gemäß den Rekursionsschemata § 1: $(\mathfrak{A}, 2)$, $(\mathfrak{D}_n, \mathrm{b})$ und § 13: (Sup, c), $(\mathrm{Sup}^{(n)}, \mathrm{c})$, (Faz, a), (Faz, c), (Exp, b), unter Beachtung des Umstandes, daß die i-te $(i \geq 2)$ Hilfsfigur der zu $\langle\lambda\rangle$ gleichen regulären Zahlenfigur durch $\langle\lambda_i\rangle$ dargestellt wird, wenn λ_i die i-te Hilfsfigur des regulären λ ist. Bedeutet daher $\varrho = \lim\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots\}$ eines der zu Anfang dieses Absatzes zitierten „produktiven" Schemata, so läßt sich jede Limesbildung in der Form schreiben:

$$\langle\varrho\rangle = \lim\{\langle\sigma_1\rangle, \langle\sigma_2\rangle, \langle\sigma_3\rangle, \ldots\}. \tag{32}$$

Die linke Seite von (32) ist nun entweder zweite Hilfsfigur oder regulär; die Glieder in { } sind stets regulär. Auf Grund von (32) und dem Anblick der „produktiven" Schemata folgt aber der Satz 5 unmittelbar, sobald wir uns alle Zahlenfiguren in vollständiger Form denken.

Satz 6. Sei unter den Voraussetzungen von Satz 5 mit β eine vollreguläre Zahlenfigur $< \lambda$ bezeichnet. Dann ist entweder $\beta < \alpha_1$ oder es gibt ein größtes m, so daß α_m ein Anfang von β ist, und dann gilt $\alpha_m \leq \beta < \alpha_{m+1}$.

Da $\beta < \lambda$, so muß eine der Relationen $\beta < \alpha_1$ oder $\alpha_m \leq \beta < \alpha_{m+1}$ bestehen. Im letzten Fall ist aber nach Satz 3 (bzw. wegen der Regularität von β) α_m ein Anfang von β, α_{m+1} jedoch nicht mehr. — Da β eine endliche Figur ist, läßt sich die Zahl m ohne weiteres finden.

Satz 7. Ist $\underline{\lambda} = \lim_n \alpha_n$, $\underline{\mu} = \lim_n \beta_n$ und gilt $\alpha_i < \mu \leq \alpha_{i+1}$, so ist $\alpha_i \leq \beta_1$, und zwar genauer α_i ein Anfang von β_1.

Denn nach Satz 3 und Satz 5 ist α_i ein Anfang von μ, also ein Anfang des vorletzten Anfangs sowohl von μ als auch, wenn sie existiert, der zweiten Hilfsfigur für μ (Satz 1); wiederum nach Satz 5 ist daher α_i ein Anfang von β_1.

Der Algorithmus erfüllt also hinsichtlich der Definition der Fundamentalfolgen für seine Limeszahlen die von H. BACHMANN[7]) erwähnte Nebenbedingung. Es ist nicht vorstellbar, wie der Algorithmus bei beliebiger

Fortsetzung, sofern sie nach den bisherigen Grundsätzen weitergeht (von denen abzuweichen kein Anlaß sichtbar ist), jemals gezwungen sein sollte, gegen diese Bedingung zu verstoßen. Andererseits hat H. BACHMANN [a. a. O.[7]), Schluß] gezeigt, daß diese Bedingung nicht eingehalten werden kann, wenn man sich für *alle* Limeszahlen der zweiten Zahlenklasse die Fundamentalfolgen definiert denkt. Diese Bemerkung illustriert die Kluft zwischen der „konstruktiven" zweiten Zahlenklasse und der zweiten Zahlenklasse „an sich".

4. Wie in § 2, **4** überzeugt man sich, daß auch für den in diesem Abschnitt weitergeführten Algorithmus die Forderungen von CHURCH und KLEENE erfüllt sind; man hat die dortigen Ausführungen lediglich durch den Hinweis auf § 14 und § 15, **2'** zu ergänzen.

Nun wollen wir durch Beispiele belegen, daß Klammerregeln wie die von § 13, **6** nicht entbehrt werden können, wobei nicht verschwiegen sei, daß die dortigen Klammerregeln vom theoretischen Standpunkt aus keine bestmöglichen sind; denn sie sind wohl hinreichend, um Zweideutigkeiten auszuschalten, aber nicht in jedem einzelnen Falle notwendig zu diesem Zweck. Sie müßten also durch „feinere" Regeln ersetzt werden, wenn man „überflüssige" Klammersetzungen vermeiden wollte. Dazu müßte man aber näher auf die „Topologie" der Zahlenfiguren eingehen, wobei vorauszusehen ist, daß die dann resultierenden Klammerregeln noch komplizierter ausfallen. Ein Rest von Willkür würde übrigens auch dann noch bleiben. Andererseits erleichtern die Klammern das „Lesen" der Zahlenfiguren im allgemeinen auch dann, wenn sie im Grunde überflüssig sind, so daß es geraten erscheint, sich hier mit einem Kompromiß zu begnügen.

Wir bringen die Beispiele in der Reihenfolge der Regeln von § 13, **6**.

1. $1VI_{1\mathcal{V}(1V+1)} > 1VI_{1\mathcal{V}1V+1}$.

2. a) $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1V2} > (1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1V})2$,

   b) $1VI_{1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}}{}^{1V}} > 1VI_{(1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}})1V}$,

   c) $1VI_{1\mathcal{V}I}{}^{1VI_{1V}} > 1VI_{(1\mathcal{V}I}{}^{1VI})_{1V}$.

3. $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1VI+1} > (1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1VI})+1$.

4. a) $1VI_{1\mathcal{V}}{}^{(1VI)V} > (1VI_{1\mathcal{V}}{}^{1VI})V$,

   b) $1VI_{1\mathcal{V}I}{}^{1VI_{(1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}} > 1VI_{(1\mathcal{V}I}{}^{1VI}{}_{1\mathcal{V}I)\mathcal{V}}$.

[7]) Normalfunktionen und Hauptfolgen. Comm. Math. Helv. **28**, 9—16 (1954).

5. a) $1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}I}{}^{1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I\,1V} > 1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}I}{}^{1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I\,(1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I)\,1V} >$

$> 1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}I}{}^{1\,(\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I)\,1V} > 1V\,(I_{1\mathcal{V}I}{}^{1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I})^{1V} >$

$> 1\,(\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}I}{}^{1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I\,1\mathcal{V}I})^{1V}$,

b) $1\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}I\,I'} > 1V\,(I_{1\mathcal{V}}{}^{1\mathcal{V}I})\,I' > 1(\mathcal{V}I_{1\mathcal{V}}{}^{1V})\,I\,I'$.

5. Von einem konstruktiven Verfahren ist zu verlangen, daß es „zirkelfrei" ist. Für den konstruktiven Algorithmus bedeutet dies unter anderem, daß diejenigen in einer Zahlenfigur ζ (ohne lim) auftretenden Teilfiguren, die selbst Zahlenfiguren sind, kleiner als ζ zu sein haben. Das ist in der Tat der Fall, wie die Entwicklungen in § 14 erkennen lassen. Denn wenn die Zahlenfigur ζ die Zahlenfigur α als Teilfigur enthält, so bedeutet dies, daß ζ unter Zuhilfenahme der Konstruktion von α zu bilden ist, also ζ nicht ohne Kenntnis von α erklärt werden kann, während α ohne Kenntnis von ζ gewonnen werden mußte. Folglich kann α nicht aus ζ abgeleitet werden und daher muß ζ aus α ableitbar sein; da wir α als regulär ansehen können, so folgt daraus $\alpha < \zeta$.

Mit Rücksicht auf ein ähnliches Problem im „freien" Algorithmus (siehe Vorbemerkung) wollen wir uns nun auch explizit vom Zustandekommen dieses Sachverhalts überzeugen. Es genügt dabei, reguläre Zahlenfiguren ζ zu betrachten. Hat man ζ konstruiert, so ist damit festgestellt, daß ζ die Form (3) (§ 12) hat. Wenn also α einer der Summanden von (3) ist, muß $\alpha < \zeta$ sein. Wir können daher annehmen, daß α in einem Exponenten oder Supponenten vorkommt. Ferner genügt es, anzunehmen, daß α nicht Teil einer Zahlenfigur ist, die ihrerseits Teil aber kein Anfang von ζ ist. Wir sagen dann, α sei eine *maximale* Zahlenfigur innerhalb ζ. Unter diesen Voraussetzungen ist α entweder Exponent oder Supponent oder Koeffizient eines Fazienten oder letzter Summand eines Fazienten [vgl. § 12, (4)].

Entsprechend den genannten vier Möglichkeiten hat ζ einen Anfang $[U^{\alpha}]$ bzw. $[U_{\alpha}]$ bzw. $[\Delta\alpha]$ bzw. $[\Delta+\alpha]$; im ersten Fall ist U ein Operator oder Operant, im zweiten ein Symbol I oder $I^{(\alpha)}$ (wenn U bzw. U_{α} ein Operator ist, fällt die Grundzeile von U in die von ζ). Im zweiten und dritten Fall ist Δ ein Fazient. $[U]$ bzw. $[U_1]$ bzw. $[\Delta]$ bzw. $[\Delta+1]$ ist ein Anfang von $[U^{\alpha}]$ bzw. $[U_{\alpha}]$ bzw. $[\Delta\alpha]$ bzw. $[\Delta+\alpha]$. (Es soll $[U]\to[U^{\alpha}]$ usw. gelten; vgl. § 13, 1.) — Nun fragt es sich, ob man von diesem Anfang aus die „lokale" Konstruktion an dem durch die Stellung von α bestimmten Orte „unbeschränkt" fortführen, d.h. die Folge $[U]$, $[U^{[U]}]$, $[U^{[U^{[U]}]}]$, ... bzw.

$[U_1]$, $[U_{[U_1]}]$, $[U_{[U_{[U_1]}]}]$, ... bzw. $[\Delta]$, $[\Delta[\Delta]]$, $[\Delta[\Delta[\Delta]]]$, ... bzw. $[\Delta+1]$, $[\Delta+[\Delta+1]]$, $[\Delta+[\Delta+[\Delta+1]]]$, ... bilden kann oder nicht.

Ist unbeschränkte Konstruktion möglich, so wird sie abgeschlossen mit $[UI]$ oder $[UI^{(n)}]$ (wenn U ein Operator 1. oder $(n+1)$. Stufe ist) oder $[U^{1\mathcal{V}}]$ (wenn U ein Operant) bzw. $[U_{1\mathcal{V}}]$ bzw. $[\Delta\mathcal{V}]$ bzw. $[\Delta+1\mathcal{V}]$, wobei nach dem III. Konstruktionsprinzip der Abschluß eindeutig ist (denn Figuren wie $[U^{[UI]}]$ oder $[U^{[U^{1\mathcal{V}}\cdot}]$ bzw. $[U_{[U_{1\mathcal{V}}]}]$ bzw. $[\Delta[\Delta\mathcal{V}]]$ bzw. $[\Delta+[\Delta+1\mathcal{V}]]$ usw. sind nicht zugelassen). — Sei ξ die durch den Abschluß bestimmte reguläre Zahlenfigur. Dann dürfen die Zahlenfiguren $[U^\gamma]$ bzw. $[U_\gamma]$ bzw. $[\Delta\gamma]$ bzw. $[\Delta+\gamma]$ genau dann gebildet werden, wenn $1 \leq \gamma < \xi$ ist. Bezeichnen wir diese Zahlenfiguren mit $\eta(\gamma)$, so gilt stets $\gamma < \eta(\gamma)$. Für $\gamma = 1$ ist dies klar. Für die übrigen γ zeigen wir es bezüglich $\eta(\gamma) = [\Delta\gamma]$ (in den anderen Fällen verfährt man analog). Wenn $1 < \gamma \leq [\Delta]$, so wird $[\Delta] < [\Delta\gamma]$; wenn $[\Delta] < \gamma \leq [\Delta[\Delta]]$, so wird $[\Delta[\Delta]] < [\Delta\gamma]$ usw. Also ist stets $\gamma < [\Delta\gamma]$. — In sämtlichen Fällen muß aber α eines der genannten γ sein, d.h. es gilt $\alpha < \eta(\alpha) \leq \zeta$.

Ist die unbeschränkte Konstruktion unmöglich, so kann dies nur dadurch eintreten, daß die bei Erreichung eines gewissen β entstehende Zahlenfigur $[U^\beta]$ bzw. $[U_\beta]$ bzw. $[\Delta\beta]$ bzw. $[\Delta+\beta]$, die wir wieder summarisch mit $\eta(\beta)$ bezeichnen, entweder eine Zahlenfigur ξ von einer der Formen $(\vartheta W^\delta)W$, $[\Gamma\mu+\Gamma]^*$, $[(TX^\Theta)X]^*$, $[I_\Lambda I'_\Lambda]^*$, $[I_\Lambda^{(n)} I_\Lambda^{(n+1)}]^*$ wird oder ein echter Anfang eines solchen ξ. (Hinsichtlich $[\,]^*$ s. § 13, 1, 1. Absatz) Die drei ersten Formen sind Hilfsfiguren (vgl. die Verabredung in § 15, 1 zum Beweis von Satz 1); die beiden letzten können es ebenfalls sein, sollen aber nur dann in Betracht gezogen werden, wenn sie regulär sind (denn andernfalls lassen sie sich in einer der drei ersten Formen darstellen). In jedem Fall muß dabei entweder U^β bzw. U_β bzw. $\Delta\beta$ bzw. $\Delta+\beta$ jeweils als Teilfigur in W, Γ, X, Λ auftreten (eventuell kann $\Delta\beta$ bzw. $\Delta+\beta$ id Λ sein) oder, was nur für $\eta(\beta)$ id $[U_\beta]$ id ξ geschehen kann, es muß U_β jeweils mit $W, X, I'_\Lambda, I_\Lambda^{(n+1)}$ identisch sein. Daher kann auf Grund der Konstruktionsprinzipien I bis III die Zahlenfigur $\eta(\gamma)$ nur für $\gamma \leq \beta$ gebildet werden, d.h. es gilt $\alpha \leq \beta$ [da $\eta(\alpha)$ schon gebildet war]. Ferner muß jeweils ϑW^δ, $[\Gamma\mu]^*$, $[TX^\Theta]^*$, $[I_\Lambda]^*$, $[I_\Lambda^{(n)}]^*$ ein Anfang von $\eta(\alpha)$ sein, d.h. in $\eta(\alpha)$, somit auch in ζ, kommt β links von α als innerhalb ζ maximale Teilfigur vor. — Wir können also unsere Betrachtung für β wiederholen. — Dieses Fortschreiten nach links muß aber einmal enden mit dem Fall einer unbeschränkt möglichen „lokalen" Konstruktion, und zwar spätestens bei der am weitesten links stehenden innerhalb ζ maximalen Zahlenfigur.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 20. September 1955)

HERRMANN, O.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 457—466 (1956)

Über den Rang der Schar der Spitzenformen zu Hilbertschen Modulgruppen

Von

OSKAR HERRMANN

Ist ein total-reeller algebraischer Zahlkörper $\mathfrak{K}$ des Grades n und eine ganze Zahl $k>1$ gegeben, so ist bekanntlich jede Spitzenform zur HILBERTschen Modulgruppe bezüglich $\mathfrak{K}$ von der Dimension $-k$ als ein lineares Kompositum gewisser (endlich vieler) POINCARÉscher Reihen darstellbar [1], [2]. Der sehr komplizierte Bau dieser POINCARÉschen Reihen läßt im allgemeinen nicht erkennen, ob eine solche Reihe identisch verschwindet oder nicht. Noch schwieriger dürfte es sein, die linearen Relationen aufzustellen, die innerhalb eines vorgelegten Systems von POINCARÉschen Reihen bestehen. Da eine geeignete Verallgemeinerung des RIEMANN-ROCHschen Satzes nicht bekannt ist, hat man auch keine Möglichkeit, sich auf diesem Wege eine Aussage über den Rang der Schar der Spitzenformen zu verschaffen.

In den vorliegenden Untersuchungen wird mit Hilfe numerischer Abschätzungen der FOURIER-Koeffizienten geeigneter POINCARÉscher Reihen gezeigt, daß diese nicht identisch verschwinden, bzw. linear unabhängig sind. Die Betrachtung beschränkt sich nicht auf die gewöhnliche HILBERTsche Modulgruppe, sondern erstreckt sich auch auf die den absoluten Idealklassen des Grundkörpers zugeordneten Gruppen, die, wie sich bei der Begründung der Theorie der T-Operatoren gezeigt hat [3], gleichberechtigt neben der HILBERTschen Modulgruppe stehen. Auch für diese Gruppen hat GUNDLACH [4] die POINCARÉschen Reihen untersucht. Beim Vergleich der zitierten Arbeiten mit den vorliegenden Untersuchungen ist auf die jeweiligen Änderungen der Bezeichnungen zu achten. Diese Änderungen waren erforderlich um den Formelapparat möglichst einfach zu gestalten.

Der Einfachheit halber wird $\mathfrak{K}$ als reell-quadratisch und $k>2$ vorausgesetzt. d sei die Diskriminante von $\mathfrak{K}$. Nach genauer Definition der den einzelnen Idealklassen von $\mathfrak{K}$ zugeordneten Gruppen, werden die POINCARÉschen Reihen aufgestellt und deren FOURIER-Koeffizienten berechnet. Hierbei wird weitgehend auf die Resultate von GUNDLACH [4] zurückgegriffen. Es zeigt sich, daß die FOURIER-Koeffizienten numerisch sehr scharf eingegrenzt werden können, woraus sich zunächst das nicht-identische Verschwinden gewisser POINCARÉscher Reihen ergibt. Darüber hinaus wird mit einer sehr elementaren Schlußweise sogar die lineare Unabhängigkeit gewisser Systeme von POINCARÉschen Reihen bewiesen. Hieraus ergibt sich eine asymptotische Abschätzung des Ranges der Schar aller Spitzenformen der Dimension $-k$ zu der gegebenen Gruppe. Diese Abschätzung steht im Einklang mit einer

von HERVÈ [5] für den Fall der hyperabelschen Substitutionengruppe mit kompaktem Fundamentalbereich hergeleiteten Aussage. Falls es möglich ist, daß man die Beweise von HERVÈ auf die HILBERTsche Modulgruppe überträgt, bedeuten die vorliegenden Untersuchungen eine Abschätzung der hierbei auftretenden Konstanten[1]).

Die Durchführung dieser Methode erweist sich als besonders einfach, wenn man sich auf den Fall der gewöhnlichen HILBERTschen Modulgruppe beschränkt und die Spitzenformen in dem Gebiet $\Im\mathfrak{m}\frac{\tau}{\sqrt{d}}>0$ betrachtet. Hier kann man ohne Schwierigkeit diejenigen Paare $(d, -k)$ aufzählen, für die mit der gegebenen Methode die Existenz einer Spitzenform nicht bewiesen werden kann. Ferner wurde in diesem Spezialfall eine für alle k gültige Abschätzung des Ranges der Schar der Spitzenformen hergeleitet.

Zuletzt werden zwei Ergänzungen der beiden Hauptsätze ohne Beweis angegeben.

Es sei d die Diskriminante des reell-quadratischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}=R(\sqrt{d})$ mit der Klassenzahl h. Ist $\mathfrak{a}\neq(0)$ irgendein Ideal aus $\mathfrak{K}$, dann ist $\mathfrak{a}^{2h}$ das Quadrat eines Hauptideals und besitzt eine total-positive Erzeugende $\tilde{\omega}$. Also kann $\omega=\sqrt[2h]{\tilde{\omega}}$ in beiden Konjugierten reell und positiv gewählt werden. Die Menge der Produkte $\alpha\omega$ mit $\alpha\in\mathfrak{K}$ werde mit $\mathfrak{K}_\omega$ bezeichnet; entsprechend ist $\mathfrak{K}_{\omega^{-1}}$ definiert. $\alpha\omega$ heißt ganz, wenn das Ideal $\alpha\mathfrak{a}$ ganz ist. Γ_ω sei die Menge aller Matrizen

$$L=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \delta\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix}\alpha\in\mathfrak{K}, & \beta\in\mathfrak{K}_{\omega^{-1}}, & \alpha\delta-\beta\gamma=1,\\ \gamma\in\mathfrak{K}_\omega, & \delta\in\mathfrak{K}, & \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ ganz.}\end{matrix}$$

Da diese Konstruktion für die beiden Konjugierten simultan durchgeführt werden kann, können wir Γ_ω eine hyperabelsche Substitutionsgruppe $\bar{\Gamma}_\omega$ zuordnen. Offenbar unterscheiden sich diese Gruppen nur durch eine einfache Transformation von den Gruppen $\Gamma_1'(\mathfrak{K}_a)$ in [3] oder von den Gruppen $\bar{\Gamma}'(1,\mathfrak{a})$ in [4]. Die Gruppe $\bar{\Gamma}_1$ ist die gewöhnliche HILBERTsche Modulgruppe.

Die FOURIER-Reihe einer ganzen Spitzenform $F(\tau)$ zur Gruppe Γ_ω in einem der Diskontinuitätsgebiete von der Dimension $-k$ läßt sich in der Form

$$F(\tau)=\sum_\nu c(\nu)\,e\left(\frac{\nu\tau}{\sqrt{d}}\right) \quad \text{mit} \quad e(x)=e^{2\pi i S x}$$

schreiben. Hierbei wird über alle ganzen $\nu\in\mathfrak{K}_\omega$, die der Bedingung $\Im\mathfrak{m}\frac{\nu\tau}{\sqrt{d}}>0$ genügen, summiert. Dementsprechend gehört zu jeder ganzen Zahl μ, die diesen Bedingungen genügt, eine POINCARÈsche Reihe

$$(1)\qquad G_\mu(\tau;d,\omega,-k)=\sum_{(\gamma,\delta)}\sum_\lambda \mathrm{N}(\gamma\tau+\delta)^{-k}\,e\left(\frac{\mu\lambda^2 M\tau}{\sqrt{d}}\right).$$

[1]) *Zusatz bei der Korrektur:* Nach mündlicher Mitteilung von Herrn GUNDLACH soll eine solche Übertragung möglich sein.

Hierbei wird über ein Repräsentantensystem der Klassen (im weitesten Sinne) assoziierter zweiter Zeilen (γ, δ) von Matrizen aus Γ_ω bzw. über ein Halbsystem der Einheiten λ — d.h. von je zwei Einheiten $\lambda, -\lambda$ wähle man einen Repräsentanten — summiert. M ist eine Matrix mit der zweiten Zeile (γ, δ). Diese POINCARÉschen Reihen konvergieren im Falle $k \geq 3$ im Gebiet $\Im \frac{\nu\tau}{\sqrt{d}} > 0$ absolut und sind ganze Spitzenformen.

Die FOURIER-Reihe von $G_\mu(\tau; d, \omega, -k)$ schreiben wir in der Form

$$G_\mu(\tau; d, \omega, -k) = \sum_\nu a_\mu(\nu; d, \omega, -k)\, e\left(\frac{\nu\tau}{\sqrt{d}}\right).$$

Um die FOURIER-Koeffizienten zu berechnen, spalten wir in (1) die Glieder mit $\gamma = 0$ ab. Durch geeignetes Umordnen erhält man hierbei

$$(2)_. \qquad G_\mu(\tau; d, \omega, -k) = \sum_\lambda e\left(\frac{\mu\lambda^2\tau}{\sqrt{d}}\right) + \sum_\gamma \sum_\delta \sum_\lambda \mathrm{N}(\gamma\tau + \delta)^{-k}\, e\left(\frac{\mu\lambda^2 M\tau}{\sqrt{d}}\right).$$

Die Summation über γ erstreckt sich über ein System nicht-assoziierter $\gamma \in \mathfrak{R}_\omega$; bei festem γ ist über alle hierzu teilerfremden $\delta \in \mathfrak{R}$ zu summieren. Man erkennt sofort, daß der erste Term in (2) den Beitrag

$$\delta^*_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{\nu}{\mu} \text{ Quadrat einer Einheit} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

liefert. Den Beitrag des zweiten Terms hat GUNDLACH [4] bestimmt. Nach längerer Rechnung erhält man

$$a'_\mu(\nu; d, \omega, -k) = \frac{4\pi^2}{|\sqrt{d}|}\, \mathrm{N}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_\gamma \sum_\lambda \frac{W(\nu, \lambda^2\mu; \gamma)}{\mathrm{N}(\gamma)}\, \mathrm{N}\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}}\,(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}\,\frac{|\lambda|}{\gamma}\right).$$

Hierbei ist $J_{k-1}(x)$ die BESSEL-Funktion erster Art von der Ordnung $k-1$. $W(\alpha, \beta; \gamma)$ ist eine KLOOSTERMANsche Summe:

$$W(\alpha, \beta; \gamma) = \sum_j e\left(\frac{\alpha j + \beta\bar{j}}{\gamma\sqrt{d}}\right).$$

Die Summation erstreckt sich über ein Repräsentantensystem der teilerfremden Restklassen nach dem Modul γ und $\bar{j}$ ist der Sozius von j, d.h. die mod γ eindeutig bestimmte Lösung der Kongruenz $j\bar{j} \equiv 1(\gamma)$. Von den Eigenschaften der KLOOSTERMANschen Summen wird nur

$$(3) \qquad \left|\frac{W(\alpha, \beta; \gamma)}{\mathrm{N}(\gamma)}\right| \leq 1$$

benutzt werden. Diese Abschätzung ist für den vorliegenden Zweck besser als die O-Aussage in [4], da dort eine von der Diskriminante abhängige Konstante auftritt, die hier störte.

Ist λ_0 eine Grundeinheit von $\mathfrak{R}$, so ist schließlich

$$a'_\mu(\nu; d, \omega, -k) =$$

$$= \frac{4\pi^2}{|\sqrt{d}|} \mathrm{N}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\gamma} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{W(\nu, \lambda_0^{2m}\mu; \gamma)}{\mathrm{N}(\gamma)} \mathrm{N}\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}} (\mu\nu)^{\frac{1}{2}} \frac{|\lambda_0^{\frac{1}{2}m}|}{\gamma}\right). \tag{4}$$

Um (4) abzuschätzen, benötigen wir zwei Abschätzungen der BESSEL-Funktionen:

$$|J_{k-1}(x)| \leq \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \frac{1}{|\sqrt{x}|} \quad \text{für reelle } x \neq 0, \tag{5}$$

$$|J_{k-1}(x)| \leq \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \quad \text{für reelle } x. \tag{6}$$

Durch Eintragen der asymptotischen Entwicklung der BESSEL-Funktionen bestätigt man

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{\pi} - x\left\{\left(\frac{1}{x} J_{k-1} + J'_{k-1}\right)^2 + (J'_{k-1})^2 + 2\left(1 - \frac{(k-1)^2}{x^2}\right) J^2_{k-1}\right\} = 0.$$

Ferner ist die Ableitung des Ausdrucks unter dem lim-Zeichen

$$-(4k^2 - 8k + 3)\left(\frac{1}{x} J_{k-1}(x)\right)^2.$$

Hieraus folgt aber

$$(4k^2 - 8k + 3) \int_x^\infty \left(\frac{1}{u} J_{k-1}(u)\right)^2 du =$$

$$= \frac{4}{\pi} - x\left\{\left(\frac{1}{x} J_{k-1} + J'_{k-1}\right)^2 + (J'_{k-1})^2 + \left(1 - \frac{(k-1)^2}{x^2}\right) J^2_{k-1}\right\}.$$

Damit ist insbesondere für $x \geq |\sqrt{k^2-1}|$

$$2x\left(1 - \frac{(k-1)^2}{k^2-1}\right) J^2_{k-1}(x) \leq 2x\left(1 - \frac{(k-1)^2}{x^2}\right) J^2_{k-1}(x) < \frac{4}{\pi}.$$

Da die BESSEL-Funktion im Intervall $0 \leq x \leq \sqrt{k^2-1}$ monoton wachsend ist, folgt (5) unmittelbar, wenn man die Relation $J_{k-1}(x) = \pm J_{k-1}(-x)$ beachtet. Die andere Ungleichung folgt unmittelbar aus der Integraldarstellung

$$J_{k-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(k-\frac{1}{2})} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \int_0^\pi \cos(x\cos\varphi) \sin^{2(k-1)}\varphi \, d\varphi,$$

indem man $\cos(x\cos\varphi)$ durch 1 abschätzt und das verbleibende Integral ausrechnet.

Schätzt man beide BESSEL-Funktionen nach (6) ab, so erhält man sofort

$$\left|\mathrm{N}\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}} (\mu\nu)^{\frac{1}{2}} \frac{|\lambda_0^{\frac{1}{2}m}|}{\gamma}\right)\right| \leq \frac{1}{((k-1)!)^2} \frac{(2\pi)^{2(k-1)}}{d^{k-1}} \left|\frac{\mathrm{N}(\mu\nu)^{\frac{k-1}{2}}}{\mathrm{N}(\gamma)^{k-1}}\right|. \tag{7}$$

Verwendet man dagegen einmal (5) und einmal (6), so findet man nach einiger Rechnung

$$\left|\mathsf{N}\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}}\,(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}\,\frac{|\lambda_0|^m}{\gamma}\right)\right| < \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!}\,\frac{(2\pi)^{k-2}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}\times$$
$$\times\left|\frac{\mathsf{N}(\mu\nu)^{-\frac{1}{2}}}{\mathsf{N}(\gamma)^{-\frac{1}{2}}}\,\frac{(\mu'\nu')^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}{|\gamma'|^{k-\frac{1}{2}}}\,|\lambda_0'|^{m(k-\frac{1}{2})}\right|.$$

Da bei diesen Abschätzungen μ und ν beliebige aber feste Zahlen sind, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die $\gamma \in \mathfrak{R}_\omega$, über welche summiert wird, so ausgewählt sind, daß

$$\lambda_0^{*\,-\frac{1}{2}}\,\frac{\mathsf{N}(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}}{\mathsf{N}(\gamma)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|\mu'\nu'|^{\frac{1}{2}}}{|\gamma'|},\ \frac{|\mu''\nu''|^{\frac{1}{2}}}{|\gamma''|} \leq \lambda_0^{*\,\frac{1}{2}}\,\frac{\mathsf{N}(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}}{\mathsf{N}(\gamma)^{\frac{1}{2}}}$$

gilt, wobei $\lambda_0^* = \mathsf{Max}(|\lambda_0'|, |\lambda_0''|)$ gesetzt ist. Damit wird

$$\left|\mathsf{N}\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}}\,(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}\,\frac{|\lambda_0|^m}{\gamma}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!}\,\frac{(2\pi)^{k-2}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}\,\frac{\mathsf{N}(\mu\nu)^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}{\mathsf{N}(\gamma)^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}\,\lambda_0^{*\,\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}\,|\lambda_0'|^{m(k-\frac{1}{2})}.$$

Selbstverständlich gilt analog

$$\left|\mathsf{N}\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}}\,(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}\,\frac{|\lambda_0|^m}{\gamma}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!}\,\frac{(2\pi)^{k-2}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}\,\frac{\mathsf{N}(\mu\nu)^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}{\mathsf{N}(\gamma)^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}\,\lambda_0^{*\,\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}\,|\lambda_0''|^{m(k-\frac{1}{2})}.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt

$$\left|\mathsf{N}\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{d}}\,(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}\,\frac{|\lambda_0|^m}{\gamma}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!}\,\frac{(2\pi)^{k-2}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}\,\frac{\mathsf{N}(\mu\nu)^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}{\mathsf{N}(\gamma)^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}\,\lambda_0^{*\,\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})(1-2|m|)}. \tag{8}$$

Es sei m_0 eine von γ abhängige natürliche Zahl. In (4) werden die Summanden mit $|m| < m_0$ nach (7), die übrigen nach (8) abgeschätzt. In beiden Fällen werden die KLOOSTERMANschen Summen nach (3) abgeschätzt. Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned}|a_\mu'(\nu; d, \omega, -k)| \leq{}& \frac{(2\pi)^{2k}}{d^{k-\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{(k-1)!^2}\,\mathsf{N}(\nu)^{k-1}\sum_\gamma \frac{(2m_0-1)}{|\mathsf{N}(\gamma)|^{k-1}} + \\ &+ 2\,\frac{(2\pi)^k}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}\,\frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!}\,\frac{1}{1-\lambda_0^{*\,-(k-\frac{1}{2})}}\,\frac{|\mathsf{N}(\nu)|^{k-1}}{|\mathsf{N}(\mu\nu)|^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}\sum_\gamma \frac{\lambda_0^{*\,\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})(1-2m_0)}}{\mathsf{N}(\gamma)^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Nun sei $m_0 = \left[\frac{1}{2}\,\frac{\log|\mathsf{N}(\gamma)|}{\log\lambda_0^*} + 1 + \frac{\alpha}{2}\right]$ mit einer festen Zahl $\alpha \geq 0$. Dann ist

$$\frac{\log|\mathsf{N}(\gamma)|}{\log\lambda_0^*} - 1 + \alpha < 2m_0 - 1 \leq \frac{\log|\mathsf{N}(\gamma)|}{\log\lambda_0^*} + 1 + \alpha$$

und hieraus folgt

$$\lambda_0^{*\,\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)(1-2m_0)} < \lambda_0^{*\,-\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\log|\mathsf{N}(\gamma)|}{\log\lambda_0^*}-1+\alpha\right)} = \frac{\lambda_0^{*\,\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)(1-\alpha)}}{\left|\mathsf{N}(\gamma)^{\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)}\right|}.$$

Trägt man diese Abschätzungen in (9) ein, so tritt bei geeigneter Zusammenfassung neben $\sum_{\gamma} \frac{1}{N(\gamma)^{k-1}}$ auch $\sum_{\gamma} \frac{\log N(\gamma)}{N(\gamma)^{k-1}}$ auf. Das ist der Wert und (abgesehen vom Vorzeichen) die Ableitung der ζ-Funktion einer Idealklasse von $\mathfrak{R}$ an der Stelle $k-1$. Diese werden durch Wert und Ableitung der ζ-Funktion des Körpers $\mathfrak{R}$ majorisiert. Aus $\zeta_{\mathfrak{R}}(s) = \zeta(s)\, L_d(s)$ folgt schließlich

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{|N(\gamma)|^{k-1}} \leq \zeta^2(k-1) \leq \zeta^2(2) = \frac{\pi^4}{36}$$

bzw.

$$\sum_{\gamma} \frac{\log |N(\gamma)|}{|N(\gamma)|^{k-1}} \leq 2\zeta(k-1) \cdot |\zeta'(k-1)| \leq \frac{\pi^2}{3} |\zeta'(k-1)|.$$

Damit erhält man die für alle Anwendungen allein wichtige Abschätzung:

$$\begin{aligned} |a'_{\mu}(\nu; d, \omega, -k)| \leq{}& \frac{1+\alpha}{576} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{(k-1)!^2} N(\nu)^{k-1} + \\ &+ \frac{1}{12} \frac{(2\pi)^{2k+2}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{|\zeta'(k-1)|}{(k-1)!^2} N(\nu)^{k-1} \frac{1}{\log \lambda_0^*} + \\ &+ \frac{1}{288} \frac{(2\pi)^{k+4}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}} \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!} \frac{N(\nu)^{k-1}}{N(\mu\nu)^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}} \frac{\lambda_0^{*\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})(1-\alpha)}}{1-\lambda_0^{*-(k-\frac{1}{2})}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Es wird im folgenden eine Abschätzung für λ_0^* benötigt werden. Bei der Ableitung dieser Abschätzung darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß

$$\lambda_0' > 1 \quad \text{und} \quad |\lambda_0''| < 1$$

gilt. Da λ_0 nicht rational ist, ist $|\lambda_0' - \lambda_0''| \geq \sqrt{d}$. Hieraus folgt $\lambda_0' \geq \sqrt{d} - 1$. Dann ist aber $|\lambda_0''| \leq \frac{1}{\sqrt{d}-1}$ und $\lambda_0' > \sqrt{d} - \frac{1}{\sqrt{d}-1}$. Durch Iteration dieser Schlußweise und durch geschlossene Darstellung des entstehenden Kettenbruches folgt schließlich

$$\lambda_0^* \geq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{d} + \sqrt{d-4}\right). \tag{11}$$

Insbesondere ist also $\lambda_0^* \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Aus der Menge der Anwendungen der Ungleichung (10) greifen wir einige Beispiele heraus:

Satz 1. *Es sei $k > 2$ eine natürliche Zahl und d die Diskriminante eines reell-quadratischen Zahlkörpers. Von endlich vielen Paaren $d, -k$ abgesehen, gibt es zu jeder der Modulgruppen zu den Idealklassen von $\mathfrak{R} = R(\sqrt{d})$ in jedem der vier Diskontinuitätsgebiete mindestens eine Spitzenform der Dimension $-k$, welche von der Nullform verschieden ist.*

Beweis. In jeder der Klassen $\mathfrak{R}_{\omega}$ gibt es eine ganze Zahl mit vorgegebener Signatur, deren Norm höchstens $2d$ ist; denn nach dem Satz von MINKOWSKI

gibt es in jeder der Klassen $\mathfrak{R}_\omega$ eine ganze Zahl, deren Norm höchstens $\sqrt{d}$ ist, ferner gibt es in $\mathfrak{R}$ zu jeder Signatur eine Zahl deren Norm höchstens $2\sqrt{d}$ und damit kann eine Zahl $\mu \in \mathfrak{R}_\omega$ mit vorgegebener Signatur gefunden werden. Die Poincarésche Reihe $G_\mu(\tau; d, \omega, -k)$ ist von der Nullform verschieden, wenn

$$a_\mu(\mu; d, \omega, -k) = 1 + a'_\mu(\mu; d, \omega, -k) \neq 0$$

ist. Das ist sicher der Fall, wenn $|a'_\mu(\mu; d, \omega, -k)| < 1$ ist. Setzt man in (10) $\alpha = 1$ und beachtet man $\lambda_0^* \geq \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, so beweist man diese Ungleichung ohne Schwierigkeit für fast alle Paare $(d, -k)$.

Beschränkt man sich auf die gewöhnliche Hilbertsche Modulgruppe und betrachtet man diese im Gebiet $\mathfrak{Im}\frac{\tau}{\sqrt{d}} > 0$, so kann man sich ohne Mühe eine Übersicht über die Ausnahmepaare $(d, -k)$ machen:

Satz 2. *Zur gewöhnlichen* Hilbertschen *Modulgruppe zum Körper* $R(\sqrt{d})$ *gibt es stets eine Spitzenform von der Dimension* $-k$ *mit* $k \geq 3$, *welche von der Nullform verschieden ist, wenn man von den folgenden Fällen absieht:*

$$\begin{aligned} k &= 3: && d \leq 109, \\ k &= 4: && d \leq 44, \\ k &= 5: && d \leq 21, \\ k &= 6: && d \leq 13, \\ k &= 7: && d \leq 8, \\ k &= 8, 9: && d = 5. \end{aligned}$$

Beweis. Die Poincarésche Reihe $G_1(\tau; d, 1, -k)$ ist eine von der Nullform verschiedene Spitzenform, wenn man von den genannten Ausnahmefällen absieht. Es sei zunächst $k = 3$. Durch numerische Rechnung folgt aus (10)

$$|a'_1(1; d, 1, -3)| \leq \left\{4{,}163(1+\alpha) + \frac{4{,}808}{\log_0^* \lambda}\right\}\frac{10^4}{d^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda_0^{*\frac{3}{2}(1-\alpha)}}{1-\lambda_0^{*-\frac{3}{2}}}\,\frac{1343}{d^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man hier $\alpha = 2{,}2$ und schätzt λ_0^* nach (11) ab, so folgt $|a'_1(1; d, 1, -3)| < 1$ falls $d \geq 124$. In den Fällen $d = 113, 120$ ist (11) nicht ausreichend. Setzt man hier aber den genauen Wert von λ_0^* ein, so folgt wieder $|a'_1(1; d, 1, -3)| < 1$, falls man ein geeignetes α wählt. Die Fälle $k = 3, 4, \ldots, 9$ sind analog zu behandeln. Im Anschluß daran kann man ohne Schwierigkeit durch vollständige Induktion zeigen, daß für $k \geq 10$ Spitzenformen zu jeder Diskriminante existieren.

Die genauen Rechnungen sollen hier unterdrückt werden. Es soll nur angemerkt werden, daß

$$|\zeta'(2)| < 0{,}95 \quad \text{bzw.} \quad |\zeta'(k-1)| < \zeta(k-2) - \zeta(k-1) \quad \text{falls } k > 3$$

benutzt wurde. Die erste Abschätzung erhält man durch Summation der ersten Reihenglieder der Dirichletschen Reihe für $\zeta'(s)$ und eine geeignete Restgliedabschätzung.

Um zwei weitere Sätze zu beweisen, setzen wir

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\log \lambda_0^*} \log d \left(\frac{k}{2\pi e}\right)^2 \tag{12}$$

in (10) ein. Für fast alle Paare $(d, -k)$ ist $\alpha \geqq 0$. Die übrigen Paare $(d, -k)$ seien ausgeschlossen. Ferner werden auch diejenigen (endlich vielen) Paare $(d, -k)$ ausgeschlossen, für die die nachfolgenden Umformungen nicht gelten. Aus (12) folgt

$$\lambda_0^{*\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})(1-\alpha)} = \frac{(2\pi)^{k-\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}} \left(\frac{e}{k}\right)^{k-\frac{1}{2}}$$

und damit ist der dritte Term in (10) höchstens

$$\frac{1}{288} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{k+1}}{(k-1)!^2} \mathrm{N}(\nu)^{k-1}.$$

Nach längerer Rechnung erhält man schließlich

$$|a'_\mu(\nu; d, \omega, -k)| < \frac{\sqrt{k+1}}{72} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{N}(\nu)^{k-1}}{(k-1)!^2} \quad \text{für fast alle Paare } (d, -k). \tag{13}$$

Ferner benutzen wir folgenden bekannten Hilfssatz: Ist $\mathfrak{E}$ die s-reihige Einheitsmatrix und $\mathfrak{A}^*$ eine s-reihige Matrix, deren Elemente alle absolut höchstens $\frac{1}{2s}$ sind, so ist die Determinante der Matrix $\mathfrak{A} = \mathfrak{E} + \mathfrak{A}^*$ von Null verschieden.

Satz 3. *Es sei d die Diskriminante eines reell-quadratischen Zahlkörpers und $k \geqq 3$ eine natürliche Zahl. Sieht man von endlich vielen Paaren $(d, -k)$ ab, so genügt der Rang $r(d, 1, -k)$ der Schar der Spitzenformen zur gewöhnlichen* HILBERT*schen Modulgruppe im Gebiet $\mathfrak{Im} \frac{\tau}{\sqrt{d}} > 0$ der Ungleichung*

$$r(d, 1, -k) \geqq \frac{k\sqrt{d}}{2\pi e \cdot \varphi(k)} - 1 \quad \text{mit} \quad \varphi(k) = \sqrt[2k-1]{\frac{2\pi^4 e}{9} \sqrt{k+1}}.$$

Beweis. Die s POINCARÉschen Reihen

$$G_1(\tau; d, 1, -k), \; G_2(\tau; d, 1, -k), \; \ldots, \; G_s(\tau; d, 1, -k)$$

sind sicher linear unabhängig, wenn die s-reihige Determinante

$$\begin{aligned} \Delta_s(d; -k) &= |(a_\mu(\nu; d, 1, -k)|_{\mu,\nu=1,2,\ldots,s} \\ &= |(\delta_{\mu\nu} + a'_\mu(\nu; d, 1, -k)|_{\mu,\nu=1,2,\ldots,s} \end{aligned}$$

von Null verschieden ist. Für die hier vorkommenden μ, ν gilt nach (13)

$$|a'_\mu(\nu; d, 1, -k)| < \frac{\sqrt{k+1}}{72} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{s^{2(k-1)}}{(k-1)!^2}.$$

Also ist $\Delta_s(d, -k) \neq 0$, falls

$$\frac{\sqrt{k+1}}{72} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{s^{2(k-1)}}{(k-1)!^2} \leqq \frac{1}{2s}.$$

Da es keine $r(d, 1, -k)+1$ linear unabhängige POINCARÉsche Reihen gibt, folgt durch Kontraposition

$$(r(d, 1, -k)+1)^{2k-1} > \frac{72 d^{\frac{1}{2}(2k-1)} (k-1)!^2}{\sqrt{k+1}\,(2\pi)^{2k+4}}.$$

Hieraus folgt die Behauptung unmittelbar.

Satz 4. *Es sei d die Diskriminante eines reell-quadratischen Zahlkörpers, k eine natürliche Zahl und $r = r(d, \omega, -k)$ der Rang der Schar der Spitzenformen zur Gruppe Γ_ω von der Dimension $-k$ im Gebiet $\mathfrak{Im}\,\frac{\tau}{w\sqrt{d}} > 0$. Dann ist*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r(d, \omega, -k)}{k^2} \geq \frac{R\sqrt{d}}{2\pi^2 e^2} \quad (R = \text{Regulator von } R(\sqrt{d})). \tag{14}$$

Beweis. Man ordne die bezüglich der Gruppe der Einheitenquadrate inäquivalenten ganzen Zahlen aus $\mathfrak{R}_\omega$ mit der durch das Regularitätsgebiet gegebenen Signatur nach wachsender Norm an:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots.$$

Dann ist bekanntlich

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s}{N(\mu_s)} = \frac{2R}{|\sqrt{d}|}. \tag{15}$$

Die zum Beweis des vorigen Satzes benutzte Schlußweise wende man nun auf die s POINCARÉschen Reihen

$$G_{\mu_1}(\tau; d, \omega, -k),\ G_{\mu_2}(\tau; d, \omega, -k),\ \ldots,\ G_{\mu_s}(\tau; d, \omega, -k)$$

an. Man erhält hierbei

$$\frac{\sqrt{k+1}}{36} \frac{(2\pi)^{2k+4}}{d^{k-\frac{1}{2}}} \frac{N(\mu_{r+1})^{k-1}}{(k-1)!^2} \geq \frac{1}{r+1}. \tag{16}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist wegen Satz 3 und Gl. (14)

$$N(\mu_{r+1}) < (r+1) \frac{|\sqrt{d}|}{2R} (1+\varepsilon) \quad \text{für} \quad k > k_0(d, \varepsilon).$$

Trägt man dies in (15) ein, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Bisher wurden nur die POINCARÉschen Reihen zu einer einzigen Spitze betrachtet. Erweitert man die Betrachtungen auch auf die übrigen Spitzen, so erhält man an Stelle von (14) die Abschätzung

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r(d, \omega, -k)}{k^2} \geq h_0 \frac{R|\sqrt{d}|}{2\pi^2 e^2}. \tag{14a}$$

Hierbei ist h_0 die Anzahl aller der Idealklassen, die ein Idealquadrat enthalten. Auf den Beweis dieser Verschärfung soll nicht näher eingegangen werden.

Satz 2 kann ebenfalls ergänzt werden. Man hat nämlich die Möglichkeit, Spitzenformen durch Polynome in EISENSTEINschen Reihen zu konstruieren, so wie $\Delta(\tau)$ eine Linearkombination von $G_4^3(\tau)$ und $G_6^2(\tau)$ ist. Damit kann die Existenz von nicht-identisch verschwindenden Spitzenformen der Dimension $-k$ für jedes gerade $k \geq 4$ zu den in Satz 2 genannten Gruppen bewiesen werden.

Literatur

[1] MAASS, H.: Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen. Math. Ann. **117**, 538—578 (1940). — [2] GUNDLACH, K.-B.: Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourier-Koeffizienten. Acta math. **92**, 309—345 (1954). — [3] HERRMANN, O.: Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Math. Ann. **127**, 357—400 (1954). — [4] GUNDLACH, K.-B.: Poincarésche und Eisensteinsche Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe. Math. Z. **64**, 339—352 (1956). — [5] HERVÈ, M.: Sur les fonctions fuchsiennes de deux variables complexes dans un bicercle. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 41—43 (1952).

Münster, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. Oktober 1955)